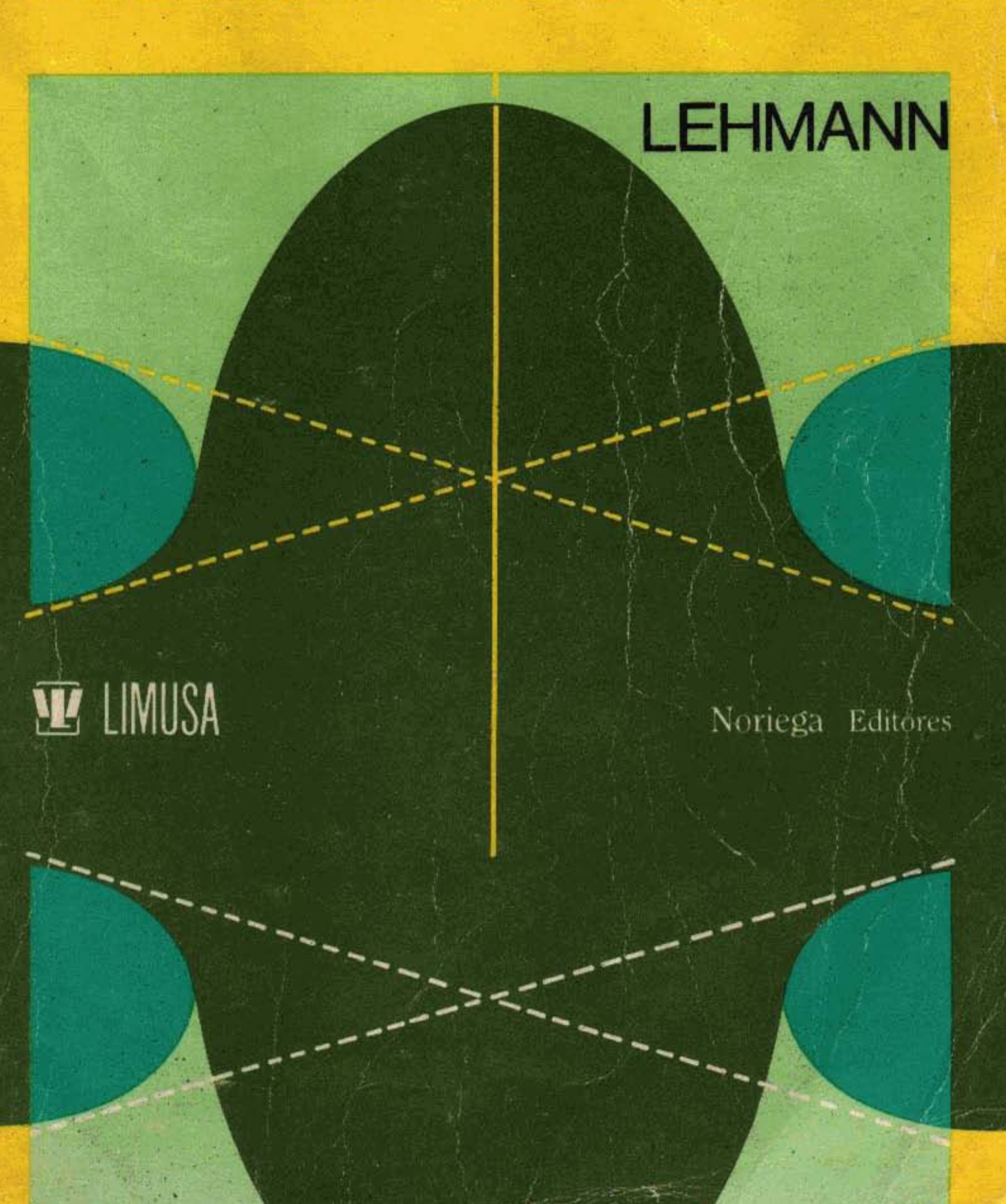
GEOMETRÍA ANALÍTICA



Temas que trata la obra:

Sistemas de coordenadas
Gráfica de una ecuación y lugares geométricos
La línea recta
Ecuación de la circunferencia
Transformación de coordenadas
La parábola
La elipse
La hipérbola
Ecuación general de segundo grado
Coordenadas polares
Ecuaciones paramétricas
Curvas planas de grado superior
El punto en el espacio
El plano
La recta en el espacio
Superficies
Curvas en el espacio

GEOMETRIA ANALITICA

GEOMETRIA ANALITICA

CHARLES H. LEHMANN

Profesor de Matemáticas
The Cooper Union School of Engineering



EDITORIAL LIMUSA

MEXICO • ESPAÑA • VENEZUELA • ARGENTINA
COLOMBIA • PUERTO RICO

Título de la obra en inglés:
ANALYTIC GEOMETRY

Traducción al español:
Ing. Rafael García Díaz

Revisión de la traducción:
Marcelo Santaló Sors
Catedrático de Matemáticas

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Registro Núm. 121

Primera reimpresión: 1980
Segunda reimpresión: 1980
Tercera reimpresión: 1980
Cuarta reimpresión: 1981
Quinta reimpresión: 1982
Sexta reimpresión: 1982
Séptima reimpresión: 1984
Octava reimpresión: 1984
Novena reimpresión: 1985
Décima reimpresión: 1986
Decimaprimera reimpresión: 1986
Decimasegunda reimpresión: 1988
Decimatercera reimpresión: 1989
Impreso en México
(7911)

ISBN 968 – 18 – 1176 – 3

PROLOGO

El libro que presentamos constituye un curso de Geometría analítica plana y del espacio. Supone el conocimiento, por parte del lector, de los principios fundamentales de Geometría elemental, Trigonometría plana y Algebra.

En su preparación el autor se ha esforzado, principalmente, en satisfacer las necesidades de maestros y alumnos. Una simple lectura del índice mostrará que los temas considerados son aquellos incluídos generalmente en los libros de texto de Geometría analítica. Creemos que el maestro encontrará en este libro todo el material que puede considerar como esencial para un curso de esta materia, ya que no es conveniente, por lo general, el tener que complementar un libro de texto con material de otros libros.

El método didáctico empleado en todo el libro consta de las siguientes partes: orientación, motivo, discusión y ejemplos, a la manera de una lección oral.

Para orientación del estudiante, el autor ha usado el método de presentar primero ideas familiares y pasar luego paulatinamente y de una manera natural a nuevos conceptos. Por esta razón, cada capítulo comienza con un artículo preliminar. Este enlace de los conocimientos anteriores del estudiante con los nuevos conceptos de la Geometría analítica es de considerable importancia, porque un mal entendimiento del método analítico en los principios conducirá, inevitablemente, a dificultades continuas en las partes más avanzadas.

En el desarrollo de los temas se ha puesto especial cuidado en fijar el motivo. Esto es necesario si se quiere que el alumno obtenga un conocimiento básico de los métodos analíticos y no haga una simple adquisición de hechos geométricos. Se ha hecho todo lo posible por encauzar el proceso de razonamiento de tal manera que aparte al estudiante de la tarea de memorizar.

En general, hemos resumido en forma de teoremas los resultados de la discusión de un problema o una proposición particular. Este proce-

dimiento no solamente sirve para llamar la atención sobre los resultados importantes, sino también clasifica a dichos resultados para futura referencia.

El maestro verá que este libro se presta en sí a ser dividido en lecciones para las tareas diarias. El estudio de cada asunto va seguido usualmente de uno o más ejemplos y de un conjunto de ejercicios relacionados con la teoría explicada.

Queremos ahora llamar la atención sobre algunas características especiales del libro. El estudio de la Geometría analítica no alcanza uno de sus principales objetivos si no da un análisis completo de cualquiera investigación particular que se trate. El ser conciso en la presentación no se justifica ciertamente si una conclusión está basada en la discusión de uno o varios casos posibles. Es por esto que la investigación de cada cuestión se ha hecho tan completa como ha sido posible, y los casos excepcionales no han sido considerados. Algunos ejemplos de esto pueden verse en la discusión de las posiciones relativas de dos rectas (Art. 30), la determinación de la distancia de una recta a un punto dado (Art. 33) y el estudio de las familias o haces de circunferencias (Art. 42).

Otra particularidad de esta obra es el dar en forma de tabla o cuadro sinóptico, un resumen de fórmulas y resultados estrechamente relacionados. Una larga experiencia ha convencido al autor de que para los estudiantes es una gran ayuda el uso de tales resúmenes.

Se observará que se han introducido varios términos nuevos. Por ejemplo el *eje focal* y el *eje normal* para las secciones cónicas (Art. 60), el nombre *indicador* para el invariante $B^2 - 4AC$ de la ecuación general de segundo grado con dos variables (Art. 74) y el término *par principal* de coordenadas polares (Art. 80). Creemos que el uso de estos términos y el de los paréntesis rectangulares para encerrar los números directores de una recta en el espacio (Art. 111) es muy conveniente.

El desarrollo de la Geometría analítica del espacio es considerablemente más completo que el que aparece en la mayoría de los libros de texto. Un buen fundamento en Geometría analítica del espacio es de gran valor para estudios posteriores de Matemáticas. Por ejemplo, un estudio razonado de intersección de superficies y curvas en el espacio será una gran ayuda para la comprensión de muchos temas de Cálculo infinitesimal. Creemos, también, que se ha incluído suficiente material para que el libro pueda ser fácilmente adaptado a un curso de Geometría analítica del espacio.

Como es deseable que el estudiante enfoque su atención sobre un mínimo de conceptos a la vez, se han agrupado los temas semejantes en artículos y capítulos individuales. Esto evita las desventajas de la distracción causada por la dipersión de los temas en todo el libro. Por

ejemplo, toda la parte fundamental sobre coordenadas polares está contenida en un solo capítulo. Esta concentración de material hace que el libro sea más útil para consulta aun después que el estudiante haya terminado su curso de Geometría analítica y esté dedicado a estudios más avanzados.

El libro contiene suficiente materia para un curso semestral de cinco horas por semana pero es fácilmente adaptable a cursos más cortos. El maestro puede también omitir ciertas partes de Geometría analítica del espacio y ver solamente aquellas indispensables para estudiar Cálculo infinitesimal.

Se ha dado especial atención a los ejercicios, de los cuales hay 1920 ordenados en 71 grupos. Esto es mucho más de lo que normalmente resuelven los alumnos en un curso, pero permite una variación de tareas de año a año. Al final del libro se dan las soluciones a la mayoría de estos ejercicios. Además hay 134 ejemplos resueltos completamente.

Se incluyen dos apéndices. El primero consiste en una lista resumen de fórmulas, definiciones y teoremas, de Geometría elemental, Algebra y Trigonometría plana. El segundo apéndice consiste en una serie de tablas numéricas para ser usadas en los cálculos.

El autor desea expresar a su amigo y colega el profesor F. H. Miller su sincera gratitud por el constante estímulo y valiosa cooeperación en la realización de su tarea. El profesor Miller ha leído el manuscrito completo cuidadosamente y ha contribuído mucho al valor del libro por sus útiles sugestiones y crítica constructiva.

CHARLES H. LEHMANN

INDICE

GEOMETRIA ANALITICA PLANA

CAPITULO PRIMERO

SISTEMAS DE COORDENADAS

Artículo		Página
1.	Introducción	1
2.	Segmento rectilíneo dirigido	1
3.	Sistema coordenado lineal	3
4.	Sistema coordenado en el plano	5
5.	Carácter de la Geometría analítica	10
6.	Distancia entre dos puntos dados	11
7.	División de un segmento en una razón dada	12
8.	Pendiente de una recta	16
9.	Significado de la frase ''condición necesaria y suficiente''	19
10.	Angulo de dos rectas	20
11.	Demostración de teoremas geométricos por el método analítico	25
12.	Resumen de fórmulas	30

CAPITULO II

GRAFICA DE UNA ECUACION Y LUGARES GEOMETRICOS

13.	Dos problemas fundamentales de la Geometría analítica	32
14.	Primer problema fundamental. Gráfica de una ecuación	32
15.	Intercepciones con los ejes	34
16.	Simetría	35
17.	Extensión de una curva	39
18.	Asíntotas	41
19.	Construcción de curvas	43
20.	Ecuaciones factorizables	47
21.	Intersecciones de curvas	47
22.	Segundo problema fundamental	49
23.	Ecuación de un lugar geométrico	50

CAPITULO III

LA LINEA RECTA

Artículo		Página
24.	Introducción	56
25.	Definición de línea recta	56
26.	Ecuación de una recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada	57
27.	Otras formas de la ecuación de la recta	59
28.	Forma general de la ecuación de una recta	65
29.	Discusión de la forma general	66
30.	Posiciones relativas de dos rectas	67
31.	Forma normal de la ecuación de la recta	72
32.	Reducción de la forma general de la ecuación de una recta a la forma normal	75
33.	Aplicaciones de la forma normal	78
34.	Area de un triángulo	86
35.	Ecuación de la recta que pasa por dos puntos, en forma de determinante	88
36.	Familias de líneas rectas	90
37.	Resumen de resultados	96

CAPITULO IV

ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA

38.	Introducción	99
39.	Ecuación de la circunferencia; forma ordinaria	99
40.	Forma general de la ecuación de la circunferencia	103
41.	Determinación de una circunferencia sujeta a tres condiciones dadas.	106
42.	Familias de circunferencias	110
43.	Eje radical	114
44.	Tangente a una curva	120
45.	Tangente a una circunferencia	125
46.	Teoremas y problemas de lugares geométricos relativos a la circunferencia	129

CAPITULO V

TRANSFORMACION DE COORDENADAS

47.	Introducción	133
48.	Transformaciones	133
49.	Transformación de coordenadas	133
50.	Traslación de los ejes coordenados	135
51.	Rotación de los ejes coordenados	139
52.	Simplificación de ecuaciones por transformación de coordenadas	143

CAPITULO VI

LA PARABOLA

53.	Introducción	149
54.	Definiciones	149
55.	Ecuación de la parábola de vértice en el origen y eje un eje coordenado	150

Artículo Página

56. Ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje paralelo a un eje coordenado 154
57. Ecuación de la tangente a una parábola 161
58. La función cuadrática 164
59. Algunas aplicaciones de la parábola 167

CAPITULO VII

LA ELIPSE

60. Definiciones 173
61. Ecuación de la elipse de centro en el origen y ejes de coordenadas los ejes de la elipse 174
62. Ecuación de la elipse de centro (h, k) y ejes paralelos a los coordenados 180
63. Propiedades de la elipse 186

CAPITULO VIII

LA HIPERBOLA

64. Definiciones 191
65. Primera ecuación ordinaria de la hipérbola 192
66. Asíntotas de la hipérbola 198
67. Hipérbola equilátera o rectangular 200
68. Hipérbolas conjugadas 201
69. Segunda ecuación ordinaria de la hipérbola 203
70. Propiedades de la hipérbola 207
71. Primer resumen relativo a las secciones cónicas 210

CAPITULO IX

ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO

72. Introducción 212
73. Transformación de la ecuación general por rotación de los ejes coordenados 212
74. El indicador $I = B^2 - 4AC$ 215
75. Definición general de cónica 220
76. Tangente a la cónica general 226
77. Sistemas de cónicas 227
78. Secciones planas de un cono circular recto 233

CAPITULO X

COORDENADAS POLARES

79. Introducción 237
80. Sistema de coordenadas polares 237
81. Paso de coordenadas polares a rectangulares y viceversa 239
82. Trazado de curvas en coordenadas polares 244
83. Intersecciones de curvas dadas en coordenadas polares 249

Artículo — Página

84. Fórmula de la distancia entre dos puntos en coordenadas polares 251
85. Ecuación de la recta en coordenadas polares.............................. 253
86. Ecuación de la circunferencia en coordenadas polares.................. 254
87. Ecuación general de las cónicas en coordenadas polares................ 256
88. Problemas relativos a lugares geométricos en coordenadas polares.... 261

CAPITULO XI

ECUACIONES PARAMETRICAS

89. Introducción.. 264
90. Obtención de la ecuación rectangular de una curva a partir de su representación paramétrica.. 266
91. Gráfica de una curva a partir de su representación paramétrica........ 267
92. Representación paramétrica de las cónicas.................................. 269
93. La cicloide 272
94. Epicicloide e hipocicloide 274
95. Resolución de problemas de lugares geométricos por el método paramétrico.. 279

CAPITULO XII

CURVAS PLANAS DE GRADO SUPERIOR

96. Clasificación de funciones.. 285
97. Clasificación de las curvas planas 286
98. Algunas curvas planas algebraicas de grado superior 287
99. Tres famosos problemas de la antigüedad 291
100. La sinusoide.. 295
101. Otras curvas trigonométricas 298
102. Gráficas de las funciones trigonométricas inversas..................... 300
103. Curva logarítmica.. 304
104. Curva exponencial.. 306
105. Curvas compuestas... 309

GEOMETRIA ANALITICA DEL ESPACIO

CAPITULO XIII

EL PUNTO EN EL ESPACIO

106. Introducción.. 317
107. Sistemas de coordenadas rectangulares en el espacio 318
108. Distancia entre dos puntos dados en el espacio 321
109. División de un segmento en el espacio en una razón dada 323
110. Cosenos directores de una recta en el espacio........................... 327
111. Números directores de una recta en el espacio.......................... 331
112. Angulo formado por dos rectas dirigidas en el espacio 333
113. Números directores de una recta perpendicular a dos dadas 337

CAPITULO XIV

EL PLANO

Artículo — Página

114. Introducción.......... 341
115. Forma general de la ecuación del plano.......... 341
116. Discusión de la forma general.......... 344
117. Otras formas de la ecuación del plano.......... 348
118. Posiciones relativas de dos planos.......... 350
119. Forma normal de la ecuación del plano.......... 356
120. Aplicaciones de la forma normal.......... 359
121. Familias de planos.......... 366

CAPITULO XV

LA RECTA EN EL ESPACIO

122. Introducción.......... 371
123. Forma general de las ecuaciones de la recta.......... 371
124. Forma simétrica de las ecuaciones de la recta; ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos, y ecuaciones paramétricas de la recta.......... 372
125. Planos proyectantes de una recta.......... 377
126. Reducción de la forma general a la forma simétrica.......... 380
127. Posiciones de una recta y un plano.......... 383

CAPITULO XVI

SUPERFICIES

128. Introducción.......... 389
129. Discusión de la ecuación de una superficie.......... 390
130. Construcción de una superficie.......... 392
131. Ecuación de la superficie esférica.......... 395
132. Coordenadas esféricas.......... 396
133. Ecuación de una superficie cilíndrica.......... 400
134. Coordenadas cilíndricas.......... 403
135. Ecuación de una superficie cónica.......... 406
136. Superficies de revolución.......... 411
137. Superficies regladas.......... 416
138. Transformación de coordenadas rectangulares en el espacio.......... 419
139. Ecuación general de segundo grado con tres variables.......... 425
140. Cuádricas con centro.......... 426
141. Cuádricas sin centro.......... 433

CAPITULO XVII

CURVAS EN EL ESPACIO

142. Introducción.......... 440
143. Curvas planas en el espacio.......... 441
144. Curva de intersección de las superficies de dos cilindros rectos.......... 443
145. Cilindros proyectantes de una curva del espacio.......... 444

Artículo | Página

146. Construcción de las curvas del espacio 446
147. Ecuaciones paramétricas de una curva del espacio 448
148. Construcción de volúmenes 451

APENDICE I

RESUMEN DE FORMULAS, DEFINICIONES Y TEOREMAS

A. Geometría 456
B. Algebra 457
C. Trigonometría 459
D. Alfabeto griego 462

APENDICE II

TABLAS

A. Logaritmos comunes 464
B. Funciones trigonométricas naturales 466
C. Valores de e^x y e^{-x} 468
D. Potencias y raíces de enteros 468

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS 469

INDICE ALFABETICO 489



GEOMETRIA ANALITICA PLANA

CAPITULO PRIMERO

SISTEMAS DE COORDENADAS

1. Introducción. El objeto de este capítulo es presentar algunos de los conceptos fundamentales de la Geometría analítica plana. Estos conceptos son fundamentales en el sentido de que constituyen la base del estudio de la Geometría analítica. En particular, se hará notar cómo se generalizan muchas de las nociones de la Geometría elemental por los métodos de la Geometría analítica. Esto se ilustrará con aplicaciones a las propiedades de las líneas rectas y de las figuras rectilíneas.

2. Segmento rectilíneo dirigido. La porción de una línea recta comprendida entre dos de sus puntos se llama *segmento rectilíneo* o simplemente *segmento*. Los dos puntos se llaman *extremos* del seg-

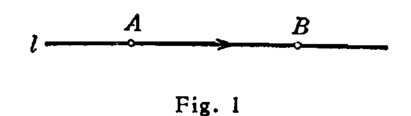


Fig. 1

mento. Así, en la figura 1, para la recta l, AB es un segmento cuyos extremos son A y B. La *longitud* del segmento AB se representa por $\overline{AB}$.

El lector ya está familiarizado con el concepto geométrico de segmento rectilíneo. Para los fines de la Geometría analítica añadiremos, al concepto geométrico de segmento, la idea de *sentido* o *dirección*. Desde este punto de vista consideramos que el segmento AB es generado por un punto que se mueve a lo largo de la recta l de A hacia B. Decimos entonces que el segmento AB está *dirigido* de A a B, e indicamos esto por medio de una flecha como en la figura 1. En este caso, el punto A se llama *origen* o *punto inicial* y el punto B *extremo* o *punto final*. Podemos también obtener el mismo segmento

dirigiéndolo de B a A; entonces B es el origen y A el extremo, y el segmento se designa por BA. El sentido de un segmento dirigido se indica siempre escribiendo primero el origen o punto inicial.

Desde el punto de vista de la Geometría elemental, las longitudes de los segmentos dirigidos, AB y BA, son las mismas. En Geometría analítica, sin embargo, se hace una distinción entre los *signos* de estas longitudes. Así, especificamos, arbitrariamente, que un segmento dirigido en un sentido será considerado de longitud *positiva*, mientras que otro, dirigido en sentido opuesto, será considerado como un segmento de longitud *negativa*. De acuerdo con esto, si especificamos que el segmento dirigido AB tiene una longitud positiva, entonces el segmento dirigido BA tiene una longitud negativa, y escribimos

$$\overline{AB} = -\overline{BA}. \tag{1}$$

Consideremos ahora tres puntos distintos A, B y C sobre una línea recta cuya dirección positiva es de izquierda a derecha. Hay

Fig. 2

$3! = 6$ ordenaciones posibles de estos puntos, como se muestra en la figura 2. Considerando solamente segmentos dirigidos de longitudes positivas, tenemos las seis relaciones siguientes correspondientes a estas ordenaciones:

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}, \tag{a}$$

$$\overline{CA} + \overline{AB} = \overline{CB}, \tag{b}$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \tag{c}$$

$$\overline{BC} + \overline{CA} = \overline{BA}, \tag{d}$$

$$\overline{CB} + \overline{BA} = \overline{CA}, \tag{e}$$

$$\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}. \tag{f}$$

Demostraremos en seguida que todas estas relaciones están incluídas en la *relación fundamental:*

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}. \tag{2}$$

En efecto, por (1), $\overline{CB} = -\overline{BC}$, de manera que la relación (a) puede escribirse

$$\overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AB},$$

de donde, pasando $-\overline{BC}$ al segundo miembro, obtenemos (2). Análogamente, por ser $\overline{CA} = -\overline{AC}$ y $\overline{CB} = -\overline{BC}$ por (1), la relación (b) se convierte en

$$-\overline{AC} + \overline{AB} = -\overline{BC},$$

en donde, por transposición, obtenemos también (2). La relación (c) está ya en la forma (2). Como anteriormente, usando (1), vemos que (d), (e) y (f) se reducen cada una a (2).

3. Sistema coordenado lineal. En el Artículo anterior hemos introducido los conceptos de dirección y signo con respecto a los segmentos rectilíneos. Ahora vamos a dar un paso más introduciendo la idea de correspondencia entre un punto geométrico y un número

X' — P' (x') — P_2 (x_2) — O (0) — A (1) — P_1 (x_1) — P (x) → X

Fig. 3

real. Consideremos (fig. 3) una recta $X'X$ cuya dirección positiva es de izquierda a derecha, y sea O un punto fijo sobre esta línea. Tomemos una longitud conveniente como unidad de medida; si A es un punto de $X'X$ distinto de O y situado a su derecha, la longitud $\overline{OA}$ puede considerarse como unidad de longitud. Si P es un punto cualquiera de $X'X$ situado a la *derecha* de O y tal que el segmento dirigido OP, de longitud *positiva*, contiene x veces a la unidad adoptada de longitud, entonces diremos que el punto P *corresponde* al número *positivo* x. Análogamente, si P' es un punto cualquiera de $X'X$ situado a la *izquierda* de O y tal que el segmento dirigido OP' tenga una longitud *negativa* de x' unidades, entonces diremos que el punto P' *corresponde* al número *negativo* x'. De esta manera, cualquier número real x puede representarse por un punto P sobre la recta $X'X$. Y recíprocamente, cualquier punto dado P situado sobre la recta $X'X$ representa un número real x, cuyo valor numérico es igual a la longitud del segmento OP y cuyo signo es positivo o negativo según que P esté a la derecha o a la izquierda de O.

De acuerdo con esto, hemos construído un esquema por medio del cual se establece una correspondencia biunívoca entre puntos de una

recta y los números reales. Tal esquema se llama un *sistema coordenado*. En el caso particular considerado, como todos los puntos están sobre la misma recta, el sistema se llama *sistema unidimensional* o *sistema coordenado lineal*. Refiriéndonos a la figura 3, la recta $X'X$ se llama *eje* y el punto O es el *origen* del sistema coordenado lineal. El número real x correspondiente al punto P se llama *coordenada* del punto P y se representa por (x). Evidentemente, de acuerdo con las convenciones adoptadas, el origen O tiene por coordenada (0) y el punto A tiene por coordenada (1). El punto P con su coordenada (x) es la *representación geométrica* o *gráfica* del número real x, y la coordenada (x) es la *representación analítica* del punto P. Ordinariamente escribiremos el punto P y su coordenada juntos, tal como sigue: $P(x)$.

Es importante hacer notar que la correspondencia establecida por el sistema coordenado lineal es *única*. Es decir, a cada número corresponde uno y solamente un punto sobre el eje, y a cada punto del eje correspode uno y solamente un número real.

Vamos a determinar ahora la longitud del segmento que une dos puntos dados cualesquiera, tales como $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ de la figura 3. En Geometría analítica, se dice que los puntos están dados cuando se conocen sus coordenadas. Por tanto, x_1 y x_2 son números conocidos. Por la relación (2) del Artículo 2, tenemos:

$$\overline{OP_1} + \overline{P_1P_2} = \overline{OP_2}.$$

Pero, $\overline{OP_1} = x_1$ y $\overline{OP_2} = x_2$. Luego,

$$x_1 + \overline{P_1P_2} = x_2,$$

de donde,

$$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1.$$

La longitud del segmento dirigido $\overline{P_2P_1}$, obtenida de $\overline{P_1P_2}$ por medio de la relación (1) del Artículo 2, es

$$\overline{P_2P_1} = x_1 - x_2.$$

En cualquier caso, la longitud de un segmento dirigido se obtiene restando la coordenada del punto inicial de la coordenada del punto final. Este resultado se enuncia como sigue:

TEOREMA 1. *En un sistema coordenado lineal, la longitud del segmento dirigido que une dos puntos dados se obtiene, en magnitud y signo, restando la coordenada del origen de la coordenada del extremo.*

La *distancia* entre dos puntos se define como el valor numérico o valor *absoluto* de la longitud del segmento rectilíneo que une esos dos puntos. Si representamos la distancia por d, podemos escribir:

$$d = |\overline{P_1 P_2}| = |x_2 - x_1|,$$

o también,

$$d = |\overline{P_2 P_1}| = |x_1 - x_2|.$$

Ejemplo. Hallar la distancia entre los puntos $P_1(5)$ y $P_2(-3)$.

Solución. Por el teorema 1, las longitudes de los segmentos dirigidos son

$$\overline{P_1 P_2} = -3 - 5 = -8$$

y

$$\overline{P_2 P_1} = 5 - (-3) = 8$$

Entonces, para *cualquiera* de los dos segmentos dirigidos, la distancia está dada por

$$d = |-8| = |8| = 8.$$

4. Sistema coordenado en el plano. En un sistema coordenado lineal, cuyos puntos están restringidos a estar sobre una recta, el eje, es evidente que estamos extremadamente limitados en nuestra investigación analítica de propiedades geométricas. Así, por ejemplo, es imposible estudiar las propiedades de los puntos de una circunferencia. Para extender la utilidad del método analítico, consideraremos ahora un sistema coordenado en el cual un punto puede moverse en todas direcciones manteniéndose siempre en un plano. Este se llama *sistema coordenado-bidimensional* o *plano*, y es el sistema coordenado usado en la Geometría analítica plana.

El primer ejemplo que estudiaremos de uno de estos sistemas, y, además, el más importante, es el *sistema coordenado rectangular*, familiar al estudiante desde su estudio previo de Algebra y Trigonometría. Este sistema, indicado en la figura 4, consta de dos rectas dirigidas $X'X$ y $Y'Y$, llamadas *ejes de coordenadas*, perpendiculares entre sí. La recta $X'X$ se llama *eje X;* $Y'Y$ es el *eje Y;* y su punto de intersección O, el *origen*. Estos ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes* numerados tal como se indica en la figura 4. La dirección positiva del eje X es hacia la derecha; la dirección positiva del eje Y, hacia arriba.

Todo punto P del plano puede localizarse por medio del sistema rectangular. En efecto, se traza PA perpendicular al eje X y PB perpendicular al eje Y. La longitud del segmento dirigido OA se representa por x y se llama *abscisa* de P; la longitud del segmento dirigido OB se representa por y y se llama *ordenada* de P. Los dos

números reales, x y y, se llaman *coordenadas* de P y se representan por (x, y). Las abscisas medidas sobre el eje X a la derecha de O son positivas y a la izquierda son negativas; las ordenadas medidas sobre Y arriba de O son positivas y abajo son negativas. Los signos de las coordenadas en los cuatro cuadrantes están indicados en la figura 4.

Es evidente que a cada punto P del plano coordenado le corresponden uno y solamente un par de coordenadas (x, y). Recíprocamente, un par de coordenadas (x, y) cualesquiera determina uno y solamente un punto en el plano coordenado.

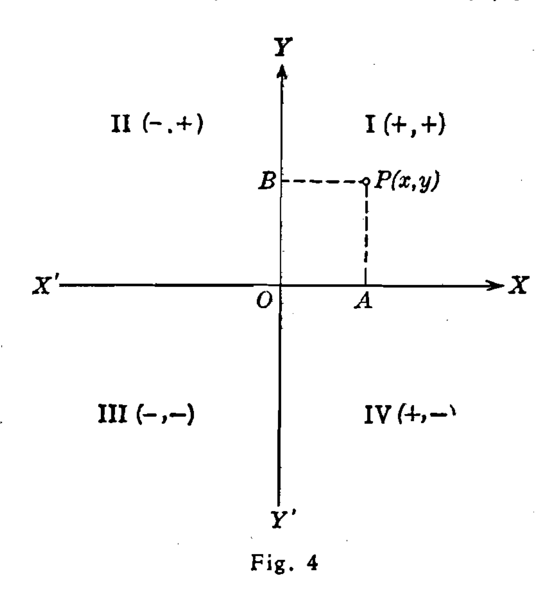


Fig. 4

Dadas las coordenadas (x, y), $x \neq y$, quedan determinados dos puntos, uno de coordenadas (x, y) y otro de coordenadas (y, x) que son diferentes. De aquí que sea importante escribir las coordenades en su propio orden, escribiendo la abscisa en el primer lugar y la ordenada en el segundo. Por esta razón un par de coordenadas en el plano se llama un par *ordenado* de números reales. En vista de nuestra discusión anterior, podemos decir que *el sistema coordenado rectangular en el plano establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del plano y un par ordenado de números reales*.

La localización de un punto por medio de sus coordenadas se llama *trazado* del punto. Por ejemplo, para trazar el punto $(-5, -6)$, señalaremos primero el punto A, sobre el eje X, que está 5 unidades a la izquierda de O; después, a partir de A, sobre una paralela al

eje Y, mediremos seis unidades hacia abajo del eje X, obteniendo así al punto $P(-5, -6)$. La construcción está indicada en la figura 5, en la que se han trazado también los puntos $(2, 6)$, $(-6, 4)$ y $(4, -2)$.

El trazado de los puntos se facilita notablemente usando papel coordenado rectangular, dividido en cuadrados iguales por rectas paralelas a los ejes coordenados. La figura 5 es un modelo de papel

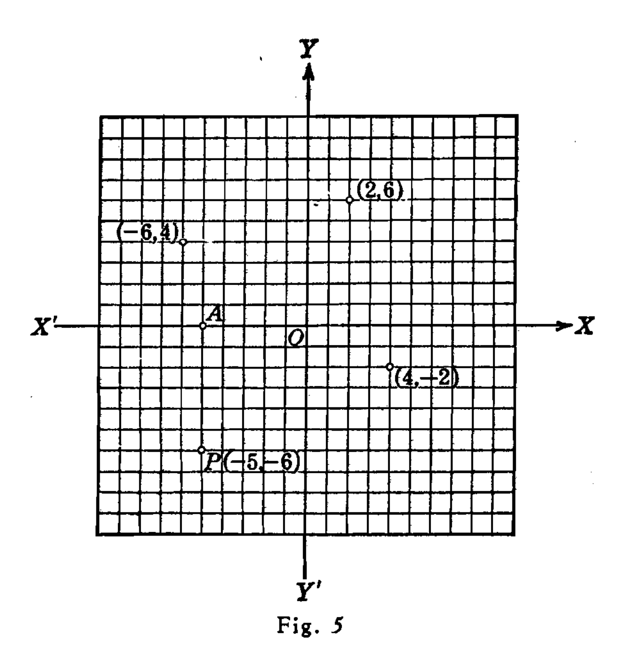


Fig. 5

de esta clase. Se recomienda al estudiante el empleo de papel coordenado milimetrado cuando se requiera un trazado de gran exactitud.

Si consideramos solamente aquellos puntos cuyas ordenadas son cero, veremos que todos ellos están sobre el eje X, y el sistema coordenado plano se reduce al sistema coordenado lineal. Por lo tanto, el sistema coordenado lineal es, simplemente, un caso especial del sistema plano.

Otro sistema plano que tendremos ocasión de usar es el *sistema de coordenadas polares*. Las coordenadas polares se estudiarán más adelante en un capítulo especial.

El lector deberá observar que en los sistemas coordenados que han sido estudiados, se establece una correspondencia entre los puntos y el conjunto de los números *reales*. No se ha hecho mención de los números *complejos* del Algebra. Como nuestros sistemas coordenados no

especifican nada para los números complejos, no consideraremos tales números en nuestro estudio de la Geometría analítica.

Ejemplo. Un triángulo equilátero OAB cuyo lado tiene una longitud a está colocado de tal manera que el vértice O está en el origen, el vértice A está sobre el eje de las X y a la derecha de O, y el vértice B está arriba del eje X. Hallar las coordenadas de los vértices A y B y el área del triángulo.

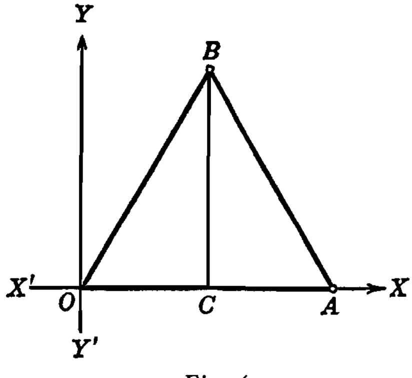


Fig. 6

Solución. Con referencia a los ejes coordenados, el triángulo está en la posición indicada en la figura 6. Como $\overline{OA} = a$, la abscisa del punto A es a. También, por estar A sobre el eje de las X, su ordenada es 0. Por tanto, las coordenadas del vértice A son $(a, 0)$.

Si trazamos la altura BC, perpendicular al lado OA, sabemos, por la Geometría elemental, que C es el punto medio de OA. Por tanto, la abscisa de C es $\frac{a}{2}$. Como BC es paralela al eje Y, la abscisa del punto B es también $\frac{a}{2}$. La ordenada de B se obtiene ahora muy fácilmente por el teorema de Pitágoras; dicha ordenada es

$$BC = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{CA}^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Las coordenadas del vértice B son, pues, $\left(\frac{a}{2}, \ \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

El área del triángulo (Apéndice IA, 1) es

$$K = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

EJERCICIOS. Grupo 1

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Si A y B son dos puntos diferentes de una recta dirigida, demostrar que $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$ y $\overline{AA} = \overline{BB} = 0$.

2. Demostrar que las relaciones (d), (e) y (f) son casos particulares de la relación (2) del Artículo 2.

3. Si A, B, C y D son cuatro puntos distintos cualesquiera de una recta dirigida, demostrar que, para todas las ordenaciones posibles de estos puntos sobre la recta, se verifica la igualdad

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}.$$

4. Hallar la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son: (-5) y (6); (3) y (-7); (-8) y (-12).

5. La distancia entre dos puntos es 9. Si uno de los puntos es (-2), hallar el otro punto. (Dos casos.)

6. En un sistema coordenado lineal, $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ son los puntos extremos dados de un segmento dirigido. Demostrar que la coordenada (x) de un punto P que divide a P_1P_2 en la razón dada $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ es

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad r \neq -1.$$

7. Haciendo $r = 1$ en la fórmula obtenida en el ejercicio 6, demostrar que la coordenada del punto medio de un segmento rectilíneo es la media aritmética de las coordenadas de sus puntos extremos.

8. Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento dirigido cuyos extremos son los puntos (-7) y (-19).

9. Un extremo de un segmento dirigido es el punto (-8) y su punto medio es (3). Hallar la coordenada del otro extremo.

10. Los extremos de un segmento dirigido son los puntos $P_1(4)$ y $P_2(-2)$. Hallar la razón $\overline{P_2P} : \overline{PP_1}$ en que el punto $P(7)$ divide a este segmento.

11. Un cuadrado, de lado igual a $2a$, tiene su centro en el origen y sus lados son paralelos a los ejes coordenados, Hallar las coordenadas de sus cuatro vértices.

12. Tres vértices de un rectángulo son los puntos $(2, -1)$, $(7, -1)$ y $(7, 3)$. Hallar el cuarto vértice y el área del rectángulo.

13. Los vértices de un triángulo rectángulo son los puntos $(1, -2)$, $(4, -2)$, $(4, 2)$. Determinar las longitudes de los catetos. y después calcular el área del triángulo y la longitud de la hipotenusa.

14. En el triángulo rectángulo del ejercicio 13, determinar primero los puntos medios de los catetos y, después, el punto medio de la hipotenusa.

15. Hallar la distancia del origen al punto (a, b).

16. Hallar la distancia entre los puntos $(6, 0)$ y $(0, -8)$.

17. Los vértices de un cuadrilátero son los puntos $(1, 3)$, $(7, 3)$, $(9, 8)$ y $(3, 8)$. Demostrar que el cuadrilátero es un paralelogramo y calcular su área.

18. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 1)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice. (Dos casos.)

19. Demostrar que los puntos $(-5, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, -2)$ son los vértices de un triángulo isósceles, y calcular su área.

20. Demostrar que los puntos $(0, 0)$, $(3, 4)$, $(8, 4)$ y $(5, 0)$ son los vértices de un rombo, y calcular su área.

5. Carácter de la Geometría analítica. La Geometría elemental, conocida ya del lector, se llama Geometría *pura* para distinguirla del presente estudio. Acabamos de ver que por medio de un sistema coordenado es posible obtener una correspondencia biunívoca entre puntos y números reales. Esto, como veremos, nos permitirá aplicar los métodos del Análisis a la Geometría, y de ahí el nombre de *Geometría analítica*. Al ir avanzando en nuestro estudio veremos, por ejemplo, cómo pueden usarse, ventajosamente, los métodos algebraicos en la resolución de problemas geométricos. Recíprocamente, los métodos de la Geometría analítica pueden usarse para obtener una representación geométrica de las ecuaciones y de las relaciones funcionales.

[redacted] de sistema coordenado, que caracteriza a la Geometría analítica, fué introducido por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes (1596-1650). Por esta razón, la Geometría analítica se conoce también con el nombre de *Geometría cartesiana*. Por la parte que toma en la unificación de las diversas ramas de las matemáticas, la introducción de la Geometría analítica representa uno de los adelantos más importantes en el desarrollo de las matemáticas.

En Geometría pura, el estudiante recordará que, generalmente, era necesario aplicar un método especial o un artificio, a la solución de cada problema; en Geometría analítica, por el contrario, una gran variedad de problemas se pueden resolver muy fácilmente por medio de un procedimiento uniforme asociado con el uso de un sistema coordenado. El estudiante debe tener siempre presente que está siguiendo un curso de Geometría *analítica* y que la solución de un problema geométrico no se ha efectuado por Geometría *analítica* si no se ha empleado un sistema coordenado. Según esto, un buen plan para comenzar la solución de un problema es trazar un sistema de ejes coordenados propiamente designados. Esto es de particular importancia en los primeros pasos de la Geometría analítica, porque un defecto muy común del principiante es que si el problema que trata de resolver se le dificulta, está propenso a caer en los métodos de la Geometría pura. El estudiante deberá hacer un esfuerzo para evitar esta tendencia y para adquirir el método y espíritu analítico lo más pronto [redacted]

6. Distancia entre dos puntos dados. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos dados cualesquiera (fig. 7). Vamos a determinar la distancia d entre P_1 y P_2, siendo $d = |\overline{P_1 P_2}|$. Por $P_1 P_2$ tracemos las perpendiculares $P_1 A$ y $P_2 D$ a ambos ejes coordenados, como se indica en la figura, y sea E su punto de intersección. Consideremos el triángulo rectángulo $P_1 E P_2$. Por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$d^2 = \overline{P_1 P_2}^2 = \overline{P_2 E}^2 + \overline{EP_1}^2. \qquad (1)$$

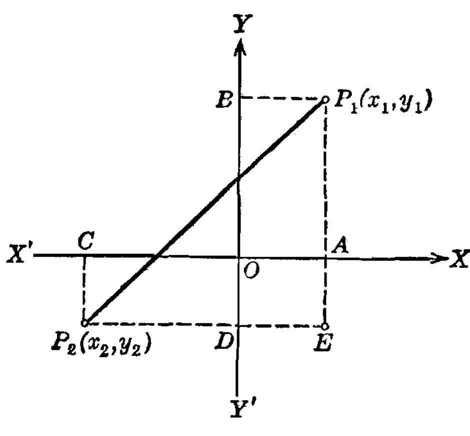


Fig. 7

Las coordenadas de los pies de las perpendiculares a los ejes coordenados son $A(x_1, 0)$, $B(0, y_1)$, $C(x_2, 0)$, $D(0, y_2)$. Luego, por el teorema 1 (Art. 3) tenemos

$$\overline{P_2 E} = \overline{CA} = x_1 - x_2, \quad \overline{EP_1} = \overline{DB} = y_1 - y_2.$$

Sustituyendo estos valores en (1), obtenemos

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

de donde,

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Este resultado se enuncia como sigue:

TEOREMA 2. *La distancia* d *entre dos puntos* $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ *está dada por la fórmula*

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

NOTAS. 1. En la demostración del teorema 2, no se hizo mención de los cuadrantes en que se encuentran los puntos P_1 y P_2. Según esto el resultado del teorema 2 es completamente general e independiente d. la situación de los

puntos P_1 y P_2. La posición de un punto en un cuadrante particular está determinada por los signos de sus coordenadas.

2. La distancia d es *positiva*, siendo P_1P_2 el valor numérico o *absoluto* de la longitud del segmento rectilíneo. Por esta razón no aparece en la fórmula ningún signo delante del radical. Debe entenderse, *por convenio*, que si no aparece ningún signo delante de la raíz cuadrada indicada de una cantidad, *se considera siempre que se trata del valor positivo*. Si se debe tomar la raíz cuadrada negativa, debe aparecer el signo menos delante del radical. Así, el valor positivo de la raíz cuadrada de una cantidad a se expresa por $\sqrt{a}$, el valor negativo por $-\sqrt{a}$, y *ambos* valores, el positivo y el negativo por $\pm\sqrt{a}$.

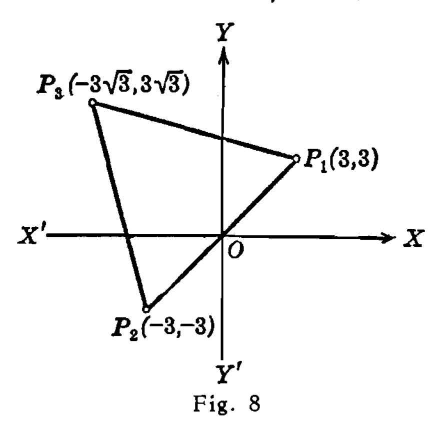


Fig. 8

Ejemplo. Demostrar que los puntos

$$P_1(3,\ 3),\quad P_2(-3,\ -3),\quad P_3(-3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3})$$

son vértices de un triángulo equilátero.

Solución. El triángulo del problema es el indicado en la figura 8. Por el teorema 2, tenemos:

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(3+3)^2 + (3+3)^2} = 6\sqrt{2},$$

$$\begin{aligned}|\overline{P_2P_3}| &= \sqrt{(-3+3\sqrt{3})^2 + (-3-3\sqrt{3})^2}\\ &= \sqrt{(9-18\sqrt{3}+27) + (9+18\sqrt{3}+27)}\\ &= \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2},\end{aligned}$$

$$|\overline{P_3P_1}| = \sqrt{(-3\sqrt{3}-3)^2 + (3\sqrt{3}-3)^2} = 6\sqrt{2}.$$

Luego el triángulo es equilátero, ya que todos sus lados son de igual longitud.

7. División de un segmento en una razón dada.

TEOREMA 3. *Si* $P_1(x_1, y_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2)$ *son los extremos de un segmento* P_1P_2, *las coordenadas* (x, y) *de un punto* P *que divide a este segmento en la razón dada* $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ *son*

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r},\quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r},\quad r \neq -1.$$

DEMOSTRACIÓN. Por los puntos P_1, P, P_2, tracemos perpendiculares a los ejes coordenados, tal como se indica en la figura 9.

Por Geometría elemental, las tres rectas paralelas P_1A_1, PA y P_2A_2 interceptan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y A_1A_2. Por tanto, podemos escribir

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}}. \tag{1}$$

Las coordenadas de los pies de las perpendiculares al eje X son $A_1(x_1, 0)$, $A(x, 0)$, $A_2(x_2, 0)$. Por tanto, por el teorema 1, del Artículo 3, tenemos

$$\overline{A_1A} = x - x_1,$$
$$\overline{AA_2} = x_2 - x.$$

Sustituyendo estos valores en (1), obtenemos

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x},$$

de donde,

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad r \neq -1.$$

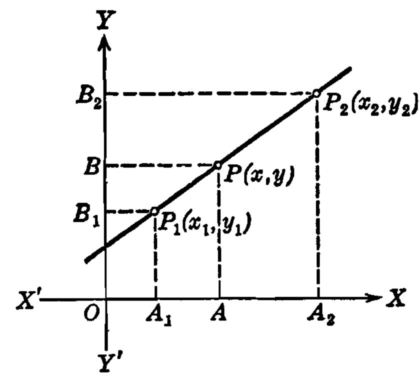


Fig. 9

Por un procedimiento semejante para las ordenadas, obtenemos

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{B_1B}}{\overline{BB_2}} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}, \tag{2}$$

de donde,

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, \quad r \neq -1.$$

En el caso particular en que P es el punto medio del segmento dirigido P_1P_2, es $r = 1$, de manera que los resultados anteriores se reducen a

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Según esto tenemos el siguiente

Corolario. *Las coordenadas del punto medio de un segmento dirigido cuyos puntos extremos son* (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2) *son*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

NOTAS. 1. En Geometría elemental, las relaciones (1) y (2) se escriben sin considerar el signo. En Geometría analítica, en cambio, las razones deben ser consideradas con su signo, ya que estamos tratando con segmentos rectilíneos dirigidos.

2. Al usar las fórmulas del teorema 3, debe cuidarse de que la sustitución de las coordenadas sea correcta. Por esta razón, frecuentemente es preferible no sustituir en estas fórmulas sino escribir directamente los valores de las razones, tal como los dan las fórmulas (1) y (2). Esto se muestra en el ejemplo que damos a continuación.

3. Si el punto de división P es externo al segmento dirigido P_1P_2, la razón r es negativa.

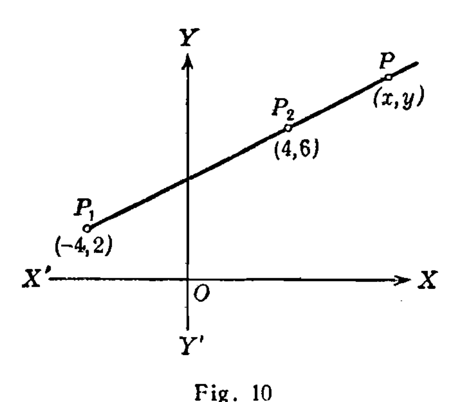


Fig. 10

Ejemplo. Si $P_1(-4, 2)$ y $P_2(4, 6)$ son los puntos extremos del segmento dirigido P_1P_2, hallar las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide a este segmento en la razón $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = -3$.

Solución. Como la razón r es negativa, el punto de división P es externo, tal como se indica en la figura 10. Si aplicamos el teorema 3 directamente, obtenemos

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{-4 + (-3)4}{1 - 3} = 8,$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{2 + (-3)6}{1 - 3} = 8.$$

Si, como se sugiere en la nota 2 anterior, escribimos las razones directamente, obtenemos también

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{x - (-4)}{4 - x} = -3, \text{ de donde, } x = 8;$$

y

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{y - 2}{6 - y} = -3, \text{ de donde, } y = 8.$$

EJERCICIOS. Grupo 2

Dibújese una figura para cada ejercicio.

1. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son $(-3, -1)$, $(0, 3)$, $(3, 4)$, $(4, -1)$.

2. Demostrar que los puntos $(-2, -1)$, $(2, 2)$, $(5, -2)$, son los vértices de un triángulo isósceles.

3. Demostrar que los puntos $(2, -2)$, $(-8, 4)$, $(5, 3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar su área.

4. Demostrar que los tres puntos $(12, 1)$, $(-3, -2)$, $(2, -1)$ son colineales, es decir, que están sobre una misma línea recta.

5. Demostrar que los puntos $(0, 1)$, $(3, 5)$, $(7, 2)$, $(4, -2)$ son los vértices de un cuadrado.

6. Los vértices de un triángulo son $A(3, 8)$, $B(2, -1)$ y $C(6, -1)$. Si D es el punto medio del lado BC, calcular la longitud de la mediana AD.

7. Demostrar que los cuatro puntos $(1, 1)$, $(3, 5)$, $(11, 6)$, $(9, 2)$ son los vértices de un paralelogramo.

8. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(3, -4)$. *Sugestión.* Usese la segunda fórmula del Apéndice IA, 1.

9. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto $(3, -2)$. Si la abscisa del otro extremo es 6 hallar su ordenada. (Dos soluciones.)

10. Determinar la ecuación algebraica que expresa el hecho de que el punto (x, y) equidista de los dos puntos $(-3, 5)$, $(7, -9)$.

11. Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $(-2, 3)$ y $(6, -3)$.

12. Los puntos extremos de un segmento son $P_1(2, 4)$ y $P_2(8, -4)$. Hallar el punto $P(x, y)$ que divide a este segmento en dos partes tales que $\overline{P_2P} : \overline{PP_1} = -2$.

13. Uno de los puntos extremos de un segmento es el punto $(7, 8)$, y su punto medio es $(4, 3)$. Hallar el otro extremo.

14. Los extremos de un segmento son los puntos $P_1(7, 4)$ y $P_2(-1, -4)$. Hallar la razón $\overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ en que el punto $P(1, -2)$ divide al segmento.

15. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $(2, 5)$, $(4, 2)$ y $(1, 1)$. Hallar las coordenadas de los tres vértices.

16. Los vértices de un triángulo son $A(-1, 3)$, $B(3, 5)$ y $C(7, -1)$. Si D es el punto medio del lado AB y E es el punto medio del lado BC, demostrar que la longitud del segmento DE es la mitad de la longitud del lado AC.

17. En el triángulo rectángulo del ejercicio 3, demostrar que el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices.

18. Demostrar que los segmentos que unen los puntos medios de los lados sucesivos del cuadrilátero del ejercicio 1 forman un paralelogramo.

19. Los vértices de un triángulo son $(2, -1)$, $(-4, 7)$, $(8, 0)$. Hallar, para cada una de las medianas, el punto de trisección más cercano al punto medio del lado correspondiente. Demostrar que este punto es el mismo para cada una de las medianas y, por tanto, que las medianas concurren en un punto. Este punto se llama *baricentro* del triángulo.

20. En el triángulo cuyos vértices son (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), demostrar que las coordenadas del baricentro son

$$(\tfrac{1}{3}[x_1 + x_2 + x_3], \ \tfrac{1}{3}[y_1 + y_2 + y_3]).$$

Utilizar este resultado para comprobar el ejercicio 19.

8. Pendiente de una recta. Dos rectas al cortarse forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice (fig. 11). Por tanto, la expresión ''el ángulo comprendido entre dos rectas'' es ambigua, ya

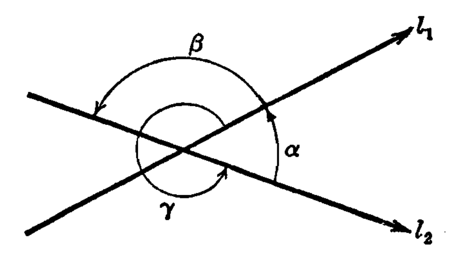


Fig. 11

que tal ángulo puede ser el α o bien su suplemento el β. Para hacer una distinción entre estos dos ángulos, consideramos que las rectas están dirigidas y luego establecemos la siguiente

DEFINICIÓN. Se llama *ángulo de dos rectas dirigidas* al formado por los dos lados que se alejan del vértice.

Así, por ejemplo, según esta definición, el ángulo que forman las rectas dirigidas l_1 y l_2 (fig. 11) es el ángulo α. Sin embargo, si la dirección de una de estas rectas, digamos l_2, se invierte, el ángulo formado por las dos rectas es el ángulo suplementario β.

Si l_1 y l_2 son paralelas, diremos que el ángulo comprendido entre ellas es de $0°$ cuando tienen la misma dirección, y de $180°$ cuando tienen direcciones opuestas.

NOTA. En la figura 11, teniendo las rectas sus direcciones marcadas, el ángulo $\gamma = 360° - \alpha$ también, según la definición 1, es el ángulo de las rectas l_1 y l_2. Este ángulo $\gamma > 180°$ se llama *ángulo cóncavo*. Siempre que hablemos de ángulo de dos rectas, sólo consideraremos ángulos $\leq 180°$.

DEFINICIÓN 2. Se llama *ángulo de inclinación* de una recta el formado por la parte positiva del eje X y la recta, cuando ésta se considera dirigida hacia arriba.

Así, de acuerdo con las definiciones 1 y 2, el ángulo de inclinación de la recta l (fig. 12) es α, y el de l' es α'. Evidentemente, α puede tener cualquier valor comprendido entre 0° y 180°; es decir, su intervalo de variación está dado por

$$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ. \qquad (1)$$

Para la mayor parte de los problemas de Geometría analítica, emplearemos más la tangente del ángulo de inclinación que el ángulo mismo. Según esto:

DEFINICIÓN 3. Se llama *pendiente* o *coeficiente angular* de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación.

La pendiente de una recta se designa comúnmente por la letra m. Por tanto, podemos escribir

$$m = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (2)$$

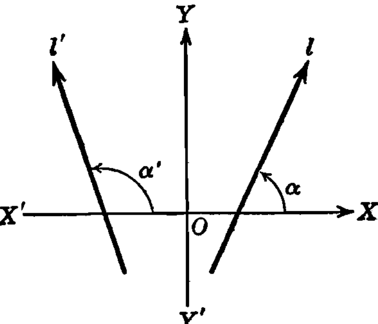


Fig. 12

Por (1) y (2) se ve que la pendiente puede tomar *todos* los valores reales. Si α es agudo, la pendiente es positiva, como para la recta l en la figura 12; si α' es obtuso, como para la recta l', la pendiente es negativa. Cualquier recta que coincida o sea paralela al eje Y será perpendicular al eje X, y su ángulo de inclinación será de 90°. Como $\operatorname{tg} 90^\circ$ no está definida, la pendiente de una recta paralela al eje Y no existe. Podemos establecer, por lo tanto, que *toda recta perpendicular al eje* X *no tiene pendiente*. El estudiante recordará, probablemente, la igualdad $\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$, cuyo significado debe considerar muy cuidadosamente ya que ∞ no es un número. Esta igualdad es una manera simbólica de expresar que, a medida que el ángulo α se aproxima más y más a 90°, $\operatorname{tg} \alpha$ se hace y permanece mayor que cualquier número positivo por grande que se suponga.

TEOREMA 4. *Si* $P_1(x_1, y_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2)$ *son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta, la pendiente de la recta es*

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2. \qquad (3)$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la recta P_1P_2 de la figura 13, determinada por los puntos P_1 y P_2, y sea α su ángulo de inclinación. Por P_1 y P_2 tracemos las perpendiculares P_1A_1 y P_2A_2 al eje X, y por P_2 tracemos una paralela al eje X que corte a P_1A_1 en B. El ángulo $P_1P_2B = \alpha$, y, por Trigonometría, tendremos

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BP_1}}{\overline{P_2B}}. \qquad (4)$$

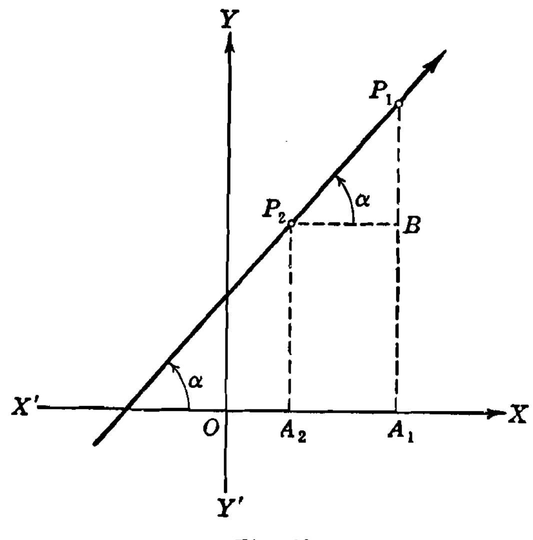


Fig. 13

Las coordenadas de los puntos A_1, A_2 y B son $A_1(x_1, 0)$, $A_2(x_2, 0)$ y $B(x_1, y_2)$. Por tanto, por el teorema 1, Art. 3, tenemos

$$\overline{BP_1} = y_1 - y_2, \quad \overline{P_2B} = \overline{A_2A_1} = x_1 - x_2.$$

Sustituyendo estos valores en (4), obtenemos lo que se quería demostrar.

NOTAS. 1. El valor de m dado por la fórmula (3) no está definido analíticamente para $x_1 = x_2$. En este caso, la interpretación geométrica es que una recta determinada por dos puntos diferentes con abscisas iguales es paralela al eje Y y, por tanto, como se anotó anteriormente, no tiene pendiente.

2. El orden en que se toman las coordenadas en (3) no tiene importancia, ya que $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. El estudiante debe evitar, en cambio, el error muy frecuente de tomar las ordenadas en un orden y las abscisas en el orden contrario, ya que esto cambia el signo de m.

Ejemplo. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos (1, 6), (5, − 2).

Solución. Esta recta se muestra en la figura 14. Por el teorema 4 tenemos, para la pendiente,

$$m = \frac{6-(-2)}{1-5} = \frac{8}{-4} = -2.$$

De la tabla B del Apéndice II tenemos, para ángulo de inclinación,

$$\alpha = \text{arc tg } (-2) = 116^\circ 34'.$$

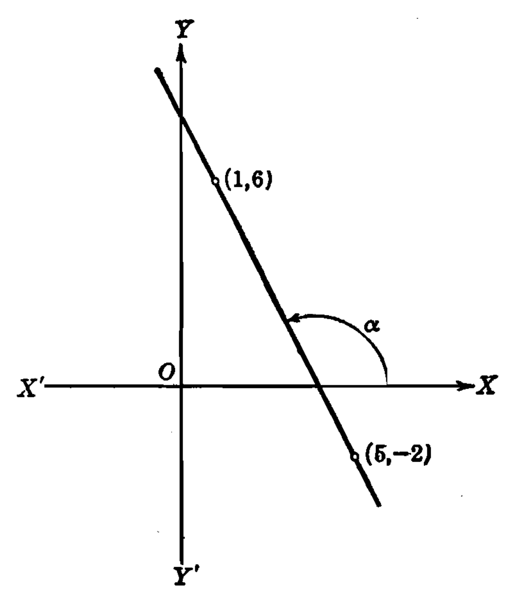


Fig. 14

9. Significado de la frase "condición necesaria y suficiente". En este artículo nos apartaremos momentáneamente de nuestro estudio de la Geometría analítica para considerar el significado de una expresión que se presenta frecuentemente en Matemáticas. La expresión particular a que nos referimos es "una condición necesaria y suficiente". Veamos primero su significado con un ejemplo.

Consideremos el sencillo teorema siguiente de la Geometría elemental:

Si un triángulo es isósceles, los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.

Este teorema establece que si un triángulo es isósceles *necesariamente* se verifica que los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales. Por tanto, podemos decir que la existencia de dos ángulos iguales es una *condición necesaria* para que el triángulo sea isósceles.

Pero el *recíproco* de este teorema también es verdadero, a saber: Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos a estos ángulos son también iguales, y el triángulo es isósceles.

Este teorema establece que la existencia de dos ángulos iguales es *suficiente* para que un triángulo sea isósceles. De ahí deducimos que la existencia de dos ángulos iguales es una *condición suficiente* para que el triángulo sea isósceles.

Podemos entonces combinar ambos teoremas, directo y recíproco, en el siguiente enunciado único:

Una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea isósceles es que dos de sus ángulos sean iguales.

Una frase de uso frecuente en lugar de "una condición necesaria y suficiente" es "*si y solamente si*". Así el enunciado precedente puede escribirse:

Un triángulo es isósceles *si y solamente si* dos de sus ángulos son iguales.

De una manera más general, si la hipótesis A de un teorema implica la verdad de una tesis B, entonces B es una *condición necesaria* para A. Por otra parte, si, recíprocamente, B implica la verdad de A, entonces B es una *condición suficiente* para A

Debemos hacer notar, sin embargo, que una condición puede ser necesaria sin ser suficiente, y viceversa. Por ejemplo, para que un triángulo sea equilátero, es *necesario* que sea isósceles; pero la condición no es suficiente, ya que un triángulo puede ser isósceles sin ser equilátero.

Puede haber más de una condición necesaria y suficiente para la verdad de un teorema. Así, una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea equilátero es que sea equiángulo. Y otra condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea equilátero es la igualdad de sus tres alturas.

A medida que vayamos avanzando en nuestro estudio de la Geometría analítica, tendremos ocasiones frecuentes de deducir condiciones necesarias y suficientes de naturaleza analítica para diversas propiedades geométricas.

10. Angulo de dos rectas. Consideremos (fig. 15) las dos rectas l_1 y l_2. Sea C su punto de intersección y A y B los puntos en que cortan al eje X. Sean θ_1 y θ_2 los dos ángulos suplementarios que forman. Cada uno de estos ángulos, θ_1 y θ_2, se miden, tal como indican las flechas curvadas, en *sentido contrario al de las manecillas de un reloj*, o sea, en *sentido positivo*, como en Trigonometría. La recta a partir de la cual se mide el ángulo se llama *recta inicial;* la recta hacia la cual se dirige el ángulo se llama *recta final*. Las

pendientes de las rectas inicial y final se llaman *pendiente inicial* y *pendiente final*, respectivamente.

Designemos por α_1 el ángulo de inclinación de la recta l_1 y por m_1 la pendiente; para la recta l_2, sean α_2 y m_2 el ángulo de inclinación y la pendiente, respectivamente. Para el ángulo θ_1, la recta inicial es l_1, la pendiente inicial es m_1, la recta final es l_2 y la pendiente final es m_2; para el ángulo θ_2, la recta y la pendiente iniciales, y la

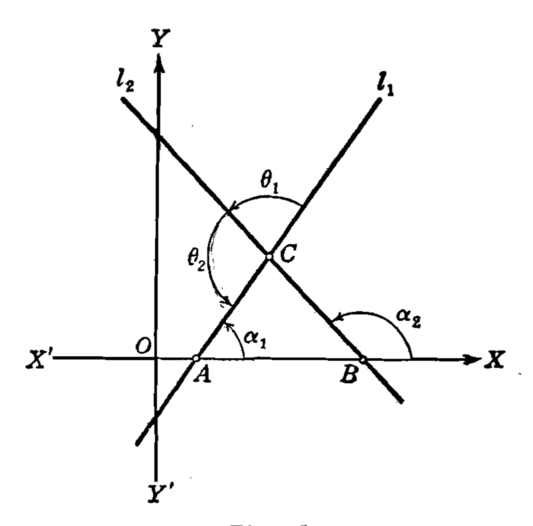


Fig. 15

recta y pendiente finales, están dadas por l_2, m_2, l_1 y m_1, respectivamente. Vamos ahora a calcular cada uno de los ángulos θ_1 y θ_2 cuando se conocen las pendientes m_1 y m_2 de los lados que forman estos ángulos.

Por Geometría elemental, un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos. Por tanto, en el triángulo ABC, siendo θ_1 = ángulo ACB, tendremos:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta_1,$$

o sea,

$$\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1. \tag{1}$$

Tomando las tangentes de ambos miembros de (1), tenemos (Apéndice IC, 6)

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_1}. \tag{2}$$

Pero $m_1 = \text{tg}\,\alpha_1$ y $m_2 = \text{tg}\,\alpha_2$. Luego, de (2),

$$\text{tg}\,\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \qquad (3)$$

Para el triángulo ABC, con θ_2 por ángulo exterior, tenemos

$$\theta_2 = \alpha_1 + (180° - \alpha_2).$$

Tomando tangentes de ambos miembros, obtenemos (Apéndice IC, 6 y 3)

$$\text{tg}\,\theta_2 = \frac{\text{tg}\,\alpha_1 + \text{tg}\,(180° - \alpha_2)}{1 - \text{tg}\,\alpha_1\,\text{tg}\,(180° - \alpha_2)} = \frac{\text{tg}\,\alpha_1 - \text{tg}\,\alpha_2}{1 + \text{tg}\,\alpha_1\,\text{tg}\,\alpha_2},$$

de donde obtenemos el resultado buscado:

$$\text{tg}\,\theta_2 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}. \qquad (4)$$

Comparando (3) y (4), vemos que solamente difieren en el signo, lo cual era de esperarse, ya que θ_1 y θ_2 son ángulos suplementarios. Para calcular un ángulo especificado es esencial saber si se debe usar la fórmula (3) o la (4), es decir, debemos tener la seguridad de que estamos calculando un ángulo particular o su suplemento. Esto se resuelve muy sencillamente si observamos que, en *ambos resultados*, el numerador se obtiene *restando la pendiente inicial de la pendiente final*. De acuerdo con esto tenemos el siguiente

TEOREMA 5. *Un ángulo especificado θ formado por dos rectas está dado por la fórmula*

$$\text{tg}\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \quad m_1 m_2 \neq -1, \qquad (5)$$

en donde m_1 *es la pendiente inicial y* m_2 *la pendiente final correspondiente al ángulo* θ.

NOTA. Si $m_1 m_2 = -1$, $\text{tg}\,\theta$ no está definida por la fórmula (5). Este caso será considerado más adelante en el corolario 2.

Del teorema 5 podemos deducir las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas, conocidas sus pendientes.

En efecto, según vimos en el Artículo 8, si dos rectas son paralelas, el ángulo formado por ellas es 0° ó 180°. En cualquiera de los dos casos, la fórmula (5) se reduce a

$$0 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2},$$

de donde, $m_1 = m_2$; es decir, las pendientes son iguales.

Recíprocamente, si $m_1 = m_2$, (5) se reduce a

$$\operatorname{tg} \theta = 0,$$

de donde se deduce que θ es igual a $0°$ ó $180°$, y, en consecuencia, los rectas son paralelas. Por tanto, de acuerdo con el Artículo 9, una condición necesaria y suficiente para el paralelismo de dos rectas es que sus pendientes sean iguales. De aquí se deduce el siguiente corolario de gran importancia práctica:

COROLARIO 1. La condición necesaria y suficiente para que *dos rectas sean paralelas es que sus pendientes sean iguales*.

Si dos rectas son perpendiculares, el ángulo comprendido entre ellas es de $90°$. En este caso, como no puede usarse la relación (5) para hallar el valor de θ, escribiremos (5) en la forma

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1}. \qquad (6)$$

Como $\operatorname{ctg} 90° = 0$, para que la fracción sea cero debe anularse el numerador, es decir,

$$0 = 1 + m_1 m_2,$$

de donde, $m_1 m_2 = -1$.

Recíprocamente, si $m_1 m_2 = -1$, la fórmula (6) se anula y, por lo tanto,

$$\operatorname{ctg} \theta = 0,$$

de donde, $\theta = 90°$, y las rectas son perpendiculares. Según esto tenemos el

COROLARIO 2. La condición necesaria y suficiente para que *dos rectas sean perpendiculares entre sí, es que el producto de sus pendientes sea igual a* -1.

NOTA. El corolario 2 se enuncia frecuentemente en la siguiente forma equivalente: Dos rectas son perpendiculares entre sí si la pendiente de una de las rectas es recíproca y de signo contrario de la pendiente de la otra recta, o, más brevemente, si las pendientes son negativamente recíprocas.

Ejemplo. Hallar el ángulo agudo del paralelogramo cuyos vértices son $A(-2, 1)$, $B(1, 5)$, $C(10, 7)$ y $D(7, 3)$.

Solución. El primer paso es indicar la dirección positiva del ángulo que se busca que, en este caso, es el ángulo C de la figura 16. Entonces el lado BC da la pendiente inicial m_1 y el lado CD la pendiente final m_2.

Por el teorema 4 del Artículo 8 tenemos para las pendientes

$$m_1 = \frac{7-5}{10-1} = \frac{2}{9}, \quad m_2 = \frac{7-3}{10-7} = \frac{4}{3}.$$

Después, por el teorema 5, tenemos

$$\operatorname{tg} C = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{9}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{9}} = \frac{36 - 6}{27 + 8} = \frac{6}{7},$$

de donde, $C = 40° 36'$.

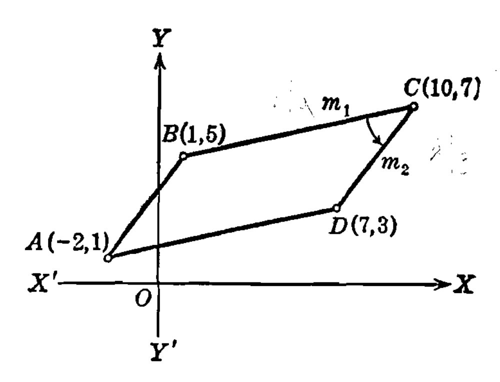


Fig. 16

EJERCICIOS. Grupo 3

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Dígase el ángulo de inclinación de cada una de las siguientes rectas dirigidas: *a*) El eje X. *b*) El eje Y. *c*) Una recta paralela al eje X y dirigida hacia la derecha. *d*) Una recta paralela al eje X v dirigida hacia la izquierda.

2. Dígase la pendiente de cada una de las siguientes rectas dirigidas: *a*) El eje X. *b*) Una recta paralela al eje X y dirigida ya sea a la derecha o a la izquierda. *c*) La recta que pasa por el origen y biseca al cuadrante I. *d*) La recta que pasa por el origen y biseca al cuadrante II

3. Demostrar el teorema 4 del Artículo 8, empleando una figura en la cual el ángulo de inclinación α sea obtuso.

4. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $(-3, 2)$ y $(7, -3)$.

5. Los vértices de un triángulo son los puntos $(2, -2)$, $(-1, 4)$ y $(4, 5)$. Calcular la pendiente de cada uno de sus lados.

6. Demostrar, por medio de pendientes, que los puntos $(9, 2)$, $(11, 6)$, $(3, 5)$ y $(1, 1)$ son vértices de un paralelogramo.

7. Una recta de pendiente 3 pasa por el punto $(3, 2)$. La abscisa de otro punto de la recta es 4. Hallar su ordenada.

8. Una recta de pendiente -2 pasa por el punto $(2, 7)$ y por los puntos A y B. Si la ordenada de A es 3 y la abscisa de B es 6, ¿cuál es la abscisa de A y cuál la ordenada de B?

9. Tres de los vértices de un paralelogramo son $(-1, 4)$, $(1, -1)$ y $(6, 1)$. Si la ordenada del cuarto vértice es 6, ¿cuál es su abscisa?

10. Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos $(-2, 1)$, $(3, 4)$ y $(5, -2)$. Comprobar los resultados.

11. Demostrar que los puntos $(1, 1)$, $(5, 3)$, $(8, 0)$ y $(4, -2)$ son vértices de un paralelogramo, y hallar su ángulo obtuso.

12. Demostrar que los puntos $(1, 1)$, $(5, 3)$ y $(6, -4)$ son vértices de un triángulo isósceles, y hallar uno de los ángulos iguales.

13. Hallar los ángulos del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $(2, 5)$, $(7, 3)$, $(6, 1)$ y $(0, 0)$. Comprobar los resultados.

14. Dos rectas se cortan formando un ángulo de 135°. Sabiendo que la recta final tiene una pendiente de -3, calcular la pendiente de la recta inicial.

15. Dos rectas se cortan formando un ángulo de 45°. La recta inicial pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(9, 7)$ y la recta final pasa por el punto $(3, 9)$ y por el punto A cuya abscisa es -2. Hallar la ordenada de A.

16. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $A(1, -3)$, $B(3, 3)$ y $C(6, -1)$ empleando el seno del ángulo BAC. *Sugestión.* Ver Apéndice IC, 12.

17. Por medio de las pendientes demuéstrese que los tres puntos $(6, -2)$, $(2, 1)$ y $(-2, 4)$ son colineales.

18. Una recta pasa por los dos puntos $(-2, -3)$, $(4, 1)$. Si un punto de abscisa 10 pertenece a la recta, ¿cuál es su ordenada?

19. Hallar la ecuación a la cual debe satisfacer cualquier punto $P(x, y)$ que pertenezca a la recta que pasa por los dos puntos $(2, -1)$, $(7, 3)$.

20. Hallar la ecuación a la cual debe satisfacer cualquier punto $P(x, y)$ que pertenezca a la recta que pasa por el punto $(3, -1)$ y que tiene una pendiente igual a 4.

21. Demostrar que la recta que pasa por los dos puntos $(-2, 5)$ y $(4, 1)$ es perpendicular a la que pasa por los dos puntos $(-1, 1)$ y $(3, 7)$.

22. Una recta l_1 pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(-4, -6)$, y otra recta l_2 pasa por el punto $(-7, 1)$ y el punto A cuya ordenada es -6. Hallar la abscisa del punto A, sabiendo que l_1 es perpendicular a l_2.

23. Demostrar que los tres puntos $(2, 5)$, $(8, -1)$ y $(-2, 1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar sus ángulos agudos.

24. Demostrar que los cuatro puntos $(2, 4)$, $(7, 3)$, $(6, -2)$ y $(1, -1)$ son vértices de un cuadrado y que sus diagonales son perpendiculares y se dividen mutuamente en partes iguales.

25. Demostrar que los cuatro puntos $(2, 2)$, $(5, 6)$, $(9, 9)$ y $(6, 5)$ son vértices de un rombo y que sus diagonales son perpendiculares y se cortan en su punto medio.

11. Demostración de teoremas geométricos por el método analítico. Con los resultados obtenidos en este capítulo es posible demostrar muy fácilmente muchos teoremas de la Geometría elemental por los métodos de la Geometría analítica. El estudiante comprenderá el alcance de la Geometría analítica comparando la demostración analítica de un teorema con la demostración del mismo teorema dada en Geometría elemental.

En relación con la demostración analítica de un teorema, son necesarias ciertas precauciones. Como en la demostración se emplea un

sistema coordenado, es muy útil construir la figura de manera que se facilite la demostración. Una figura debe colocarse siempre en la posición más simple, es decir, en una posición tal que las coordenadas de los puntos de la figura simplifiquen lo más posible los cálculos algebraicos. Por ejemplo, en un teorema relativo a un triángulo cualquiera, la figura puede suponerse tal como se indica en la figura 17 (a), teniendo los vértices las coordenadas que se indican. Pero es más sencillo suponer el triángulo en la posición indicada en la figura 17 (b); en efecto, para esta posición solamente tenemos tres cantidades, a, b y c, que considerar, mientras que si consideramos

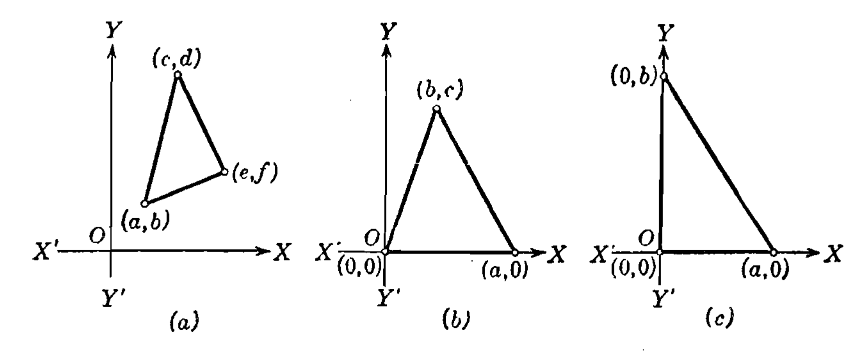


Fig. 17

el triángulo dado en la figura 17 (a) serán seis las cantidades que entrarán en nuestros cálculos. Una posición análoga a la dada en la figura 17 (b) es aquella en que ningún vértice está en el origen, pero un vértice está sobre uno de los ejes coordenados y los otros dos están sobre el otro eje coordenado. El estudiante dibujará las figuras correspondientes a este caso.

Por afán de simplificación no se debe caer, sin embargo, en el extremo opuesto y situar la figura de tal manera que el teorema quede restringido. Por ejemplo, las coordenadas para los vértices del triángulo de la figura 17 (c) contienen solamente dos cantidades a y b, pero esta figura es el caso especial de un triángulo rectángulo y no serviría para la demostración de un teorema relativo a un triángulo cualquiera. También es muy útil el usar letras y no números para las coordenadas de los puntos.

Como primer paso en la demostración analítica de un teorema, se debe dibujar un sistema de ejes coordenados y, después, colocar la figura en una de las posiciones más simples, sin particularizar el teorema, tal como se explicó en el párrafo anterior. A continuación,

todos los puntos comprendidos por el teorema deberán designarse por coordenadas apropiadas marcadas sobre la figura. El procedimiento a seguir después de esto depende de la propiedad o propiedades particulares que van a demostrarse y se comprenderá mejor por medio de ejemplos.

Ejemplo 1. Demostrar analíticamente que las rectas que unen los puntos medios de los lados sucesivos de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

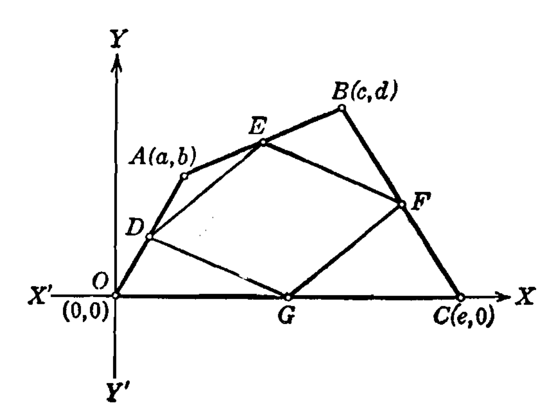


Fig. 18

Demostración. Una de las posiciones más simples para un cuadrilátero cualquiera es la mostrada en la figura 18. Sean D, E, F y G los puntos medios de los lados sucesivos del cuadrilátero $OABC$. Tenemos que demostrar que el cuadrilátero $DEFG$ es un paralelogramo. Esto sugiere la obtención de las pendientes de los lados de $DEFG$. Estas pendientes se obtienen muy fácilmente siempre que se conozcan las coordenadas de los puntos D, E, F y G. Para calcular estas coordenadas observemos que, por ser los puntos medios de los lados del cuadrilátero dado, bastará aplicar las fórmulas del punto medio de un segmento. Según esto, la obtención de las coordenadas será el punto de partida de la demostración.

Por el corolario del teorema 3 del Artículo 7, tenemos, para las coordenadas de los puntos medios:

$$D:\quad \left(\frac{0+a}{2},\ \frac{0+b}{2}\right),\ \text{o sea},\ \left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right),$$

$$E:\quad \left(\frac{a+c}{2},\ \frac{b+d}{2}\right),$$

$$F:\quad \left(\frac{c+e}{2},\ \frac{d+0}{2}\right),\ \text{o sea},\ \left(\frac{c+e}{2},\ \frac{d}{2}\right),$$

$$G:\quad \left(\frac{0+e}{2},\ \frac{0+0}{2}\right),\ \text{o sea},\ \left(\frac{e}{2},\ 0\right).$$

Por el teorema 4, Artículo 8, tenemos, para las pendientes de los lados de $DEFG$:

$$\text{Pendiente de } DE = \frac{\frac{b}{2} - \frac{b+d}{2}}{\frac{a}{2} - \frac{a+c}{2}} = \frac{d}{c};$$

$$\text{Pendiente de } EF = \frac{\frac{b+d}{2} - \frac{d}{2}}{\frac{a+c}{2} - \frac{c+e}{2}} = \frac{b}{a-e};$$

$$\text{Pendiente de } FG = \frac{\frac{d}{2} - 0}{\frac{c+e}{2} - \frac{e}{2}} = \frac{d}{c};$$

$$\text{Pendiente de } GD = \frac{\frac{b}{2} - 0}{\frac{a}{2} - \frac{e}{2}} = \frac{b}{a-e}.$$

Siendo idénticas las pendientes de DE y FG, estos dos lados son paralelos, según el corolario 1 del teorema 5, Artículo 10. Análogamente, los lados EF y DG son paralelos. Por tanto, la figura $DEFG$ es un paralelogramo, y el teorema está demostrado.

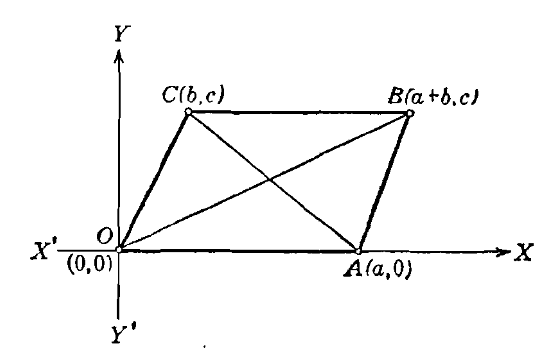


Fig. 19

Ejemplo 2. Demostrar analíticamente que, si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares entre sí, el paralelogramo es un rombo.

Demostración. Una de las posiciones más sencillas para un paralelogramo cualquiera es la indicada en la figura 19. Podemos entonces asignar a los vertices A y C sus coordenadas como está indicado. Como $OABC$ es un paralelogramo, el lado BC es paralelo e igual al lado OA. Luego, la ordenada de B es igual a la ordenada de C, y la abscisa de B es a unidades mayor que la abscisa de C. Todo esto lo indicamos analíticamente asignando las coordenadas $(a + b,\ c)$ al vértice B.



Por hipótesis, las diagonales OB y AC son perpendiculares entre sí. Según el corolario 2 del teorema 5 del Artículo 10, este hecho se expresa, analíticamente, por la relación

$$\frac{c}{a+b} \cdot \frac{c}{b-a} = -1,$$

de donde,

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad y \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Pero a es la longitud del lado OA, y, por el teorema 2, Artículo 6, $\sqrt{b^2+c^2}$ es la longitud del lado OC. Por tanto, por ser iguales dos lados adyacentes de $OABC$ el paralelogramo es un rombo, como se quería demostrar.

EJERCICIOS. Grupo 4

Los teoremas enunciados en los siguientes ejercicios deben demostrarse *analíticamente*. Para cada ejercicio dibújese una figura colocada, con respecto a los ejes coordenados, de manera que facilite la demostración.

1. Las diagonales de un paralelogramo se dividen mutuamente en partes iguales.

2. Enunciar y demostrar el teorema recíproco del anterior.

3. Las diagonales de un rombo son perpendiculares y se cortan en su punto medio.

4. El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados cualesquiera de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

5. El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.

6. Los ángulos opuestos a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales.

7. Enunciar y demostrar el recíproco del teorema del ejercicio 6.

8. Si las diagonales de un paralelogramo son iguales, la figura es un rectángulo.

9. Las medianas correspondientes a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales.

10. Enunciar y demostrar el recíproco del teorema del ejercicio 9.

11. Los dos segmentos que se obtienen uniendo dos vértices opuestos de un paralelogramo con los puntos medios de dos lados opuestos son iguales y paralelos.

12. El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las bases e igual a su semisuma.

13. El segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es igual a la mitad de la diferencia de las longitudes de los lados paralelos.

14. La suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.

15. Los segmentos que unen los puntos medios de cada dos lados opuestos de un cuadrilátero cualquiera se bisecan entre sí.

16 Los segmentos que unen los puntos medios de cada dos lados contiguos de un rectángulo forman un rombo,

17. Los segmentos que unen los puntos medios de cada par de lados contiguos de un rombo forman un rectángulo.

18. Los ángulos de la base de un trapecio isósceles son iguales.

19. Los puntos medios de dos lados opuestos de cualquier cuadrilátero y los puntos medios de las diagonales son los vértices de un paralelogramo.

20. Enunciar y demostrar el recíproco del teorema de Pitágoras.

21. El segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos de cualquier cuadrilátero y el que une los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero se bisecan entre sí.

22. El segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio biseca a ambas diagonales.

23. La suma de los cuadrados de las distancias de cualquier punto de un plano a dos vértices opuestos de cualquier rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de sus distancias a los otros dos vértices.

24. Enunciar y demostrar el recíproco del teorema del ejercicio 23.

25. Si O, A, B y C son los vértices sucesivos de un paralelogramo, y D y E los puntos medios de los lados AO y BC, respectivamente, los segmentos DB y OE trisecan a la diagonal AC.

12. Resumen de fórmulas. A intervalos apropiados el estudiante debe construir tablas que comprendan un sumario de los resultados obtenidos. En tales tablas se apreciará a simple vista no solamente las relaciones importantes sino también algunas analogías o propiedades comunes; también servirán para reducir a un mínimo los resultados que deben aprenderse de memoria. Como ejemplo, presentamos a continuación un resumen, en forma de tabla, de los principales resultados obtenidos en este capítulo. El estudiante debe tener estos resultados claramente definidos en su mente, y, en particular, debe notar el paralelismo entre la condición geométrica por una parte y su representación analítica por otra.

CONDICION GEOMETRICA	REPRESENTACION ANALITICA
Longitud P_1P_2 de un segmento de recta dirigido, P_1P_2, con punto inicial P_1 y punto final P_2.	
P_1P_2 coincidiendo con el eje X: $P_1(x_1\ 0)$, $P_2(x_2, 0)$. P_1P_2 paralelo al eje X: $P_1(x_1, y)$, $P_2(x_2, y)$, $y \neq 0$.	$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1$.
P_1P_2 coincidiendo con el eje Y: $P_1(0, y_1)$, $P_2(0, y_2)$. $\overline{P_1P_2}$ paralelo al eje Y; $P_1(x, y_1)$, $P_2(x, y_2)$, $x \neq 0$.	$\overline{P_1P_2} = y_2 - y_1$.
Distancia d entre dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.	$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

CONDICION GEOMETRICA	REPRESENTACION ANALITICA
Coordenadas (x, y) del punto P que divide al segmento rectilíneo dirigido P_1P_2, con puntos extremos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, en la razón dada $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$.	$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$, $y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$, $r \neq -1$.
Coordenadas (x, y) del punto medio del segmento dirigido, P_1P_2 cuyos extremos dados son los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.
Pendiente m de la recta que pasa por los dos puntos dados diferentes $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.	$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, $x_1 \neq x_2$.
Angulo θ formado por dos rectas con pendiente inicial m_1 y pendiente final m_2.	$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$, $m_1 m_2 \neq -1$.
Condición necesaria y suficiente para el paralelismo de dos rectas dadas de pendientes m_1 y m_2.	$m_1 = m_2$.
Condición necesaria y suficiente para la perpendicularidad de dos rectas dadas de pendientes m_1 y m_2.	$m_1 m_2 = -1$.

CAPITULO II

GRAFICA DE UNA ECUACION Y LUGARES GEOMETRICOS

13. Dos problemas fundamentales de la Geometría analítica. En este capítulo haremos un estudio preliminar de ***dos problemas fundamentales*** de la Geometría analítica.

I. Dada una ecuación interpretarla geométricamente, es decir, construir la gráfica correspondiente.

II. Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

El lector observará que estos problemas son esencialmente inversos entre sí. Estrictamente hablando, sin embargo, ambos problemas están tan estrechamente relacionados que constituyen juntos el problema fundamental de toda la Geometría analítica. Por ejemplo, veremos más adelante que, después de obtener la ecuación para una condición geométrica dada, es posible, frecuentemente, determinar por un estudio de esta ecuación posteriores características geométricas y propiedades para la condición dada. Nuestro propósito al considerar inicialmente separados los dos problemas no es de mucha necesidad sino, más bien, de conveniencia; de esta manera tenemos que enfocar nuestra atención sobre un número menor de ideas a la vez.

14. Primer problema fundamental. Gráfica de una ecuación. Supongamos que se nos da una ecuación de dos variables, x y y, que podemos escribir, brevemente, en la forma

$$f(x, y) = 0. \qquad (1)$$

En general, hay un número infinito de pares de valores de x y y que satisfacen esta ecuación. Cada uno de tales pares de valores ***reales*** se toma como las ***coordenadas*** (x, y) ***de un punto en el plano***. Este convenio es la base de la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1. El conjunto de los puntos, y *solamente* de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfagan una ecuación (1), se llama *gráfica de la ecuación* o, bien, su *lugar geométrico*.

Otro concepto importante está dado por la

DEFINICIÓN 2. Cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (1) *pertenece a la gráfica de la ecuación*.

No debe insistirse mucho en aquello de que *solamente* aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación pertenecen a su lugar geométrico. Lo importante es que si las coordenadas de un punto satisfacen una ecuación, ese punto pertenece a la gráfica de esa ecuación y, recíprocamente, si un punto está sobre la gráfica de una ecuación, sus coordenadas satisfacen la ecuación. Esto es, evidentemente, el enunciado de una condición necesaria y suficiente (Art. 9). Como las coordenadas de los puntos de un lugar geométrico están restringidas por su ecuación tales puntos estarán localizados, en general, en posiciones tales que, tomadas en conjunto, formen un trazo definido llamado curva, gráfica, o lugar geométrico.

Como ejemplo de las notas precedentes consideremos la ecuación

$$y = x^3 - 8x^2 + 15x. \qquad (2)$$

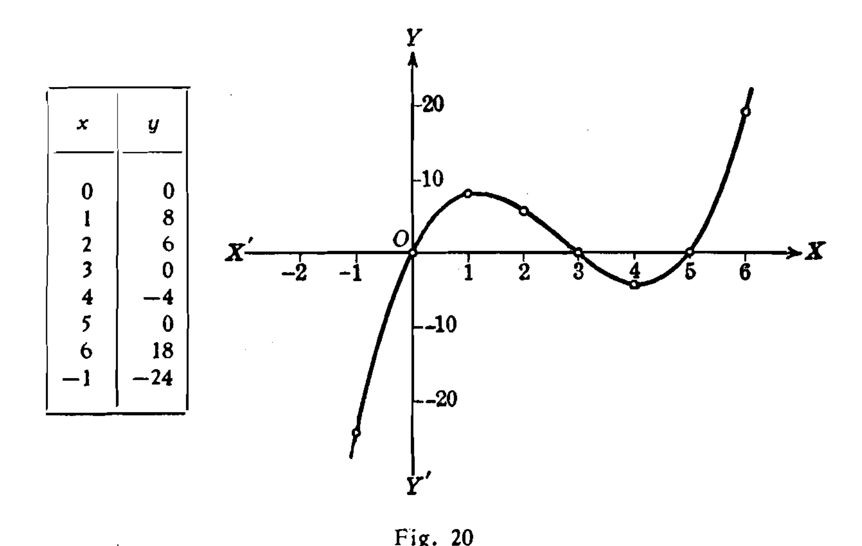
Dando diversos valores a x y calculando los valores correspondientes de y, obtenemos los pares de valores que figuran en la tabla. Cada par de valores correspondientes, tomado como las coordenadas de un punto, nos permite trazar varios puntos, tal como se muestra en la figura 20.

En Algebra se estudia el trazado de gráficas del tipo (2). El procedimiento consiste en trazar un cierto número de puntos y dibujar una línea continua que pasa por todos ellos, tal como está indicado en la figura 20. Pero, al hacer esto, se supone que la gráfica entre dos puntos sucesivos cualesquiera tiene la forma de la curva continua que se dibuja uniendo los puntos. Aunque esto es verdadero para la gráfica particular que estamos considerando, no es verdadero para las gráficas de todas las ecuaciones. Por tanto, bajo este supuesto, podemos introducir muchos errores en el trazado de la gráfica *entre* dos de sus puntos. Para evitar errores de este tipo, debemos hacer una investigación preliminar de la ecuación para ciertas características *antes* de proceder al trazado de la curva. Esto se llama *discutir la ecuación* y se describirá en los artículos que siguen inmediatamente al presente.

El lector no debe creer que toda ecuación del tipo (1) tiene, necesariamente, una gráfica. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 + 4 = 0 \qquad (3)$$

se satisface para un número infinito de pares de valores de x y y, pero en ningún caso son *ambos* valores números *reales*. Por esto no se puede trazar ningún punto cuyas coordenadas satisfagan esta ecuación, ya que estamos restringidos a puntos cuyas coordenadas sean *ambas números reales*. Decimos entonces que (3) *no tiene gráfica* en el sistema coordenado rectangular *real* que estamos empleando.



x	y
0	0
1	8
2	6
3	0
4	−4
5	0
6	18
−1	−24

Fig. 20

Otro ejemplo es la ecuación

$$x^2 + y^2 = 0, \qquad (4)$$

en donde, $x = 0$, $y = 0$ es el único par de valores reales que la satisfacen. En este caso, en nuestro sistema coordenado rectangular real, la gráfica de la ecuación (4) es un solo punto, el origen.

15. Intercepciones con los ejes. El primer punto que estudiaremos en relación con la discusión de una ecuación es el de las *intercepciones* de la curva con los ejes coordenados.

DEFINICIONES. Llamaremos *intercepción* de una curva con el eje X a la abscisa del punto de intersección de la curva con el eje. Análogamente, la intercepción con el eje Y es la ordenada del punto de intersección de la curva con dicho eje. *

El método para obtener la intercepciones es evidente a partir de la definición. Como la intercepción con el eje X es la abscisa de un

* N. DEL T. Muchos autores llaman intersecciones a las intercepciones sobrentendiendo que al decir punto de intersección se quiere indicar abscisa u ordenada del punto.

punto que está sobre el eje de las X, la ordenada de ese punto es cero. Por tanto, haciendo $y = 0$ en la ecuación de la curva, las soluciones reales de la ecuación resultante en x nos darán las intercepciones con el eje de las X. Análogamente, haciendo en la ecuación $x = 0$, las soluciones reales de la ecuación resultante en y nos darán las intercepciones con el eje Y.

Como ejemplo del método, consideremos la ecuación (2) del Artículo 14:

$$y = x^3 - 8x^2 + 15x. \qquad (1)$$

Para $y = 0$, esta ecuación se reduce a

$$x^3 - 8x^2 + 15x = 0,$$

de donde,

$$x(x-3)(x-5) = 0,$$

y las raíces son

$$x = 0,\ 3,\ 5.$$

Por tanto, las intercepciones de (1) con el eje X son 0, 3, 5. Para $x = 0$ en (1), $y = 0$, de manera que la intercepción con el eje Y es 0. Todas estas intercepciones están indicadas en la figura 20 del Artículo 14.

16. Simetría. El segundo punto que consideraremos, en relación con la discusión de una ecuación, es la *simetría* de la curva que representa, con respecto a los ejes coordenados y con respecto al origen.

DEFINICIÓN 1. Se dice que dos puntos son *simétricos con respecto a una recta* si la recta es perpendicular al segmento que los une en su punto medio.

La recta con respecto a la cual son simétricos los dos puntos se llama *eje de simetría*. Así, en la figura 21, los dos puntos A y B son simétricos con respecto al eje de simetría l si la recta l es perpendicular al segmento AB en su punto medio.

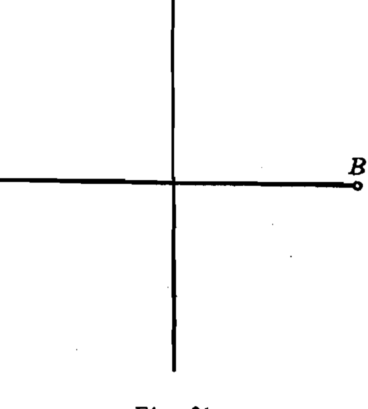


Fig. 21

DEFINICIÓN 2. Se dice que dos puntos son *simétricos con respecto a un punto* O si O es el punto medio del segmento que los une.

El punto O se llama *centro de simetría*. Así, en la figura 22, los dos puntos A y B son simétricos con respecto al centro de simetría O siempre que O sea el punto medio del segmento AB.

Ahora vamos a extender las definiciones 1 y 2 hasta incluir la simetría de una curva plana completa con respecto a una línea o un punto.

DEFINICIÓN 3. Se dice que una curva es *simétrica con respecto a un eje de simetría* cuando para *cada* punto de la curva hay un punto correspondiente, también de la curva, tal que estos dos puntos son simétricos con respecto al eje.

DEFINICIÓN 4. Se dice que una curva es *simétrica con respecto a un centro de simetría* O cuando para *cada* punto de la curva hay un

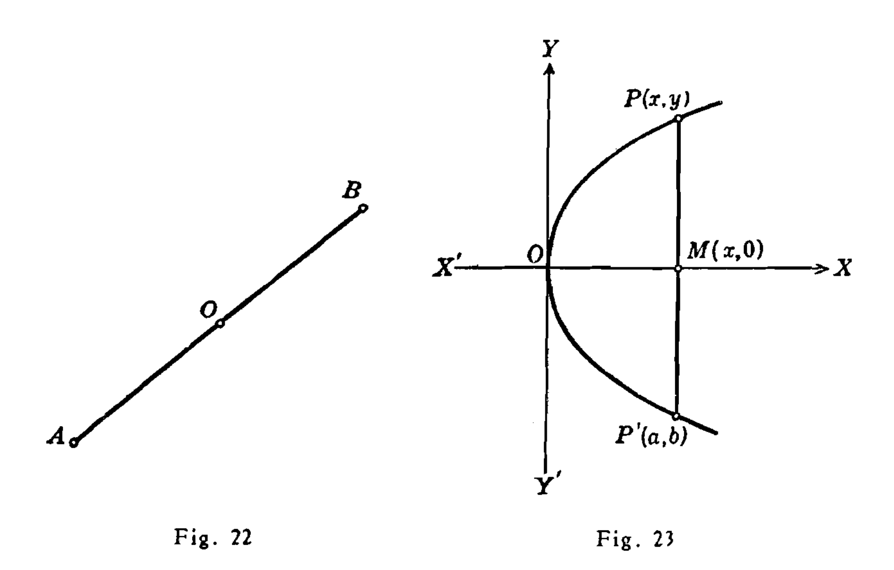


Fig. 22 Fig. 23

punto correspondiente, también de la curva, tal que estos dos puntos son simétricos con respecto a O.

Todas las definiciones anteriores son puramente geométricas. Ahora interpretaremos estas definiciones analíticamente, usando los ejes coordenados como ejes de simetría y el origen como centro de simetría.

a) *Simetría con respecto al eje* X. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de una curva (fig. 23). Si esta curva es simétrica con respecto al eje X, de la definición 3 se deduce que debe haber otro punto $P'(a, b)$ sobre la curva, tal que el segmento PP' queda bisecado perpendicularmente por el eje X. Sea M el punto medio de PP'; sus coordenadas son, evidentemente, $(x, 0)$. Entonces, por las fórmulas del punto medio dadas en el corolario del teorema 3, Art. 7, tenemos

$$x = \frac{a + x}{2}, \quad 0 = \frac{b + y}{2},$$

de donde $a = x$ y $b = -y$. Por tanto, las coordenadas de P' son $(x, -y)$. Pero, como P' está sobre la curva, de la definición 1, Artículo 14, se deduce que sus coordenadas deben de satisfacer la ecuación de la curva. Es decir, una ecuación $f(x, y) = 0$ que se satisface para las coordenadas (x, y) de P se satisface también para las coordenadas $(x, -y)$ de P' siempre que la curva sea simétrica respecto al eje X. Este resultado se enuncia como sigue:

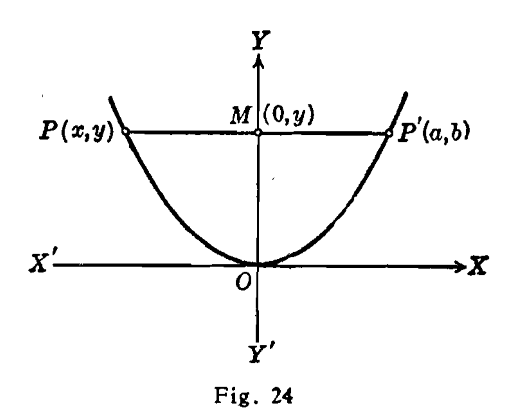


Fig. 24

TEOREMA 1. *Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable* y *es reemplazada por* $-$ y, *la curva es simétrica con respecto al eje* X.

NOTA. El recíproco del teorema 1 también es verdadero. La demostración se deja como ejercicio al estudiante.

Un ejemplo sencillo del teorema 1 es la curva cuya ecuación es $y^2 = x$. Se deja como ejercicio al estudiante la construcción de esta curva, que es una parábola.

b) *Simetría con respecto al eje* Y. Usando la figura 24, podemos establecer un teorema análogo al teorema 1 para la simetría de una curva con respecto al eje Y. La demostración se deja como ejercicio al estudiante.

TEOREMA 2. *Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable* x *es reemplazada por* $-$ x, *la curva es simétrica con respecto al eje* Y, *y recíprocamente.*

Un ejemplo sencillo del teorema 2 es la curva cuya ecuación es $y = 2x^2 + 1$. Se deja al estudiante el trazado de esta curva.

c) *Simetría con respecto al origen.* Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de una curva (fig. 25). Para que esta curva sea simétrica con respecto al origen O, de la definición 4 se deduce que debe haber otro

punto $P'(a, b)$, sobre la curva, tal que O sea el punto medio del segmento PP'. Por las fórmulas del punto medio tenemos

$$0 = \frac{x + a}{2}, \quad 0 = \frac{y + b}{2},$$

de donde $a = -x$ y $b = -y$, de manera que las coordenadas de P' son $(-x, -y)$. Como P' está sobre la curva, sus coordenadas $(-x, -y)$ deben satisfacer la ecuación de la curva. Por tanto, para que haya simetría con respecto al origen, la ecuación del lugar

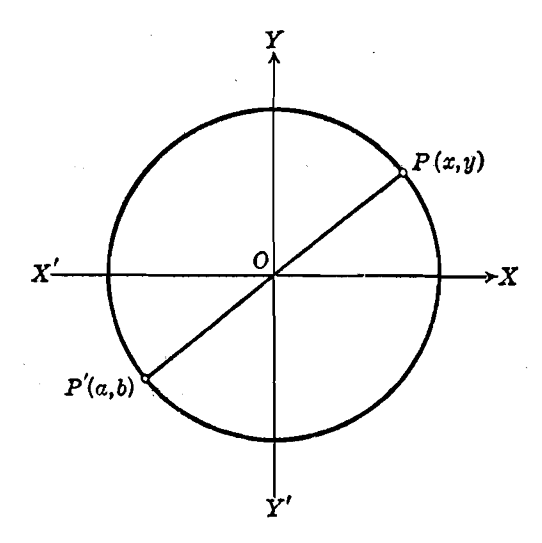


Fig. 25

geométrico no debe alterarse al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$. El recíproco de este enunciado también es verdadero y puede demostrarse. Estos resultados nos dan el

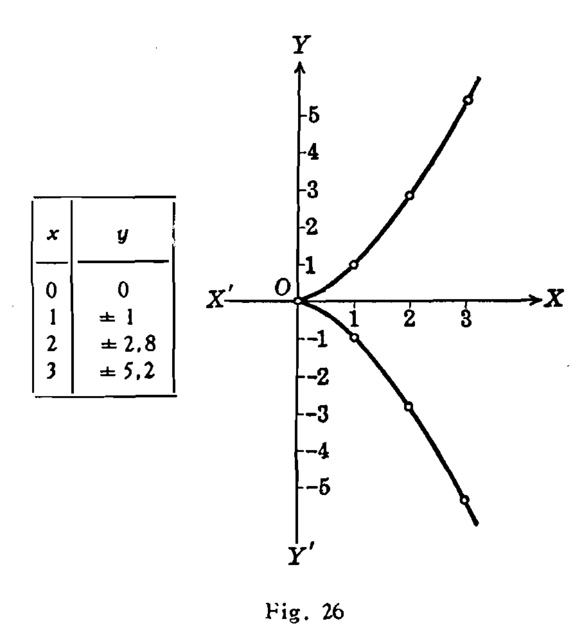
TEOREMA 3. *Si la ecuación de una curva no se altera al reemplazar las variables* x *y* y *por* $-$ x *y* $-$ y, *respectivamente, la curva es simétrica con respecto al origen; y recíprocamente.*

Un ejemplo sencillo del teorema 3 es la curva $y = x^3$. Se recomienda al estudiante la construcción de esta curva. Se llama *parábola cúbica*

NOTA. Si comparamos los teoremas 1, 2 y 3 veremos que, si una curva es simétrica con respecto a *ambos* ejes coordenados, es también simétrica con respecto al origen. Pero el recíproco no es necesariamente verdadero. Por ejemplo, la curva cuya ecuación es $xy = 1$ es simétrica con respecto al origen, pero no es

simétrica con respecto a ninguno de los ejes coordenados. Se recomienda al estudiante la construcción de la gráfica de esta ecuación que se llama *hipérbola equilátera*.

17. **Extensión de una curva.** El tercer punto que consideraremos, en relación con la discusión de una ecuación, es el estudio de la *extensión* de la curva. Con este término queremos expresar la determinación de los intervalos de variación para los cuales los valores de x y y son valores reales. Esta información es útil por dos razones: 1) Da la



x	y
0	0
1	± 1
2	$\pm 2,8$
3	$\pm 5,2$

Fig. 26

localización general de la curva en el plano coordenado. 2) Indica si la curva es cerrada o si es de extensión indefinida.

Los intervalos para los cuales los valores de x y y son reales se determinan, simplemente, resolviendo la ecuación dada para y, en términos de x, y para x en términos de y.

Ejemplo. Discutir la ecuación $y^2 = x^3$, estudiando las intercepciones, simetría y extensión de la curva. Trazar la gráfica correspondiente.

Solución. *a*) *Intercepciones.* Para $y = 0$, $x = 0$; para $x = 0$, $y = 0$. Por tanto, el único punto de intersección con los ejes coordenados es el origen.

b) *Simetría.* Si se sustituye y por $-y$, la ecuación no se altera. Por tanto, la curva es simétrica con respecto al eje X. Si sustituimos x por $-x$, la ecuación se altera; por tanto, la curva no es simétrica con respecto al eje Y. Si

se sustituyen x y y por $-x$ y $-y$, respectivamente, la ecuación también cambia; luego, la curva no es simétrica con respecto al origen.

c) *Extensión*. Despejando y en función de x, obtenemos

$$y = \pm \sqrt{x^3}. \tag{1}$$

Vemos inmediatamente que y es compleja si x es negativa; por tanto, todos los valores negativos de x quedan excluídos. Esto significa que ninguna porción de la curva está a la izquierda del eje Y. En cambio, pueden tomarse todos los valores positivos de x.

Despejando x en función de y, obtenemos

$$x = y^{2/3}.$$

Evidentemente, y puede tomar todos los valores positivos y negativos. Esto, agregado al hecho de que todos los valores positivos de x son admisibles, indica que la curva se extiende indefinidamente hacia la derecha del eje Y y hacia ambos lados, arriba y abajo, del eje X. Por tanto, la curva no es cerrada.

Finalmente, por medio de (1), calculamos unos cuantos pares de valores para x y y como los que aparecen en la tabla. La curva es la trazada en la figura 26. Es una *parábola semicúbica*.

EJERCICIOS. Grupo 5

En cada uno de los ejercicios 1-25 discútase la ecuación estudiando las intercepciones, simetría y extensión. Después trácese la gráfica correspondiente.

1. $5x + 4y - 20 = 0$.
2. $3x - 2y = 0$.
3. $3x^2 + 3y^2 - 10 = 0$.
4. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$.
5. $4x^2 + 3y^2 - 12 = 0$.
6. $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$.
7. $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$.
8. $16x^2 - y = 0$.
9. $16y^2 - x = 0$.
10. $x^2 - y^2 - 9 = 0$.
11. $y = x^3 + x^2 - 9x - 9$.
12. $8x^3 - y = 0$.
13. $x^3 - x - y = 0$.
14. $x^4 - 9x^2 - y = 0$.
15. $x - y^4 + 9y^2 = 0$.
16. $x^2 - y^3 = 0$
17. $x^2 + y^2 - 4y = 0$.
18. $x^2 - 6x + y^2 = 0$.
19. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 14$
20. $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$.
21. $x^2 + 4x + 3y + 1 = 0$.
22. $y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$.
23. $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$.
24. $4x^2 - y^2 - 2y = 2$.
25. $y^2 - 9x^2 - 18x - 8y - 2 = 0$.
26. Enunciar y demostrar el recíproco del teorema 1, Artículo 16.
27. Demostrar el teorema 2, Artículo 16.
28. Enunciar y demostrar el recíproco del teorema 3, Artículo 16.
29. Demostrar el siguiente teorema: Si la ecuación de una curva no se altera cuando se intercambian las variables x y y, la curva es simétrica con respecto a la recta que pasa por el origen y es bisectriz de los cuadrantes I y III.
30. Demostrar el siguiente teorema: Si la ecuación de una curva no se altera al sustituir la variable x por $-y$ y la variable y por $-x$, la curva es simétrica con respecto a la recta que pasa por el origen y es bisectriz de los cuadrantes II y IV.

18. Asíntotas. El cuarto punto que consideraremos, en relación con la discusión de una ecuación, es la determinación de las asíntotas que la curva pueda tener.

DEFINICIÓN. Si para una curva dada, existe una recta tal que, a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente y tiende a cero, dicha recta se llama *asíntota* de la curva.

Esta definición implica dos cosas: 1) una curva que tiene una asíntota no es cerrada o de extensión finita, sino que se extiende indefinidamente; 2) una curva se aproxima a la asíntota más y más a medida que se extiende más y más en el plano coordenado.

Siendo la asíntota una línea recta, puede tener una cualquiera de tres posiciones particulares. Si es paralela o coincide con el eje X, se llama *asíntota horizontal;* si es paralela o coincide con el eje Y, *asíntota vertical;* y si no es paralela a ninguno de los ejes coordenados, *asíntota oblicua*. Aquí consideraremos solamente la determinación de asíntotas verticales y horizontales. Posteriormente veremos la determinación de asíntotas oblicuas para una curva particular conocida con el nombre de hipérbola.

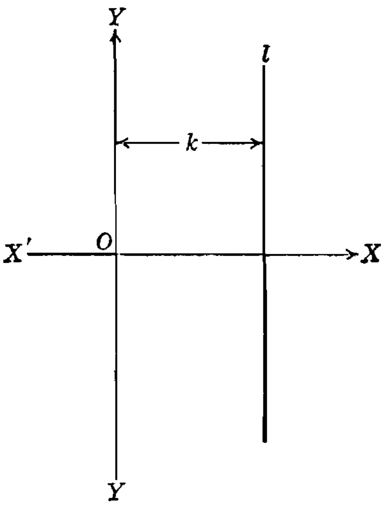


Fig. 27

El estudiante debe tener presente que una curva no tiene necesariamente una o más asíntotas. Hay muchas curvas que no tienen asíntotas. Sin embargo, si una curva tiene asíntotas, su determinación será, como veremos, una gran ayuda para construir su gráfica.

En el capítulo siguiente haremos un estudio detallado de la ecuación general de la recta. Pero ahora tenemos necesidad de saber hallar ecuaciones de asíntotas verticales y horizontales. Para ello sea l (fig. 27) una recta cualquiera paralela al eje Y y que dista k unidades del eje. Todo punto de l, cualquiera que sea el valor de su ordenada, tiene una abscisa igual a k. Las coordenadas de todos los puntos de l satisfacen, por tanto, la ecuación $x = k$. Recíprocamente, cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación es un punto cuya abscisa es k y situado, por tanto, a una distancia de k unidades del eje Y, y, en consecuencia, está sobre la recta l.

De aquí que la ecuación de l es $x = k$. Por un razonamiento análogo hallamos que $y = k$ es la ecuación de una recta paralela al eje X, a k unidades del eje.

Vimos (Art. 17) que se puede determinar la extensión de una curva despejando y en función de x y x en función de y. Para obtener las asíntotas verticales y horizontales, usaremos estas mismas ecuaciones en las que aparecen despejadas las variables.

Ejemplo. Determinar las asíntotas verticales y horizontales de la curva cuya ecuación es

$$xy - y - 1 = 0. \quad (1)$$

Solución. Despejando y en función de x, resulta

$$y = \frac{1}{x-1}. \quad (2)$$

Según la ecuación (2) y no está definida para $x = 1$. Sin embargo, si se le asigna a x un valor que sea ligeramente mayor que 1, vemos que y toma un valor positivo muy grande; y si se le da a x un valor ligeramente menor que 1, resulta que y toma un valor negativo numéricamente muy grande. En cualquiera de estos dos casos, obtenemos un punto de la curva para el cual la abscisa tiene un valor muy aproximado a 1 y la ordenada es, numéricamente, muy grande. A medida que x se aproxima al valor 1, el valor absoluto de y se hace mayor que cualquier número por grande que se le suponga. Bajo estas condiciones la curva se extiende indefinidamente lejos y se aproxima a una recta cuyos puntos tienen todos la propiedad común de que su abscisa es igual a 1. La ecuación de dicha recta es, evidentemente, $x = 1$, y, de acuerdo con nuestra definición de asíntota, es la ecuación de una asíntota vertical. Este resultado se obtiene simplemente igualando a cero el denominador $x - 1$ de la ecuación (2).

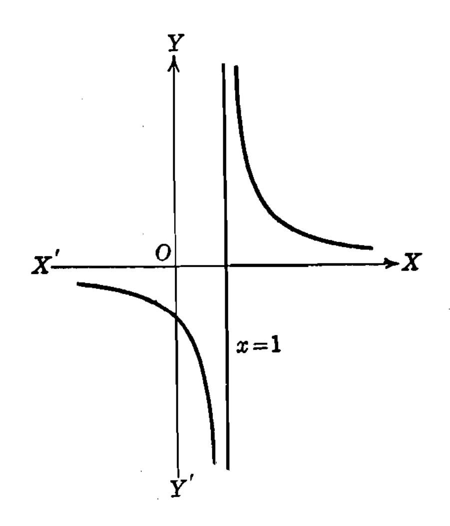


Fig. 28

Despejando de (1) el valor de x en función de y se obtiene

$$x = \frac{y+1}{y}. \quad (3)$$

Aplicando precisamente el mismo argumento a (3), obtenemos $y = 0$, o sea, el eje X, como asíntota horizontal. La gráfica de (1) se muestra en la figura 28. Se llama una *hipérbola*.

NOTAS. 1. Una curva puede tener más de una asíntota vertical u horizontal. Así, la curva cuya ecuación es

$$y = \frac{1}{(x - 1)(x - 2)}$$

tiene dos asíntotas verticales, $x = 1$ y $x = 2$.

2. La discusión anterior sugiere un método general para obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales. Para obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales, resuélvase la ecuación dada para y en función de x e iguálese a cero cada uno de los factores lineales del denominador; estas son las ecuaciones buscadas. Análogamente, para obtener las ecuaciones de las asíntotas horizontales, resuélvase la ecuación dada para x en función de y e iguálese a cero cada uno de los factores lineales del denominador.

3. Para muchas ecuaciones en las variables x y y, veremos que, frecuentemente, es ventajoso investigar el comportamiento de una de las variables cuando a la otra se le dan valores cada vez más grandes en valor absoluto. Esto es particularmente útil para la determinación de las asíntotas. Así, para la ecuación (2) de nuestro ejemplo,

$$y = \frac{1}{x - 1},$$

si damos valores a x cada vez más grandes, en valor absoluto, el valor de y se aproxima a cero. Es decir, a medida que el punto sobre la curva se aleja indefinidamente del origen, ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda, la curva se aproxima a la recta $y = 0$ que, por lo tanto es una asíntota horizontal.

Análogamente, si escribimos la ecuación (3) en la forma

$$x = 1 + \frac{1}{y},$$

vemos que, a medida que y toma valores cada vez mayores en valor absoluto, x se aproxima a 1. Por tanto, $x = 1$ es una asíntota vertical.

4. El estudiante debe observar la ventaja de usar las asíntotas de una curva, cuando existen, en el trazado de la curva. Las asíntotas actúan como *líneas guía* de la gráfica.

19. Construcción de curvas. La discusión de una ecuación y su representación gráfica constituyen, en conjunto, un problema de tan gran importancia en todas las ramas de la Matemática y sus aplicaciones, que se le ha dado el nombre especial de *construcción de curvas*. Dedicaremos el presente artículo a hacer un resumen de los resultados obtenidos en los artículos inmediatamente precedentes. Desde nuestro punto de vista, el trazado de una curva constará de los seis pasos siguientes:

1. Determinación de las intercepciones con los ejes coordenados.
2. Determinación de la simetría de la curva con respecto a los ejes coordenados y al origen.
3. Determinación de la extensión de la curva.

4. Determinación de las ecuaciones de las asíntotas verticales u horizontales que la curva puede tener.

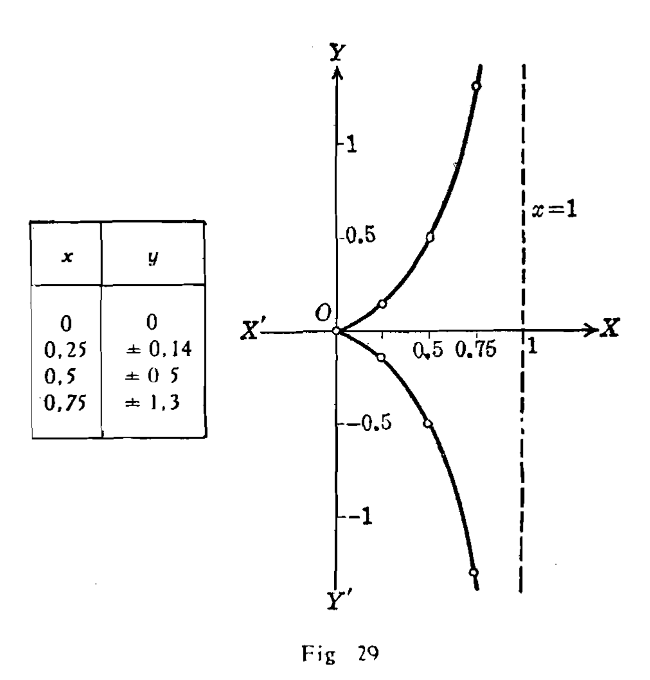
5. Cálculo de las coordenadas de un número suficiente de puntos para obtener una gráfica adecuada.

6. Trazado de la curva.

Ejemplo 1. Construir la curva cuya ecuación es

$$x^3 + xy^2 - y^2 = 0. \qquad (1)$$

Solución. 1. *Intercepciones.* Para $y = 0$, $x = 0$; para $x = 0$, $y = 0$. Por tanto, el único punto de intersección con los ejes coordenados es el origen.



x	y
0	0
0,25	± 0,14
0,5	± 0 5
0,75	± 1,3

Fig 29

2. *Simetría.* La ecuación dada solamente no se altera en el caso en que y es reemplazada por $-y$. Por tanto, la única simetría de la curva es con respecto al eje X.

3. *Extensión.* Despejando y en función de x, resulta

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}. \qquad (2)$$

De (2) vemos que y es compleja cuando x es negativa. Por tanto, todos los valores negativos de x quedan excluídos; según esto no hay curva a la izquierda del eje Y. Además, y no está definida para $x = 1$ y es compleja para todos los

valores de x mayores que 1. Por tanto, los valores de x para los cuales y está definida y es real, están dados por el intervalo de variación

$$0 \leq x < 1. \quad (3)$$

El despejar x en función de y no se puede efectuar fácilmente ya que es una ecuación cúbica en x. Sin embargo, en (2) vemos que y puede tomar todos los valores reales asignando a x valores comprendidos dentro del intervalo de variación dado por (3). La gráfica es, por consiguiente, una curva abierta que se extiende indefinidamente hacia arriba y abajo del eje X.

4. *Asíntotas*. De la ecuación (2) vemos, inmediatamente, que $x = 1$ es una asíntota vertical. Como de (1) no podemos despejar fácilmente x en función de y, no podemos investigar la posible existencia de una o más asíntotas horizontales tan rápidamente como determinamos la asíntota vertical. Sin embargo, de acuerdo con la nota 3, Artículo 18, se pueden investigar las asíntotas horizontales dando a x valores cada vez mayores en valor absoluto. Pero este procedimiento queda aquí excluído por el intervalo de variación permisible para los valores de x dado por (3). Por tanto, no hay asintotas horizontales.

5. *Cálculo de coordenadas*. Las coordenadas de los puntos pueden obtenerse a partir de (2) asignando a x valores comprendidos en el intervalo dado por (3). Tales pares de valores están dados en la tabla.

6. *Construcción de la curva*. La gráfica está trazada en la figura 29; se llama *cisoide*.

Ejemplo 2. Construir la curva cuya ecuación es

$$x^2y - x^2 - y = 0. \quad (4)$$

Solución. 1. *Intercepciones*. El único punto de intersección con los ejes es el origen.

2. *Simetría*. La curva solamente es simétrica con respecto al eje Y.

3. *Extensión*. Despejando de (4) el valor de y en función de x se obtiene

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1}. \quad (5)$$

En (5), y no está definida para $x = \pm 1$. Para $x > 1$ y $x < -1$, y es positiva; para valores de x comprendidos en el intervalo $-1 < x < 1$, y es negativa o cero. A medida que x se aproxima a $+1$ ó -1, y aumenta numéricamente sin límite.

Despejando de (4) el valor de x en función de y obtenemos

$$x = \pm\sqrt{\frac{y}{y - 1}}. \quad (6)$$

En (6), x no está definida para $y = 1$. También x es compleja para los valores de y comprendidos en el intervalo $0 < y < 1$. Por tanto, deben excluirse tales valores de y. A medida que y se aproxima a 1 decreciendo, x aumenta numéricamente sin límite.

Las conclusiones que hemos deducido de las ecuaciones (5) y (6), respecto a los intervalos en los cuales los valores de las variables x y y son reales, nos dan una buena idea de la localización de la curva en el plano coordenado. Hay tres regiones definidas en las cuales la curva existe; arriba de la recta $y = 1$ y a la

derecha de la recta $x = 1$; arriba de la recta $y = 1$ y a la izquierda de la recta $x = -1$; y abajo del eje X y entre las rectas $x = 1$ y $x = -1$. Se trata, evidentemente, de una curva abierta.

4. *Asíntotas.* De (5) vemos que hay dos asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = -1$. De (6) vemos que hay una asíntota horizontal: $y = 1$. También podemos obtener estas asíntotas tal y como se sugiere en la nota 3 del Artículo 18.

5. *Cálculo de las coordenadas de algunos puntos.* Las coordenadas de unos cuantos puntos pueden obtenerse a partir de (5), dentro de los intervalos de

x	y
0	0
$\pm \frac{1}{4}$	$-\frac{1}{15}$
$\pm \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$\pm \frac{3}{4}$	$-\frac{9}{7}$
$\pm \frac{5}{4}$	$\frac{25}{9}$
$\pm \frac{3}{2}$	$\frac{9}{5}$
$\pm \frac{7}{4}$	$\frac{49}{33}$
± 2	$\frac{4}{3}$
$\pm \frac{9}{4}$	$\frac{81}{65}$

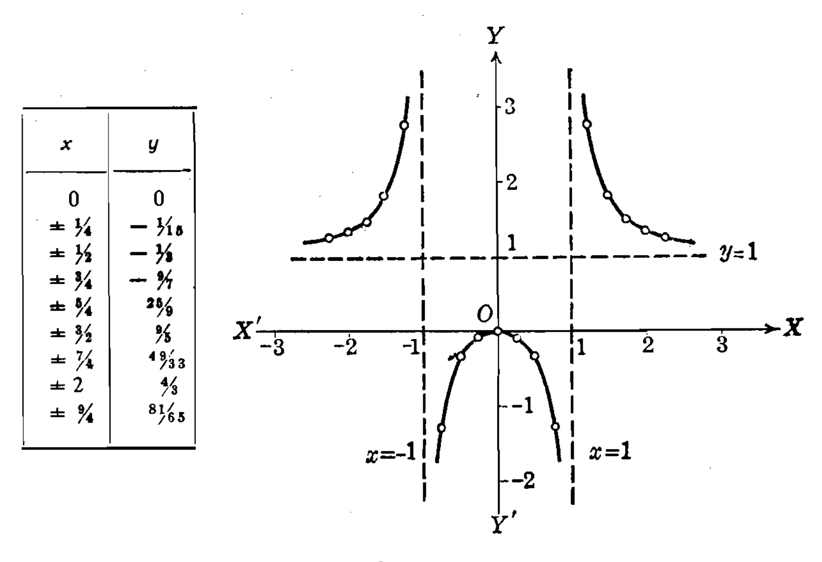


Fig. 30

variación obtenidos en el paso 3. Alguno de tales pares de valores están dados en la tabla.

6. *Construcción de la curva.* La gráfica está trazada en la figura 30. El estudiante debe hacer siempre un estudio particular para comprobar que la gráfica y la discusión de una ecuación estén en completo acuerdo.

EJERCICIOS. Grupo 6

En cada uno de los siguientes ejercicios, construir la curva correspondiente a la ecuación dada.

1. $xy - 2y - 3 = 0.$
2. $xy - 2x - 1 = 0.$
3. $x^4 + y^4 = 16.$
4. $x^3 + x - y = 0.$
5. $xy - 3y - x = 0.$
6. $xy - 3x - y = 0.$
7. $xy - 2x - 2y + 2 = 0.$
8. $x^4 - 4x^2 - y = 0.$
9. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0.$
10. $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 6y + 3 = 0.$
11. $x^3 + y^2 - 4y + 4 = 0.$
12. $y^3 - x^2 + 3y^2 + 2x + 3y = 0.$
13. $x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x - 2y - 2 = 0.$
14. $x^2y - 4y - x = 0.$
15. $xy^2 - 9x - y - 1 = 0.$
16. $x^2y - xy - 2y - 1 = 0.$
17. $xy^2 + xy - 2x - 2 = 0.$
18. $x^2 - xy + 5y = 0.$

19. $x^2y - x^2 - 4xy + 4y = 0.$
20. $xy^2 + 2xy - y^2 + x = 0.$
21. $x^2y - x^2 + xy + 3x = 2.$
22. $xy^2 - y^2 - xy + y = 0.$
23. $x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0.$
24. $x^3 - xy^2 + 2y^2 = 0.$
25. $y^3 + x^2y - x^2 = 0.$

20. Ecuaciones factorizables. El trazado de curvas se puede simplificar considerablemente para ciertos tipos de ecuaciones a las que llamaremos ecuaciones *factorizables;* es decir, aquellas que pueden escribirse en forma del producto de dos o más factores variables igualado a cero. Por ejemplo, es evidente que la ecuación

$$x^2 - y^2 = 0 \tag{1}$$

puede escribirse en la forma equivalente

$$(x - y)(x + y) = 0. \tag{2}$$

La ecuación (2) solamente se satisface para valores de x y y que anulen a uno, por lo menos, de los factores de su primer miembro (Apéndice IB, 2). Es decir, la ecuación (2) se satisface para valores que satisfagan a una cualquiera de las ecuaciones siguientes:

$$x - y = 0, \tag{3}$$

$$x + y = 0. \tag{4}$$

Las coordenadas de cualquier punto que satisfagan ya sea a (3) o (4) satisfarán también (2) y, por tanto, a (1). Por lo tanto, de acuerdo con la definición 1 del Artículo 14, la gráfica de la ecuación (1) constará de dos curvas que son las gráficas de las ecuaciones (3) y (4). Se recomienda al estudiante que trace las gráficas de (3) y (4) y compruebe que se trata de dos rectas que pasan por el origen y tienen de pendientes 1 y -1, respectivamente.

En general, si la ecuación

$$f(x, y) = 0 \tag{5}$$

es factorizable, es decir, si $f(x, y)$ puede escribirse como el producto de dos o más factores variables, la gráfica de (5) constará de las gráficas de las ecuaciones obtenidas al igualar a cero cada uno de estos factores.

21. Intersecciones de curvas. Consideremos dos ecuaciones independientes

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

$$g(x, y) = 0. \tag{2}$$

Si sus gráficas se cortan en uno o más puntos, cada uno de estos puntos se llama *punto de intersección*. Como un punto de intersección de dos curvas (1) y (2) está sobre *cada una* de dichas curvas, sus coordenadas deben satisfacer, simultáneamente, *ambas* ecuaciones (1) y (2), de acuerdo con las definiciones del Artículo 14. La interpretación analítica de un punto de intersección es obvia; en el caso que estamos estudiando, es un punto cuyas coordenadas representan una *solución común* de las ecuaciones (1) y (2).

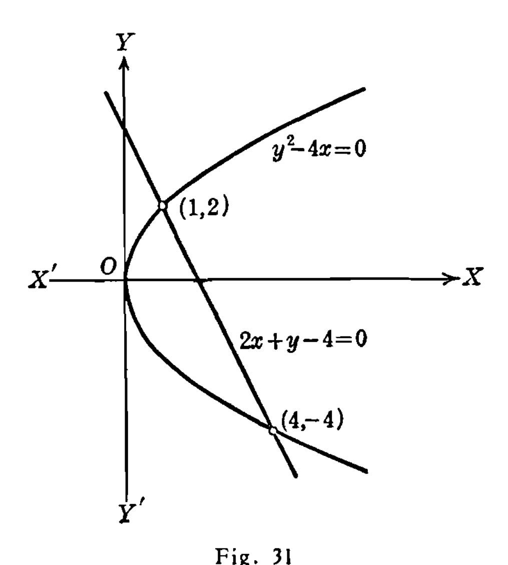


Fig. 31

Como las coordenadas de un punto deben ser ambas números reales, una solución común (x, y) de (1) y (2) no puede representar un punto de intersección en nuestro sistema coordenado real a menos que ambos valores de x y y sean reales. Además, si las ecuaciones (1) y (2) son incompatibles, es decir, no tiene solución común, sus gráficas no se cortan.

Ejemplo. Hallar analítica y gráficamente, los puntos de intersección de las dos curvas (la primera es realmente una recta) cuyas ecuaciones son

$$2x + y - 4 = 0, \tag{3}$$

$$y^2 - 4x = 0. \tag{4}$$

Solución. De (3), $y = 4 - 2x$; sustituyendo en (4) se obtiene la ecuación cuadrática

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

cuyas raíces son $x = 1, 4$.

Sustituyendo en (3) se obtiene que los valores correspondientes de y son 2, -4. Por tanto, los puntos de intersección son (1, 2) y (4, -4).

Gráficamente, los puntos de intersección se obtienen trazando la recta (3) y la curva (4). La gráfica correspondiente aparece en la figura 31

EJERCICIOS. Grupo 7

En cada uno de los ejercicios 1-10, factorizar la ecuación correspondiente y trazar la gráfica.

1. $x^2 - 4y^2 = 0.$
2. $9x^2 - 2y^2 = 0.$
3. $x^3 - x^2 y - 2xy^2 = 0.$
4. $x^2 + 2xy + y^2 = 1.$
5. $6x^2 + xy - 2y^2 + 7x + 7y - 3 = 0.$
6. $x^3 + y^3 + x^2 y + xy^2 - 4x - 4y = 0.$
7. $x^3 - x^2 y - xy + y^2 = 0.$
8. $x^2 y^2 - 4x^3 + 4xy^2 - y^4 = 0.$
9. $x^2 y + x^2 - xy^2 + xy + 2x = 0.$
10. $x^3 + x^2 + 2xy^2 + 2y^2 - 4x - 4 = 0.$

En cada uno de los ejercicios 11-20 hallar, analítica y gráficamente, los puntos de intersección, cuando los haya, para las curvas dadas.

11. $2x - y - 1 = 0; \quad 3x + y - 9 = 0.$
12. $x + 4y + 7 = 0; \quad 2x - 3y - 8 = 0.$
13. $x + y - 5 = 0; \quad 3x + 3y + 7 = 0.$
14. $y^2 - x = 0; \quad 2x - y - 6 = 0.$
15. $x^2 - y = 0; \quad y^2 - x = 0.$
16. $x^2 + y^2 = 4; \quad x + y = 2.$
17. $x^2 + y^2 = 8; \quad y^2 = 2x.$
18. $x^2 + y^2 = 1; \quad x^2 - y^2 = 4.$
19. $x^2 + y^2 = 13; \quad xy = 6.$
20. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0; \quad 3x - y - 8 = 0.$

22. Segundo problema fundamental. Consideremos ahora el segundo problema fundamental de la Geometría analítica, ya enunciado en el Artículo 13: Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

Una figura geométrica, tal como una curva, se da, generalmente, por su *definición*. Por *definición de un objeto* entendemos una descripción de ese objeto, de tal naturaleza que sea posible identificarlo de una manera definida entre todos los demás objetos de su clase. Debemos observar cuidadosamente lo que implica este enunciado: expresa una *condición necesaria y suficiente* para la existencia del objeto definido (Art. 9). Así, consideremos que estamos definiendo una curva plana del tipo C por medio de una propiedad P que únicamente posee C. Entonces, entre todas las curvas planas, una curva es del tipo C *si y solamente si* posee la propiedad P.

Como un ejemplo específico, consideremos una curva plana muy conocida, *la circunferencia*. *Definimos* una circunferencia como una curva plana que posee la propiedad única P de que todos sus puntos están a igual distancia de un punto

fijo en su plano. Esto significa que toda circunferencia tiene la propiedad P, y recíprocamente, toda curva plana que tenga la propiedad P es una circunferencia.

Para una curva, dar la *condición* que deben cumplir sus puntos es dar una *ley* a la cual deben obedecer los puntos de la curva. Esto significa que *todo punto* de la curva debe satisfacer la ley particular de la curva. De acuerdo con esto se define frecuentemente una curva como *el lugar geométrico descrito por un punto que se mueve siguiendo una ley especificada*. Así, una circunferencia puede definirse como el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a un punto fijo de ese plano es constante.

Un lugar geométrico no debe satisfacer necesariamente una sola condición; puede satisfacer dos o más condiciones. Así podemos tener una curva que sea el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que: 1) pasa por un punto dado, y 2) se conserva siempre a una distancia constante de una recta dada. Podemos entonces hacer el resumen de las notas precedentes en la siguiente

DEFINICIÓN. Una curva es el lugar geométrico de todos aquellos puntos, y *solamente* de aquellos puntos, que satisfacen una o más condiciones geométricas dadas.

El estudiante debe observar que esta definición implica que la condición o condiciones dadas sean necesarias y suficientes para la existencia de la curva. Esta definición debe también compararse con la definición 1 del Artículo 14.

En este artículo hemos estudiado el problema desde un punto de vista puramente geométrico. En el siguiente, consideraremos la interpretación analítica.

23. Ecuación de un lugar geométrico. Estudiaremos ahora el problema de la determinación de la ecuación de un lugar geométrico en el caso de que la interpretación analítica de la condición o condiciones geométricas definen el lugar geométrico. El método está indicado claramente por dos definiciones previas, la definición 1 del Artículo 14 y la última definición del Artículo 22. Combinando estas dos definiciones tenemos una nueva

DEFINICIÓN. Se llama *ecuación de un lugar geométrico plano* a una ecuación de la forma

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

cuyas soluciones reales para valores correspondientes de x y y son todas las coordenadas de aquellos puntos, y *solamente* de aquellos

puntos, que satisfacen la condición o condiciones geométricas dadas que definen el lugar geométrico.

Nótese que esta definición expresa una condición necesaria y suficiente para que (1) sea la ecuación de un lugar geométrico. De acuerdo con esto, el procedimiento para obtener la ecuación de un lugar geométrico es esencialmente como sigue:

1. Se supone que el punto P, de coordenadas (x, y) es un punto *cualquiera* que satisface la condición o condiciones dadas, y, por tanto, un punto del lugar geométrico.

2. Se expresa, analíticamente, la condición o condiciones geométricas dadas, por medio de una ecuación o ecuaciones en las coordenadas variables x y y.

3. Se simplifica, si hace falta, la ecuación obtenida en el paso 2 de tal manera que tome la forma (1).

4. Se comprueba el recíproco: sean (x_1, y_1) las coordenadas de *cualquier* punto que satisfacen (1) de tal manera que la ecuación

$$f(x_1, y_1) = 0 \qquad (2)$$

es verdadera. Si de (2) se puede deducir la expresión analítica de la condición o condiciones geométricas dadas, cuando se aplica al punto (x_1, y_1), entonces (1) es la ecuación del lugar geométrico que se buscaba.

En la práctica se omite, generalmente, el paso 4, ya que la repetición del trabajo del paso 3 al paso 2 es, generalmente, inmediata. Nótese en el paso 1 que, al tomar P como un punto *cualquiera* del lugar geométrico, estamos considerando *todos* los puntos de ese lugar geométrico.

Ahora aplicaremos este procedimiento a dos ejemplos. Se recomienda al lector que estudie cuidadosamente estos ejemplos, porque una gran parte de nuestro futuro trabajo en Geometría analítica será la determinación de las ecuaciones de lugares geométricos.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que siempre equidista de dos puntos dados $A(-1, 2)$ y $B(4, -1)$.

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Entonces P debe satisfacer la condición geométrica de que los segmentos PA y PB sean iguales en longitud, o sea, que

$$|\overline{PA}| = |\overline{PB}| \qquad (3)$$

2. Por el teorema 2 del Artículo 6, tenemos

$$|\overline{PA}| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2},$$

$$|\overline{PB}| = \sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2}.$$

Por tanto, la condición geométrica dada (3) esta expresada analíticamente por la ecuación

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}. \qquad (4)$$

3. Si elevamos al cuadrado ambos miembros de (4), desarrollamos, trasponemos y simplificamos, la ecuación se reduce a

$$5x - 3y - 6 = 0. \qquad (5)$$

4. Sean (x_1, y_1) las coordenadas de un punto cualquiera P_1 que satisfacen (5) de tal manera que la ecuación

$$5x_1 - 3y_1 - 6 = 0 \qquad (6)$$

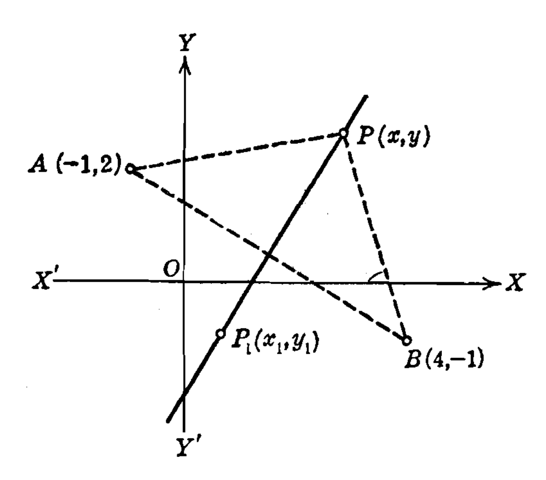


Fig. 32

es verdadera. Invirtiendo los pasos dados para reducir (4) a (5), podemos demostrar que de la ecuación (6) se deduce la ecuación

$$\sqrt{(x_1+1)^2+(y_1-2)^2} = \sqrt{(x_1-4)^2+(y_1+1)^2},$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (3) aplicada al punto P_1.

Luego (5) es la ecuación buscada. El lugar geométrico, que aparece en la figura 32, es la perpendicular al segmento AB en su punto medio, es decir, la *mediatriz* del segmento AB.

Ejemplo 2. Un punto se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual a su distancia del punto $A(4, 0)$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Sea B el pie de la perpendicular bajada de P al eje Y (fig. 33). Según el problema, P debe satisfacer la condición geométrica

$$|\overline{PB}| = |\overline{PA}|. \qquad (7)$$

2. Por definición de abscisa (Art. 4),

$$|\overline{PB}| = |x|,$$

y por el teorema 2 del Artículo 6,

$$|\overline{PA}| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}.$$

Por tanto, la condición geométrica (7) está expresada, analíticamente, por la ecuación

$$|x| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}. \qquad (8)$$

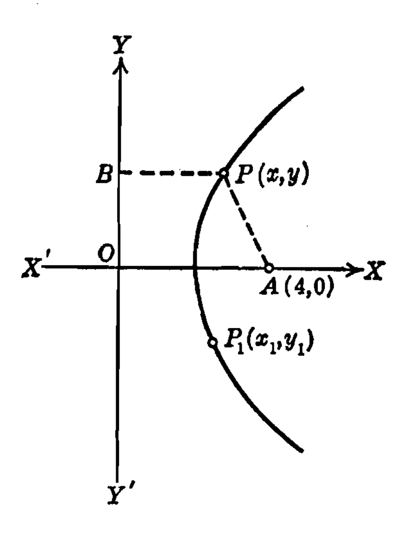


Fig. 33

3. Elevando al cuadrado ambos miembros de (8), desarrollando, y trasponiendo, obtenemos

$$y^2 - 8x + 16 = 0. \qquad (9)$$

4. Si (x_1, y_1) son las coordenadas de cualquier punto P_1 que satisfacen (9), entonces

$$y_1^2 - 8x_1 + 16 = 0. \qquad (10)$$

Si aplicamos a (10), en orden inverso, las mismas operaciones empleadas para reducir (8) a (9), obtenemos

$$|x_1| = \sqrt{(x_1-4)^2 + y_1^2},$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (7) aplicada al punto P_1.

Por tanto, (9) es la ecuación buscada. El lugar geométrico, una parábola, está trazado en la figura 33.

EJERCICIOS. Grupo 8

En cada uno de los ejercicios siguientes se recomienda al lector que, después de obtener la ecuación del lugar geométrico, construya la curva de acuerdo con lo dicho en el Artículo 19.

1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que: *a*) se conserva siempre a 2 unidades a la izquierda del eje Y; *b*) está siempre 4 unidades arriba del eje X; *c*) está siempre a igual distancia de los ejes X y Y.

2. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que: *a*) su abscisa es siempre igual al doble de su ordenada; *b*) su ordenada es siempre igual a su abscisa incrementada en 2; *c*) su abscisa es siempre igual a la recíproca de su ordenada.

3. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje Y disminuída en 3 es siempre igual al doble de su distancia al eje X. Hallar la ecuación de su lugar geométrico y dar su interpretación geométrica.

4. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al origen es siempre igual a 2. Hallar la ecuación de su lugar geométrico y dar su intepretación geométrica.

5. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(2, 3)$ es siempre igual a 5. Hallar la ecuación de su lugar geométrico y dar su interpretación geométrica.

6. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los dos puntos $A(1, -2)$ y $B(5, 4)$. Identificar el lugar geométrico, y construirlo gráficamente.

7. Una recta contiene los dos puntos $A(-1, 5)$ y $B(1, 3)$. Expresar, analíticamente, el hecho de que un punto cualquiera $P(x, y)$ está sobre la recta. Deducir la ecuación de la recta.

8. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia al punto $(4, 1)$ es siempre igual a su distancia del eje Y.

9. Una recta l, que pasa por el punto $A(-5, 1)$, es perpendicular a otra cuya pendiente es $\frac{1}{2}$. Expresar, analíticamente, el hecho de que un punto cualquiera $P(x, y)$ está sobre la recta l, y deducir, de aquí, su ecuación.

10. Una circunferencia de radio 3 tiene su centro en el punto $C(-3, -2)$. A partir de la definición, hallar la ecuación de esta circunferencia.

11. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje X es siempre igual a su distancia del punto $A(0, 4)$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

12. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los dos puntos $A(3, 5)$ y $B(-4, 2)$ es siempre igual a 30.

13. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los dos puntos $A(2, -2)$ y $B(4, 1)$ es siempre igual a 12. (Dos casos.)

14. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(2, 4)$ es siempre igual a su distancia del eje Y aumentada en 3. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

15. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos $A(3, 0)$ y $B(-3, 0)$ es siempre igual a 8.

16. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -3)$ es siempre igual a 8. Compárese el resultado con el obtenido en el ejercicio 15.

17. Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los dos puntos $A(3, 0)$ y $B(-3, 0)$ es siempre igual a 4. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

18. Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los dos puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -3)$ es siempre igual a 4. Hallar la ecuación de su lugar geométrico. Comparar el resultado con el obtenido en el ejercicio 17.

19. Un círculo de radio 4 tiene su centro en el punto $C(1, -1)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de todos sus radios.

20. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(3, 1)$ es siempre igual a la mitad de su distancia al eje Y. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

21. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(-1, 2)$ es siempre el doble de su distancia al eje X. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

22. Un segmento rectilíneo de longitud 4 se mueve de tal manera que uno de los puntos extremos permanece siempre sobre el eje X y el otro permanece siempre sobre el eje Y. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio del segmento. *Sugestión.* Véase el ejercicio 5 del grupo 4, Art. 11.

23. Dos de los vértices de un triángulo son los puntos fijos $A(-1, 3)$ y $B(5, 1)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice C si se mueve de tal manera que la pendiente del lado AC es siempre el doble de la del lado BC.

24. Dos de los vértices de un triángulo son los puntos fijos $A(1, 0)$ y $B(5, 0)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice C si se mueve de tal manera que la diferencia entre las longitudes de los lados AC y BC es siempre igual a la mitad de la longitud del lado AB.

25. Los extremos de la base de un triángulo son los puntos $A(0, 0)$ y $B(3, 0)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto C si se mueve de tal manera que el ángulo en la base CAB es siempre igual al doble del ángulo en la base CBA.

CAPITULO III

LA LINEA RECTA

24. Introducción. Hemos llegado a un punto en que debemos dar un giro a nuestro estudio de la Geometría analítica. Hasta aquí hemos deducido algunas relaciones fundamentales y considerado métodos generales para la construcción de curvas y la obtención de la ecuación de un lugar geométrico. Pero todavía no hemos hecho ningún intento sistemático de identificar las ecuaciones y sus lugares geométricos de una manera específica. Más aun, hasta este momento, no hemos establecido ninguna de las propiedades particulares que puede poseer una curva. En éste y en los siguientes capítulos, haremos un estudio detallado de la línea recta y de algunas de las curvas que son de máxima importancia en la Geometría analítica y sus aplicaciones. Naturalmente comenzaremos con el estudio de la línea recta debido a que su ecuación es la más sencilla.

25. Definición de línea recta. Nuestro primer objetivo en este capítulo es la obtención de la ecuación de la recta. Ya dijimos en el Artículo 23, que la ecuación de un lugar geométrico se obtiene a partir de un número suficiente de las propiedades únicas que lo definen. El estudiante recordará varias definiciones de la línea recta dadas en sus estudios anteriores, siendo la más común la que se expresa diciendo que una recta es la distancia más corta entre dos puntos. Pero esta definición se apoya en el significado del término distancia. Si tratamos ahora de definir la distancia, veremos que cualquier explicación nos devuelve al punto de partida. Por esta razón, los tratados superiores de Geometría, construídos sobre bases axiomáticas, admiten la existencia de la línea recta como un postulado. Nosotros admitiremos la siguiente definición de línea recta basada en el concepto de pendiente dado en el Artículo 8.

Definición de línea recta. Llamamos línea recta al lugar geométrico de los puntos tales que tomados *dos puntos diferentes cualesquiera*

$P_1(x_1, y_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2)$ *del lugar*, el valor de la pendiente *m* calculado por medio de la fórmula del teorema 4, Artículo 8,

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2,$$

resulta siempre constante.

26. Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada. Geométricamente, una recta queda perfectamente determinada por uno de sus puntos y su dirección. Analíticamente, la

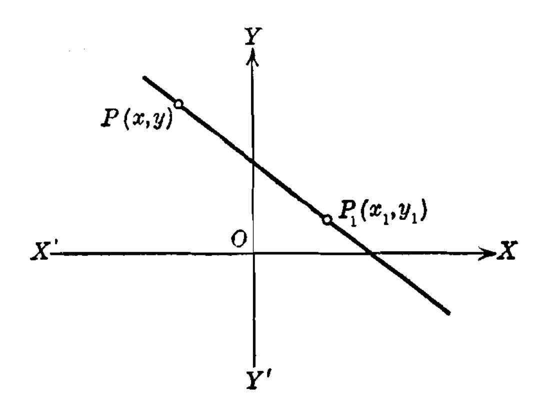


Fig. 34

ecuación de una recta puede estar perfectamente determinada si se conocen las coordenadas de uno de sus puntos y su ángulo de inclinación (y, por tanto, su pendiente).

TEOREMA 1. *La recta que pasa por el punto dado* $P_1(x_1, y_1)$ *y tiene la pendiente dada* m, *tiene por ecuación*

$$y - y_1 = m(x - x_1). \qquad (1)$$

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con el método dado en el Artículo 23, sea $P(x, y)$ (fig. 34) un punto cualquiera de la recta, diferente del punto dado $P_1(x_1, y_1)$. Por la definición de recta (Art. 25), las coordenadas del punto $P(x, y)$ satisfacen la ecuación

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

de la cual obtenemos, inmediatamente, quitando denominadores, la ecuación (1).

Recíprocamente, si las coordenadas de cualquier otro punto $P_2(x_2, y_2)$ satisfacen (1), tenemos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

que es la expresión analítica de la definición de recta, aplicada a los dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Por tanto, P_2 está sobre la recta. Esto completa la demostración.

NOTAS. 1. Como la ecuación (1) está dada en función de un punto y la pendiente, se llama, a veces, *de la forma de punto y pendiente*.

2. Una recta que coincide o es paralela al eje Y no tiene pendiente (Art. 8). Por tanto, la ecuación (1) no puede representar a una recta de tal naturaleza, ni nuestra definición de recta puede aplicarse a ella. Para este caso, se ha demostrado en el Artículo 18 que la ecuación de la recta es de la forma $x = k$, en donde k es cualquier número real.

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4, -1)$ y tiene un ángulo de inclinación de 135°.

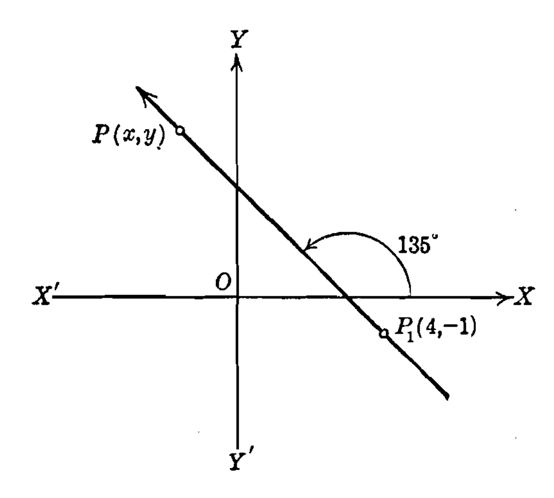


Fig. 35

Solución. La recta cuya ecuación se busca es la trazada en la figura 35. Por el Artículo 8, la pendiente de esta recta es

$$m = \operatorname{tg} 135° = -1.$$

Por tanto, por el teorema 1, la ecuación de la recta es

$$y - (-1) = -1(x - 4),$$

o sea,

$$x + y - 3 = 0.$$

27. Otras formas de la ecuación de la recta. Una recta es o no paralela al eje Y. Si es paralela al eje Y su ecuación es de la forma $x = k$; si no es paralela a dicho eje, su pendiente está definida y su ecuación está dada por el teorema 1 del Artículo 26 Como todas las rectas caen bajo una de estas dos clasificaciones, cualquiera otra forma de la ecuación de una recta debe reducirse, necesariamente, a una de estas dos formas. Para algunos tipos de problemas, sin embargo, son más convenientes otras formas; a continuación consideramos algunas de ellas.

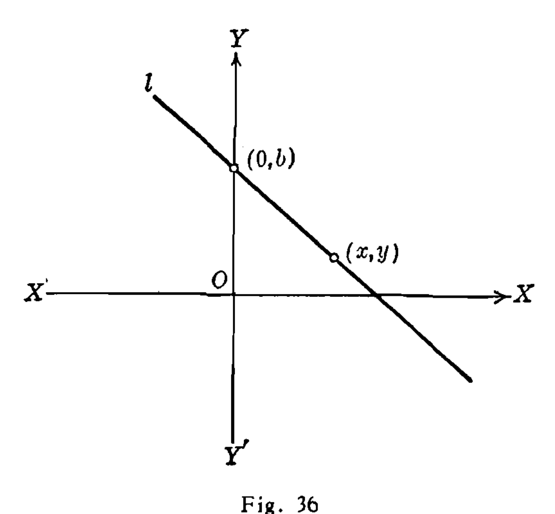


Fig. 36

a) *Ecuación de la recta dada su pendiente y su ordenada en el origen.* Consideremos una recta l (fig. 36) cuya pendiente es m y cuya *ordenada en el origen*, es decir, su intercepción con el eje Y, es b. Como se conoce b, el punto cuyas coordenadas son $(0, b)$ está sobre la recta (Art. 15). Por tanto, el problema se reduce a hallar la ecuación de la recta que pasa por un punto $(0, b)$ y tiene una pendiente dada. Según el teorema 1 del Artículo 26 la ecuación buscada es

$$y - b = m(x - 0),$$

o sea,

$$y = mx + b.$$

Podemos enunciar este resultado como el

TEOREMA 2. *La recta cuya pendiente es* m *y cuya ordenada en el origen es* b *tiene por ecuación*

$$y = mx + b.$$

NOTA. Una recta paralela al eje Y no tiene ordenada en el origen. En este caso no puede usarse la forma de ecuación que acabamos de obtener. Como ya dijimos la ecuación de una recta tal es de la forma $x = k$.

b) *Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.* Geométricamente, una recta queda perfectamente determinada por dos cualesquiera de sus puntos. Analíticamente, la ecuación de una recta también queda perfectamente determinada conociendo las coordenadas de dos cualesquiera de sus puntos.

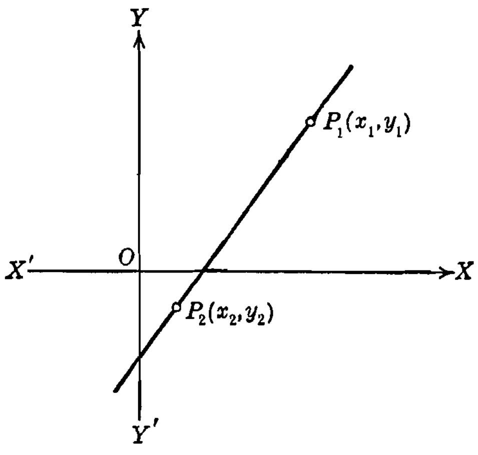


Fig. 37

TEOREMA 3. *La recta que pasa por dos puntos dados* $P_1(x_1, y_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2)$ *tiene por ecuación*

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1), \quad x_1 \neq x_2. \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea la recta P_1P_2 de la figura 37. Como se conocen dos de sus puntos, su pendiente está dada por (Teorema 4, Artículo 8)

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2.$$

Por tanto, con esta pendiente y el punto $P_1(x_1, y_1)$, el problema se reduce a hallar la ecuación de una recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada. En consecuencia, sustituyendo este valor de la pendiente en la ecuación (1) del Teorema 1, Art. 26, obtenemos la forma (1) tal como se quería demostrar.

NOTAS. 1. Si $x_1 = x_2$, la ecuación (1) no puede usarse. En este caso, la recta es paralela al eje Y, y su ecuación es $x = x_1$.

2. Si se multiplica la ecuación (1) por $x_1 - x_2$ y se pasan todos sus términos al primer miembro, se obtiene

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 - y_2 x + x_2 y + y_1 x - x_1 y = 0, \qquad (2)$$

que puede escribirse en forma de determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

En efecto, si desarrollamos este determinante por menores con respecto a los elementos de la tercera columna, obtendremos el primer miembro de (2). Más adelante deduciremos la ecuación (3) por otro método (Art. 35) y será discutida en esa ocasión.

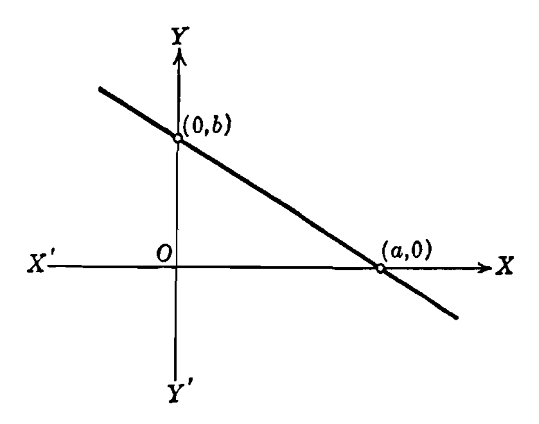


Fig. 38

c) *Ecuación simétrica de la recta.* Sean $a \neq 0$ y $b \neq 0$ los segmentos que una recta determina sobre los ejes X y Y (fig. 38), es decir, sus intercepciones. Entonces $(a, 0)$ y $(0, b)$ son dos puntos de la recta (Art. 15). Por tanto, el problema de obtener la ecuación de una recta cuando se conocen los segmentos que determina sobre los ejes se reduce a hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, y tenemos, por el teorema 3,

$$y - 0 = \frac{0 - b}{a - 0}(x - a),$$

de donde

$$ay = -bx + ab.$$

Trasponiendo $-bx$ al primer miembro y dividiendo por ab, obtenemos

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Esta ecuación es la llamada ecuación simétrica de la recta. De aquí el siguiente

TEOREMA 4. *La recta cuyas intercepciones con los ejes* X *y* Y *son* a $\neq$ 0 *y* b $\neq$ 0, *respectivamente, tiene por ecuación*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (4)$$

NOTAS. 1. Si $a = 0$, entonces también $b = 0$, y la forma simétrica no puede usarse. En este caso, solamente se conoce un punto, el origen, y no es suficiente para determinar una recta.

2. Como una recta queda perfectamente determinada por dos cualesquiera de sus puntos, la manera más conveniente de trazar una recta a partir de su ecuación

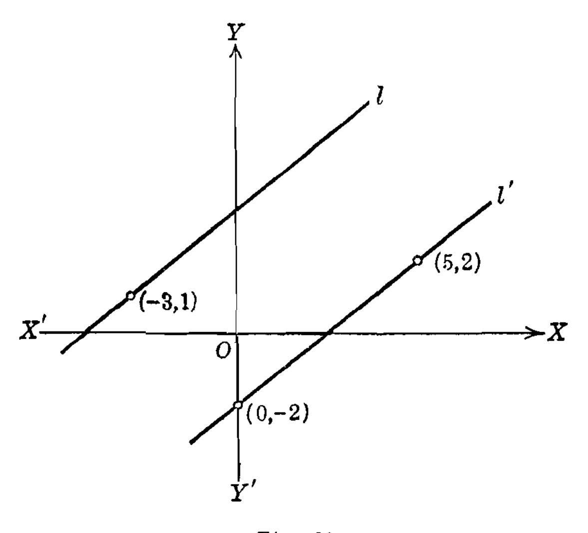


Fig. 39

es determinar las dos intersecciones con los ejes. Si la recta pasa por el origen, basta determinar otro punto cuyas coordenadas satisfagan la ecuación.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-3, 1)$ y es paralela a la recta determinada por los dos puntos $(0, -2)$ y $(5, 2)$.

Solución. Como se conoce un punto de la recta requerida l (fig. 39), solamente es necesario obtener su pendiente que, según sabemos, es la misma que la de la recta paralela l' que pasa por los dos puntos $(0, -2)$, $(5, 2)$ (corolario 1 del teorema 5, Art. 10). La pendiente de l' es, por el teorema 4 del Artículo 8,

$$m = \frac{2 - (-2)}{5 - 0} = \frac{4}{5}.$$

Por tanto, según el teorema 1, Artículo 26, la ecuación de l es

$$y - 1 = \tfrac{4}{5}(x + 3),$$

o sea,

$$4x - 5y + 17 = 0.$$

Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la mediatriz (perpendicular en su punto medio) del segmento $(-2, 1)$, $(3, -5)$.

Solución. Supongamos que la mediatriz es la recta l y que el segmento es l' (fig. 40). Las coordenadas del punto medio M de l' son $(\frac{1}{2}, -2)$ por el corolario al teorema 3, Artículo 7. La pendiente de l', por el teorema 4 del Artículo 8, es

$$m' = \frac{1-(-5)}{-2-3} = -\frac{6}{5}.$$

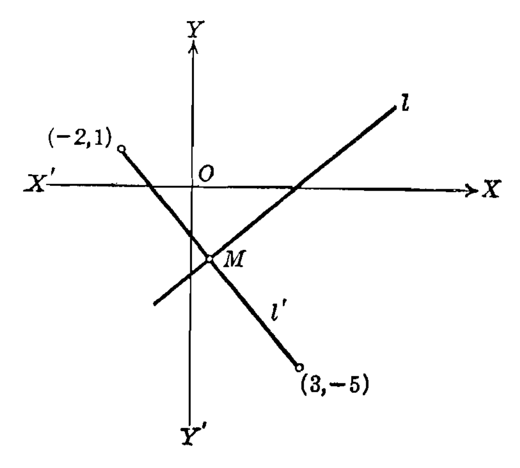


Fig. 40

Como l es perpendicular a l', su pendiente, por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 10, es $m = \frac{5}{6}$. Por tanto, por el teorema 1, Artículo 26, la ecuación de l es

$$y + 2 = \tfrac{5}{6}(x - \tfrac{1}{2}),$$

la cual se reduce a

$$10x - 12y - 29 = 0.$$

EJERCICIOS. Grupo 9

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 5)$ y tiene de pendiente 2.

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-6, -3)$ y tiene un angulo de inclinación de 45°.

3. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y cuya intercepción con el eje Y es -2.

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos $A(4, 2)$ y $B(-5, 7)$.

5. Los vértices de un cuadrilátero son $A(0, 0)$, $B(2, 4)$, $C(6, 7)$, $D(8, 0)$. Hallar las ecuaciones de sus lados.

6. Los segmentos que una recta determina sobre los ejes X y Y son 2 y -3, respectivamente. Hallar su ecuación.

7. Una recta pasa por los dos puntos $A(-3, -1)$ y $B(2, -6)$. Hallar su ecuación en la forma simétrica.

8. Una recta de pendiente -2 pasa por el punto $A(-1, 4)$. Hallar su ecuación en la forma simétrica.

9. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$.

10. Una recta pasa por el punto $A(7, 8)$ y es paralela a la recta $C(-2, 2)$ y $D(3, -4)$. Hallar su ecuación.

11. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, 4)$, y determina sobre el eje X el segmento -9.

12. Demostrar que los puntos $A(-5, 2)$, $B(1, 4)$ y $C(4, 5)$ son colineales hallando la ecuación de la recta que pasa por dos de estos puntos.

13. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que los ejes coordenados determinan en la recta $5x + 3y - 15 = 0$.

Los ejercicios 14-21 se refieren al triángulo cuyos vértices son $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ y $C(6, -3)$.

14. Hallar las ecuaciones de los lados.

15. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el vértice A y es paralela al lado opuesto BC.

16. Hallar las ecuaciones de la rectas que pasan por el vértice B y trisecan al lado opuesto AC.

17. Hallar los vértices del triángulo formado por las rectas que pasan por los vértices A, B y C y son paralelas a los lados opuestos.

18. Hallar las ecuaciones de las medianas y las coordenadas de su punto de intersección.

19. Hallar las ecuaciones de las mediatrices de los lados y las coordenadas de su punto de intersección. Este punto se llama *circuncentro*.

20. Hallar las ecuaciones de las alturas y su punto de intersección. Este punto se llama *ortocentro*.

21. Hallar las coordenadas del pie de la altura correspondiente al lado AC. A partir de estas coordenadas hállese la longitud de la altura y luego el área del triángulo.

22. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -4, y que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y - 8 = 0$ y $3x - 2y + 9 = 0$.

23. Las ecuaciones de los lados de un cuadrilátero son $3x - 8y + 36 = 0$, $x + y - 10 = 0$, $3x - 8y - 19 = 0$ y $x + y + 1 = 0$. Demostrar que la figura es un paralelogramo, y hallar las coordenadas de sus vértices.

24. Hallar el área del triángulo rectángulo formado por los ejes coordenados y la recta cuya ecuación es $5x + 4y + 20 = 0$.

25. Las coordenadas de un punto P son $(2, 6)$, y la ecuación de una recta l es $4x + 3y = 12$. Hallar la distancia del punto P a la recta l siguiendo en orden los siguientes pasos: *a*) Hallar la pendiente de l. *b*) Hallar la ecuación de la recta l' que pasa por P y es perpendicular a l. *c*) Hallar las coordenadas de P', punto de intersección de l y l'. *d*) Hallar la longitud del segmento PP'.

26. El punto P de ordenada 10 está sobre la recta cuya pendiente es 3 y que pasa por el punto $A(7, -2)$. Calcular la abscisa de P.

27. Determinar el valor de los coeficientes A y B de la ecuación $Ax - By + 4 = 0$ de una recta, si debe pasar por los puntos $C(-3, 1)$ y $D(1, 6)$.

28. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $5x - 7y + 27 = 0$, $9x - 2y - 15 = 0$ y $4x + 5y + 11 = 0$. Hallar sus ángulos y comprobar los resultados.

29. Deducir la ecuación de la recta cuya pendiente es m y determina sobre el eje X el segmento a. Compárese este resultado con la ecuación de una recta conocida su pendiente y su ordenada en el origen, dada en el Artículo 27.

30. Una recta pasa por los dos puntos $A(-1, 3)$ y $B(5, 4)$. Escríbase su ecuación en forma de determinante. Verifíquese el resultado desarrollando el determinante.

28. Forma general de la ecuación de una recta. En los artículos precedentes hemos visto que la ecuación de una recta cualquiera, en el plano coordenado, es de la forma lineal

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1)$$

en donde ya sea A o B debe ser diferente de cero y C puede o no ser igual a cero. La ecuación (1) se llama la *forma general* de la ecuación de una recta.

Ahora consideraremos el problema inverso, a saber, la ecuación lineal (1), ¿representa siempre una línea recta? Para contestar a esta pregunta examinaremos las dos formas posibles de la ecuación (1) con respecto al coeficiente de y, es decir, las formas para $B = 0$ y $B \neq 0$.

Caso I. $B = 0$. Si $B = 0$, entonces $A \neq 0$, y la ecuación (1) se reduce a la forma

$$x = -\frac{C}{A}. \qquad (2)$$

Pero (2) es de la forma $x = k$, de la que anteriormente se demostró que es la ecuación de una recta paralela al eje Y (Art. 18).

Caso II. $B \neq 0$. Si $B \neq 0$, podemos dividir la ecuación (1) por B, y entonces por trasposición se reduce a la forma

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \qquad (3)$$

Pero (3) está en la forma $y = mx + b$ (Art. 27) y, por tanto, es la ecuación de una recta cuya pendiente es $-\frac{A}{B}$ y cuya ordenada en el origen es $-\frac{C}{B}$.

En consecuencia, vemos que en todos los casos la ecuación (1) representa una recta. Vamos a hacer un resumen de estos resultados en el

TEOREMA 5. *Una ecuación lineal en las variables* x *y* y *representa una recta y recíprocamente.*

NOTAS. 1. Este teorema muestra lo apropiado del término *lineal* para designar las expresiones algebraicas de primer grado.

2. La pendiente de una recta cualquiera, no paralela al eje Y, puede obtenerse directamente a partir de su ecuación. Para ello bastará reducir la forma dada (1) a la forma (3) ; el coeficiente de x es la pendiente. Más sencillamente, todo lo que tenemos que hacer es dividir en (1) el coeficiente de x por el coeficiente de y y después cambiar el signo.

29. Discusión de la forma general. Ahora haremos algunas observaciones de gran importancia, no sólo con respecto a la recta, sino también a toda la Geometría analítica. Acabamos de ver que la ecuación de una recta es, necesariamente, de la forma

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Por tanto, al buscar la ecuación de una recta particular, sabemos *a priori* que es de la forma lineal (1) ; el problema que queda por resolver es el de determinar los coeficientes A, B y C. El estudio de los coeficientes es, pues, de gran importancia. Este último enunciado, sin embargo, no está restringido a la línea recta solamente ; a medida que avancemos en el estudio de la Geometría analítica veremos que, una vez que se haya establecido la ecuación general de un tipo particular de curva, las propiedades y características distintivas de esa curva pueden determinarse por una investigación de los coeficientes de su ecuación.

Consideremos los tres coeficientes A, B y C en la forma general (1). Notamos, en primer lugar, que todos son constantes reales y arbitrarias, es decir, que pueden tomar cualquier valor real, siempre que A y B no sean simultáneamente nulos. Puede parecer a primera vista que estas tres constantes son independientes. Pero puede demostrarse fácilmente que, en realidad, solamente hay dos constantes independientes. En efecto, uno, cuando menos, de los coeficientes A y B debe ser diferente de cero. Por tanto, si $A \neq 0$, podemos dividir la ecuación (1) por A de manera que tome la forma

$$x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A} = 0, \qquad (2)$$

en la que hay solamente dos constantes independientes que son las razones arbitrarias B/A y C/A. Sabemos, por Algebra, que para calcular estas constantes se necesitan dos ecuaciones independientes que las contengan, y que cada una de estas ecuaciones se obtiene a

partir de una condición independiente. Por tanto, *analíticamente, la ecuación de una recta queda perfectamente determinada por dos condiciones independientes*. Geométricamente, una recta también queda determinada por dos condiciones independientes; luego una recta está completamente determinada si se conocen dos de sus puntos, o uno de sus puntos y su dirección.

Ejemplo. Hallar los valores que deben tener los coeficientes de la ecuación general $Ax + By + C = 0$ de una recta, para que pase por los dos puntos $(-1, 4)$ y $(3, -2)$. De ahí hallar la ecuación de la recta.

Solución. Como los dos puntos están sobre la recta, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de dicha recta (Art. 14). Por tanto, para el punto $(-1, 4)$, tenemos:

$$-A + 4B + C = 0; \tag{3}$$

y para el punto $(3, -2)$ tenemos

$$3A - 2B + C = 0. \tag{4}$$

Resolviendo las ecuaciones (3) y (4) para A y B en términos de C, obtenemos

$$A = -\tfrac{3}{5}C, \quad B = -\tfrac{2}{5}C.$$

Si sustituímos estos valores de A y B en la forma general, obtenemos

$$-\tfrac{3}{5}Cx - \tfrac{2}{5}Cy + C = 0.$$

Dividiendo toda la ecuación por C y simplificando, obtenemos como ecuación de la recta

$$3x + 2y - 5 = 0,$$

cuyos coeficientes son $A = 3$, $B = 2$, $C = -5$.

NOTA. Si $C = 0$, el problema no puede resolverse tal como se ha hecho. En este caso podemos resolver (3) y (4) para A y C en términos de B si $B \neq 0$, o para B y C en términos de A si $A \neq 0$.

30. Posiciones relativas de dos rectas. Ahora consideraremos las posiciones relativas de dos rectas, cuyas ecuaciones pueden ponerse en las formas generales:

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

$$A'x + B'y + C' = 0. \tag{2}$$

En particular, determinaremos las condiciones analíticas bajo las cuales estas dos rectas son: *a*) paralelas; *b*) perpendiculares; *c*) coinciden; *d*) se cortan en uno y solamente en un punto.

a) La pendiente de (1) es $-\dfrac{A}{B}$ si $B \neq 0$, y la pendiente de (2) es $-\dfrac{A'}{B'}$ si $B' \neq 0$. Por el corolario 1 al teorema 5, Artículo 10,

una condición necesaria y suficiente para que las rectas (1) y (2) sean paralelas es que

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'},$$

o sea,

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'},$$

es decir, los coeficientes de x y y deben ser proporcionales.

Si $B = 0$, la recta (1) es paralela al eje Y. Si la recta (2) es paralela a la (1), también es paralela al eje Y, luego también $B' = 0$. En este caso, la última proporción establecida no tiene sentido; lo mismo sucede si A y A' son cero, es decir, si ambas rectas son paralelas al eje X. Pero, si escribimos esta relación en la forma

$$AB' - A'B = 0,$$

tenemos una relación verdadera para todos los casos.

b) Por el corolario 2 al teorema 5, Artículo 10, una condición necesaria y suficiente para que las rectas (1) y (2) sean perpendiculares es que

$$\left(-\frac{A}{B}\right)\left(-\frac{A'}{B'}\right) = -1,$$

o sea,

$$AA' + BB' = 0.$$

El estudiante debe demostrar que esta última relación es también verdadera si una de las rectas es paralela al eje Y y, por lo tanto, no tiene pendiente.

c) Dos rectas coinciden si tienen un punto común y la misma dirección o pendiente. La intersección de la recta (1) con el eje X es el punto de abscisa $-\frac{C}{A}$, y la de la recta (2) es el punto de abscisa $-\frac{C'}{A'}$. Por tanto, debemos tener

$$-\frac{C}{A} = -\frac{C'}{A'},$$

o sea,

$$\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}. \qquad (3)$$

También, por ser las pendientes iguales,

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'},$$

o sea,

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}. \tag{4}$$

De (3) y (4) tenemos

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}; \tag{5}$$

es decir, dos rectas coinciden si y solamente si sus coeficientes correspondientes son proporcionales.

La proporción (5) se ha escrito suponiendo que todos los coeficientes de las ecuaciones (1) y (2) son diferentes de cero. Si, en vez de esto, uno o más coeficientes son cero, esta proporción no tiene sentido en su totalidad o en parte. Pero si escribimos

$$A = kA', \quad B = kB', \quad C = kC',$$

en donde k es una constante diferente de cero, obtendremos relaciones verdaderas para todos los casos.

d) Geométricamente, dos rectas se cortan en uno y solamente en un punto en el caso de que no sean paralelas. Analíticamente, si las rectas (1) y (2) no son paralelas, del apartado (*a*) anterior se deduce que

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}, \text{ o sea, que } AB' - A'B \neq 0.$$

Podemos hacer el resumen de los resultados anteriores en el

TEOREMA 6. *Si las ecuaciones de dos rectas son* $Ax + By + C = 0$ *y* $A'x + B'y + C' = 0$, *las relaciones siguientes son condiciones necesarias y suficientes para*

a) *Paralelismo*, $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$, *o sea*, $AB' - A'B = 0$;

b) *Perpendicularidad*, $AA' + BB' = 0$;

c) *Coincidencia*, $A = kA'$, $B = kB'$, $C = kC'$ $(k \neq 0)$;

d) *Intersección en uno y solamente un punto*,

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}, \text{ o sea, } AB' - A'B \neq 0.$$

Ejemplo. La ecuación de una recta l es $5x - 7y + 11 = 0$. Escribir la ecuación que representa a todas las rectas paralelas a l. A partir de esta última ecuación hallar la de la recta paralela a l y que pasa por el punto (4, 2).

Solución. Representemos por $Ax + By + C = 0$ la ecuación de todas las rectas paralelas a l. Por el apartado (*a*) del teorema 6 se verifica

$$\frac{A}{5} = \frac{B}{-7}, \quad \text{o sea,} \quad B = -\frac{7}{5}A.$$

Por tanto, la ecuación de todas las rectas paralelas a l es

$$Ax - \frac{7A}{5}y + C = 0,$$

de donde,

$$5x - 7y + \frac{5C}{A} = 0,$$

o sea,

$$5x - 7y + k = 0, \qquad (6)$$

en donde $k = \frac{5C}{A}$ es una constante arbitraria.

Si la recta (6) debe pasar por el punto (4, 2), las coordenadas deben satisfacer (6). Por tanto:

$$5 \cdot 4 - 7 \cdot 2 + k = 0,$$

de donde $k = -6$, y la recta buscada es

$$5x - 7y - 6 = 0.$$

EJERCICIOS. Grupo 10

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Transformar la forma general de la ecuación de una recta a la forma simétrica. Establecer las restricciones a que deben estar sometidos los coeficientes para permitir esta transformación.

2. Hallar la ecuación de la recta, determinando los coeficientes de la forma general, que pasa por el punto $(-2, 4)$ y tiene una pendiente igual a -3.

3. Hallar la ecuación de una recta, determinando los coeficientes de la forma general, si los segmentos que determina sobre los ejes X y Y, es decir, sus intercepciones, son 3 y -5, respectivamente.

4. Hallar la ecuación de la recta, determinando los coeficientes de la forma general, que es perpendicular a la recta $3x - 4y + 11 = 0$ y pasa por el punto $(-1, -3)$.

5. Hallar el valor de k para que la recta $kx + (k-1)y - 18 = 0$ sea paralela a la recta $4x + 3y + 7 = 0$.

6. Determinar el valor de k para que la recta $k^2x + (k+1)y + 3 = 0$ sea perpendicular a la recta $3x - 2y - 11 = 0$.

7. Hallar la pendiente e intercepciones de la recta $7x - 9y + 2 = 0$.

8. Hallar la pendiente, ángulo de inclinación y las intercepciones de la recta que pasa por el punto (2, 3) y es perpendicular a la recta $2x - 7y + 2 = 0$.

9. Determinar el valor de k para que la recta $4x + 5y + k = 0$ forme con los ejes coordenados un triángulo rectángulo de área igual a $2\frac{1}{2}$ unidades cuadradas

10. En las ecuaciones $ax + (2 - b)y - 23 = 0$ y $(a - 1)x + by + 15 = 0$ hallar los valores de a y b para que representen rectas que pasan por el punto $(2, -3)$.

11. Demostrar que la recta que pasa por los puntos $(4, -1)$ y $(7, 2)$ bisecta al segmento cuyos extremos son los puntos $(8, -3)$ y $(-4, -3)$.

12. Demostrar que las rectas $2x - y - 1 = 0$, $x - 8y + 37 = 0$, $2x - y - 16 = 0$ y $x - 8y + 7 = 0$ forman un paralelogramo, y hallar las ecuaciones de sus diagonales.

13. Demostrar que las rectas $5x - y - 6 = 0$, $x + 5y - 22 = 0$, $5x - y - 32 = 0$ y $x + 5y + 4 = 0$ forman un cuadrado.

14. Demostrar que los ángulos suplementarios formados por las dos rectas $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$ están dados por las fórmulas

$$\operatorname{tg} \theta = \pm \frac{A'B - AB'}{AA' + BB'}.$$

15. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas $4x - 9y + 11 = 0$ y $3x + 2y - 7 = 0$.

16. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(2, -1)$ y que forman cada una un ángulo de 45° con la recta $2x - 3y + 7 = 0$.

17. A partir del resultado del ejercicio 14, deducir las condiciones necesarias y suficientes para el paralelismo y perpendicularidad de dos rectas, dadas en los apartados (*a*) y (*b*) del teorema 6, Artículo 30.

18. Si k es una constante cualquiera diferente de cero, demuéstrese que todo punto que esté sobre la recta $Ax + By + C = 0$ también estará sobre la recta $kAx + kBy + kC = 0$. Por tanto, dedúzcase la condición necesaria y suficiente para la coincidencia de dos rectas, dada en el apartado (*c*) del teorema 6, Artículo 30.

19. Por medio de determinantes obténgase la condición necesaria y suficiente para que las dos rectas $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$ se corten en uno y solamente un punto, dada en el apartado (*d*) del teorema 6, Artículo 30. *Sugestión*: Véase apéndice I*B*, 6.

20. Si tres rectas se cortan en un punto común, se dice que son *concurrentes*. Si las tres rectas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ y $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ son concurrentes, demuéstrese que sus coeficientes satisfacen la condición

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

El recíproco es verdad si c/par es no paralelo

21. Demostrar que las tres rectas $3x - 5y + 7 = 0$, $2x + 3y - 8 = 0$ y $6x - 7y + 8 = 0$ son concurrentes.

22. Demostrar analíticamente que las medianas de cualquier triángulo son concurrentes.

23. Demostrar analíticamente que las mediatrices perpendiculares a los lados en su punto medio en cualquier triángulo son concurrentes.

24. Demostrar analíticamente que las alturas de cualquier triángulo son concurrentes.

25. Los vértices de un triángulo son $(1, 1)$, $(4, 7)$ y $(6, 3)$. Demostrar que el baricentro (punto de intersección de las medianas), el circuncentro (pun-

to de intersección de las mediatrices) y el ortocentro (punto de intersección de las alturas) son colineales.

26. Demostrar analíticamente que el baricentro, circuncentro y ortocentro de cualquier triángulo son colineales. La recta que los une se llama *recta de Euler*.

27. Desde el punto (6, 0) se trazan perpendiculares a los lados $5x - y - 4 = 0$, $y = 1$ y $x - y - 4 = 0$ de un triángulo. Demostrar que los pies de estas perpendiculares son colineales.

28. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (a, b) y por la intersección de las rectas $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ y $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$.

29. Una recta se mueve de tal manera que la suma de los recíprocos de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es siempre igual a una constante $k \neq 0$. Demostrar que la recta pasa siempre por el punto fijo $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$.

30. Hallar la longitud de la perpendicular bajada del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $l : Ax + By + C = 0$. Demostrar, a partir de esto, que la distancia d del punto P_1 a la recta l está dada por

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

31. Forma normal de la ecuación de la recta. Consideremos un segmento OP_1 de longitud p y con uno de sus extremos O siempre en el origen, tal como puede verse en la figura 41. La posición exacta de este segmento de recta en el plano coordenado está determinada por el ángulo ω, que, como en Trigonometría, es el ángulo positivo engendrado por el radio vector OP_1 al girar alrededor del origen (Apéndice IC, 1). De acuerdo con esto, la longitud p se considera siempre *positiva*, y la variación de los valores del ángulo ω viene dada por

$$0° \leq \omega < 360°. \qquad (1)$$

Es evidente que, para un par cualquiera de valores dados de p y ω, la recta l trazada por $P_1(x_1, y_1)$ perpendicular a OP_1 queda perfectamente determinada. Ahora obtendremos la ecuación de l por medio de la fórmula de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada.

Por Trigonometría, para cualquier posición de la recta l,

$$x_1 = p \cos \omega, \quad y_1 = p \operatorname{sen} \omega. \qquad (2)$$

Por tanto, las coordenadas del punto P_1 son $(p \cos \omega, p \operatorname{sen} \omega)$.

Para las posiciones (a) y (b) (fig. 41) el ángulo de inclinación del segmento OP_1 es ω, y, por tanto, su pendiente es $\operatorname{tg} \omega$.

Para las posiciones (c) y (d) (fig. 41) en donde α es el ángulo de inclinación de OP_1, tenemos (Apéndice IC, 3)

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} (180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha .$$

De aquí que para todas las posiciones del segmento OP_1, su pendiente está dada por $\operatorname{tg} \omega$. Como la recta l es perpendicular a OP_1, su

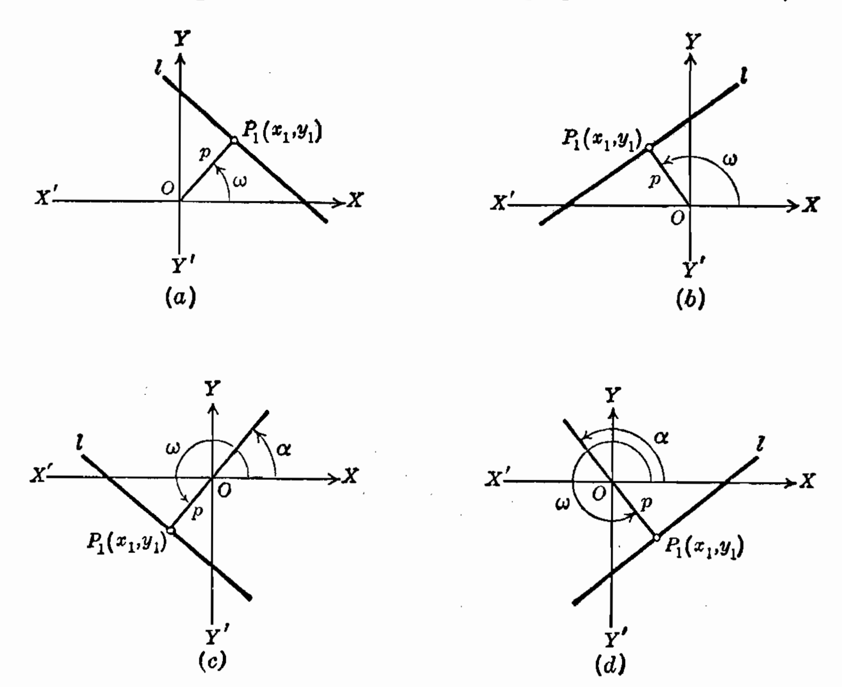


Fig. 41

pendiente para todas las posiciones es, por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 10,

$$m = -\operatorname{ctg} \omega = -\frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}. \qquad (3)$$

Según esto, de (2) y (3), la ecuación de l (teorema 1, Artículo 26) es

$$y - p \operatorname{sen} \omega = -\frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} (x - p \cos \omega),$$

de donde

$$y \operatorname{sen} \omega - p \operatorname{sen}^2 \omega = -x \cos \omega + p \cos^2 \omega ,$$

o sea,

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p(\operatorname{sen}^2 \omega + \cos^2 \omega) = 0 .$$

Como $\operatorname{sen}^2 \omega + \cos^2 \omega = 1$ (Apéndice IC, 2), esta última ecuación se reduce a

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0. \qquad (4)$$

Este resultado conduce al siguiente

Teorema 7. *La forma normal de la ecuación de una recta es*

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0,$$

en donde p *es un número positivo, numéricamente igual a la longitud de la normal trazada desde el origen a la recta, y* ω *es el ángulo positivo* $< 360°$ *medido a partir de la parte positiva del eje* X *a la normal.*

Nota. Si una recta pasa por el origen, se tiene $p = 0$ en la forma normal de su ecuación. En este caso se prefiere suponer que la recta normal está dirigida hacia arriba del origen de tal manera que la variación de los valores de ω esté dada por

$$0 \leq \omega < 180°.$$

Ejemplo. En un círculo de centro en el origen y radio igual a 5, hallar la forma normal de la ecuación de su tangente en el punto $(-3, 4)$.

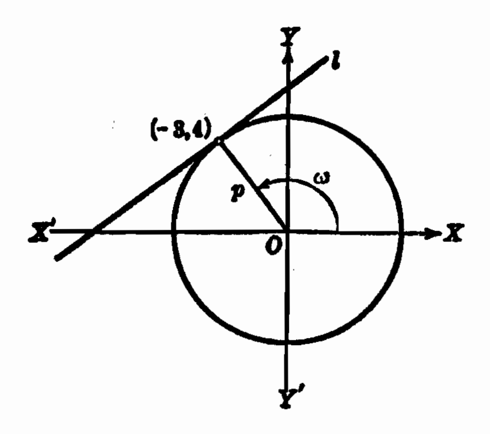


Fig. 42

Solución. La tangente buscada l aparece trazada en la figura 42. Por Geometría elemental sabemos que el radio que va al punto de tangencia es perpendicular a la tangente. Por tanto, $p = 5$, y $\operatorname{sen} \omega = 4/5$ y $\cos \omega = -3/5$. Luego la ecuación de l en la forma normal es

$$-\tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{5}y - 5 = 0. \qquad (5)$$

Ordinariamente, después de obtener la forma (5) en un problema, la escribiríamos en la forma general, que es más simple,

$$3x - 4y + 25 = 0. \qquad (6)$$

Aunque (5) y (6) representan la misma recta l, debe tenerse presente que (5) es la forma normal, y (6) no lo es. La importancia de esta distinción se apreciará cuando consideremos las aplicaciones de la forma normal (Art. 33).

32. Reducción de la forma general de la ecuación de una recta a la forma normal. Usualmente, la ecuación de una recta se da en la forma general

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Sin embargo, la forma normal

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0, \qquad (2)$$

es útil para ciertos tipos de problemas. Por esto consideraremos en este artículo el método de obtener la forma normal a partir de la forma general de la ecuación.

Si las ecuaciones (1) y (2) representan la misma recta, sus coeficientes correspondientes deben ser proporcionales (apartado (c) del teorema 6, Art. 30). Por tanto,

$$\cos \omega = kA, \qquad (3)$$

$$\operatorname{sen} \omega = kB, \qquad (4)$$

$$-p = kC. \qquad (5)$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de (3) y (4), y sumamos, obtenemos

$$\cos^2 \omega + \operatorname{sen}^2 \omega = k^2(A^2 + B^2).$$

Pero como $\cos^2 \omega + \operatorname{sen}^2 \omega = 1$, esta última relación nos da

$$k = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad A^2 + B^2 \neq 0. \qquad (6)$$

Si se sustituye este valor de k en cada una de las ecuaciones (3), (4) y (5), obtenemos las relaciones buscadas entre los coeficientes correspondientes de las dos formas (1) y (2). Estas son:

$$\cos \omega = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \operatorname{sen} \omega = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$p = -\frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}},$$

y la recta definida por la forma general (1) tiene por ecuación en la forma normal

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Es evidente, sin embargo, que, en cualquier caso particular, no podemos usar en (6) ambos signos del radical, ya que esto no nos daría un único valor para el ángulo ω. Para determinar el signo de este radical, notamos en primer lugar que, cuando p es diferente de cero, debe ser *positivo* (Art. 31). En este caso, la relación (5) muestra que k y C deben ser de signos diferentes y, por tanto, que al radical de (6) se le debe dar el signo opuesto al de C.

Si la recta pasa por el origen, en la forma (1) es $C = 0$, y $p = 0$ en la (2), y el signo del radical no puede ser determinado por la relación (5). En este caso, sin embargo, hemos elegido, como se estableció en la nota del teorema 7, Artículo 31, restringir los valores de ω al intervalo

$$0 \leq \omega < 180°,$$

en donde sen ω no es negativo. La relación (4) nos dice entonces que k y B deben concordar en signo si $B \neq 0$, y, por tanto, al radical de (6) se le debe dar el mismo signo que tenga B.

Finalmente, si ambos B y C son iguales a cero en la forma general (1), la relación (4) muestra que sen $\omega = 0$. Por tanto, $\omega = 0°$, ya que $\omega < 180°$ para $C = 0$ como ya hemos dicho. Entonces cos $\omega = 1$, y la relación (3) muestra que k y A deben concordar en signo.

Los resultados anteriores quedan resumidos en el siguiente

Teorema 8. *La forma general de la ecuación de una recta,*

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

puede reducirse a la forma normal,

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0,$$

dividiendo cada término de (1) *por* $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$, *en donde el signo que precede al radical* r *se escoge como sigue:*

a) *Si* $C \neq 0$, r *es de signo contrario a* C.

b) *Si* $C = 0$ *y* $B \neq 0$, r *y* B *tienen el mismo signo.*

c) *Si* $C = B = 0$, r *y* A *tienen el mismo signo.*

Ejemplo. La ecuación de una recta es $5x - 7y - 11 = 0$. Reducir su ecuación a la forma normal, y hallar los valores de p y ω.

Solución. Para la ecuación dada, $A = 5$, $B = -7$ y $C = -11$. Por anto, $\pm\sqrt{A^2 + B^2} = \pm\sqrt{5^2 + (-7)^2} = \pm\sqrt{74}$. Como C es negativo, damos al radical el signo positivo. Dividiendo la ecuación dada por $\sqrt{74}$, obtenemos su forma normal,

$$\frac{5}{\sqrt{74}}x + \frac{-7}{\sqrt{74}}y - \frac{11}{\sqrt{74}} = 0,$$

en donde,

$$\cos \omega = \frac{5}{\sqrt{74}}, \quad \operatorname{sen} \omega = -\frac{7}{\sqrt{74}} \quad \text{y} \quad p = \frac{11}{\sqrt{74}}.$$

Como $\cos \omega$ es positivo y $\operatorname{sen} \omega$ es negativo, ω está en el cuarto cuadrante (Apéndice IC, 1). En la tabla B del Apéndice II, se encuentra que el valor de ω es $305° 32'$. En la figura 43 se ha trazado la recta.

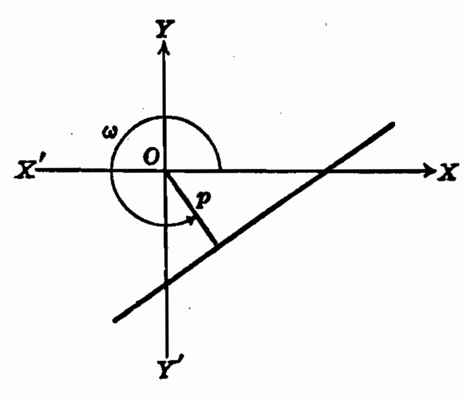


Fig. 43

EJERCICIOS. Grupo 11

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar la ecuación de una recta en la forma normal, siendo $\omega = 60°$ y $p = 6$.

2. Una recta es tangente a un círculo de centro en el origen y radio 3. Si el punto de tangencia es $(2, -\sqrt{5})$, hállese la ecuación de la tangente en la forma normal.

3. La ecuación de una recta en la forma normal es $x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - 5 = 0$. Hallar el valor de ω para que la recta pase por el punto $(-4, 3)$.

4. Reducir la ecuación $12x - 5y - 52 = 0$ a la forma normal, y hallar los valores de p y ω.

5. Hallar la distancia* del origen a la recta $2x - 3y + 9 = 0$.

6. Determinar el valor de k para que la distancia del origen a la recta $x + ky - 7 = 0$ sea 2.

7. Reducir la ecuación $y = mx + b$ a la forma normal, y hallar los valores de p y ω.

8. Hallar la ecuación de la recta cuya distancia del origen es 5 y que pasa por el punto $(1, 7)$. (Dos soluciones.)

---

* Al hablar de distancia de un punto a una recta se sobrentiende el segmento de perpendicular trazado del punto a la recta. Lo mismo al hablar de distancia entre paralelas.

9. El ángulo de inclinación de una recta es de 45°. Hallar su ecuación si su distancia del origen es 4. (Dos soluciones.)

10. Reducir la ecuación $x = k$ a la forma normal, y hallar los valores de p y ω para los tres casos: $k < 0$, $k = 0$ y $k > 0$.

11. Reducir la ecuación $y = k$ a la forma normal, y hallar los valores de p y ω para los tres casos: $k < 0$, $k = 0$ y $k > 0$.

12. La pendiente de una recta es -3. Hallar su ecuación si su distancia del origen es 2. (Dos soluciones.)

13. Hallar la forma normal de la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos $A(-1, 7)$ y $B(4, 2)$.

14. Hallar la forma normal de la ecuación de la recta que es paralela a la recta $x - 5y + 11 = 0$ y pasa por el punto $A(-7, 2)$.

15. Hallar la ecuación de la recta que es paralela a la que tiene por ecuación $3x + 2y - 9 = 0$ y cuya distancia del origen es 8. (Dos soluciones.)

16. Hallar la forma normal de la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $2x - 3y + 7 = 0$ y determina sobre el eje X el segmento -9.

17. Los vértices de un triángulo son $A(-4, 2)$, $B(-1, 5)$ y $C(2, -1)$. Hállense las ecuaciones de las alturas en la forma normal.

18. Hallar la distancia del origen a cada una de las rectas paralelas $3x + 5y - 11 = 0$ y $6x + 10y - 5 = 0$. Deducir de este resultado la distancia entre las dos rectas.

19. Hallar la distancia del origen a cada una de las rectas paralelas $2x + 3y - 4 = 0$ y $6x + 9y + 11 = 0$. A partir de esto calcular la distancia entre las dos rectas.

20. La ecuación de una recta l es $x + 3y - 6 = 0$, y las coordenadas de un punto P son $(4, 7)$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por P y es paralela a l. A partir de este resultado hallar la distancia de P a l.

33. Aplicaciones de la forma normal. A continuación vamos a considerar dos aplicaciones de la forma normal.

a) *Cálculo de la distancia de una recta a un punto dado.* Sea l la recta dada y $P_1(x_1, y_1)$ el punto, y designemos por d la distancia de l a P_1. Como P_1 y l pueden ser cualesquiera en el plano coordenado, hay seis posiciones relativas posibles de P_1, l y el origen O, tal como se indica en la figura 44. (Véase Art. 2, fig. 2.)

Supongamos que la forma normal de la ecuación de l es

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0. \qquad (1)$$

Sea l' la recta trazada por P_1 y paralela a l, y sea p' la longitud de la perpendicular trazada desde el origen a l'.

Como tendremos ocasión de tratar con segmentos de recta dirigidos, asignaremos la dirección positiva a la recta normal trazada *desde* el origen hacia la recta l. Esta dirección positiva está indicada en la figura 44 por la normal ON que corta a l en el punto A y a l' en el B. Entonces, en cada uno de los casos,

$$d = |\overline{AB}|. \qquad (2)$$

La longitud de la normal OA hasta l es siempre positiva, ya que tiene la misma dirección que ON; la longitud de la normal OB hasta l' es positiva o negativa según que su dirección sea la misma o sea

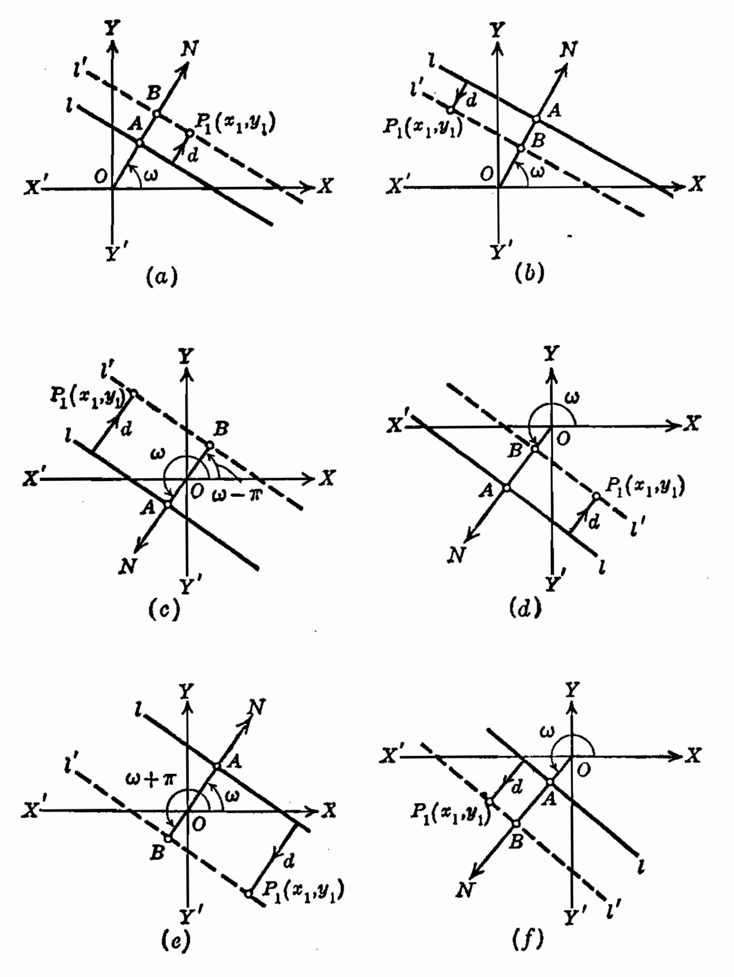


Fig. 44

opuesta a la de ON. Como p y p' son siempre números no-negativos (Art. 31), tenemos

$$\overline{OA} = p, \quad |\overline{OB}| = p'. \tag{3}$$

Por la relación fundamental (2) del Artículo 2 para segmentos dirigidos, tenemos

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB},$$

de donde

$$\overline{AB} = -\overline{OA} + \overline{OB}. \tag{4}$$

Por tanto, por (3) y (4), tenemos, para las seis posiciones indicadas en la figura 44,

$$\left.\begin{array}{ll}(a) & \overline{AB} = -p + p' > 0, \text{ ya que } p' > p.\\ (b) & \overline{AB} = -p + p' < 0, \text{ ya que } p' < p.\\ (c) & \overline{AB} = -p - p' < 0.\\ (d) & \overline{AB} = -p + p' < 0, \text{ ya que } p' < p.\\ (e) & \overline{AB} = -p - p' < 0.\\ (f) & \overline{AB} = -p + p' > 0, \text{ ya que } p' > p.\end{array}\right\} \tag{5}$$

Por el teorema 7, Artículo 31, la ecuación de l' para los casos (a), (b), (d) y (f) es

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p' = 0. \tag{6}$$

Para el caso (c), la ecuación de l' es

$$x \cos (\omega - \pi) + y \operatorname{sen} (\omega - \pi) - p' = 0,$$

de donde (ver el Apéndice IC, 3), tenemos

$$-x \cos \omega - y \operatorname{sen} \omega - p' = 0. \tag{7}$$

Para el caso (e), la ecuación de l' es

$$x \cos (\pi + \omega) + y \operatorname{sen} (\pi + \omega) - p' = 0,$$

de donde obtenemos nuevamente la ecuación (7).

Como el punto P_1 está sobre l', sus coordenadas (x_1, y_1) satisfacen (6) y (7), y tenemos, respectivamente,

$$x_1 \cos \omega + y_1 \operatorname{sen} \omega - p' = 0,$$

y

$$-x_1 \cos \omega - y_1 \operatorname{sen} \omega - p' = 0,$$

de donde para los casos (a), (b), (d) y (f),

$$p' = x_1 \cos \omega + y_1 \operatorname{sen} \omega, \tag{8}$$

y para los casos (c) y (e),

$$p' = -x_1 \cos \omega - y_1 \operatorname{sen} \omega. \tag{9}$$

Entonces de (8) y $5(a)$, $5(b)$, $5(d)$ y $5(f)$, tenemos

$$\overline{AB} = x_1 \cos \omega + y_1 \operatorname{sen} \omega - p; \tag{10}$$

y de (9) y 5 (*c*), 5 (*e*), tenemos el mismo resultado (10). Por tanto, de (2) y (10), tenemos

$$d = |x_1 \cos \omega + y_1 \operatorname{sen} \omega - p|. \quad (11)$$

Comparando (1) y (11), vemos que la distancia buscada d puede obtenerse simplemente sustituyendo las coordenadas de P_1 en el primer miembro de la forma normal de la ecuación de l. Ahora bien, como la ecuación de una recta se da ordinariamente en la forma general

$$Ax + By + C = 0, \quad (12)$$

es necesario reducir (12) a la forma normal (teorema 8, Art. 32),

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

de manera que, de (11), el valor buscado es

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Este resultado lo enunciamos como sigue:

TEOREMA 9. *La distancia* d *de una recta* $Ax + By + C = 0$ *a un punto dado* $P_1(x_1, y_1)$ *puede obtenerse sustituyendo las coordenadas del punto en el primer miembro de la forma normal de la ecuación de la recta. El valor está dado entonces por*

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Para los fines del segundo problema de este artículo, será necesario considerar la distancia d del teorema 9 como la longitud del segmento de recta perpendicular dirigido *de* la recta l *hacia* el punto P_1. En este sentido, nos referimos a d como la *distancia dirigida*. Su signo y magnitud están dados entonces por el signo y longitud del segmento dirigido AB; es decir,

$$d = \overline{AB}.$$

Si comparamos ahora cada relación de (5) con la posición correspondiente que aparece en la figura 44, observamos que para los casos (*a*) y (*f*), con P_1 y el origen O en lados *opuestos* de la recta l, $\overline{AB}$ es positiva, mientras que para los cuatro casos restantes, con P_1 y O del *mismo* lado de l, $\overline{AB}$ es negativa. Si, en vez de esto, la recta l pasa por el origen, se deduce, de la nota del teorema 7,

Artículo 31, que $\overline{AB}$ es positiva si P_1 está arriba de l y negativa si está abajo.

Estos resultados se expresan en conjunto en el

TEOREMA 10. *La distancia dirigida* d *de la recta dada*

$$Ax + By + C = 0$$

al punto dado $P_1(x_1, y_1)$ *se obtiene por la fórmula*

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

en donde el signo del radical se elige de acuerdo con el teorema 8, Artículo 32.

Si la recta dada no pasa por el origen, d *es positiva o negativa según que el punto* P_1 *y el origen estén en lados opuestos o del mismo lado de la recta.*

Si la recta dada pasa por el origen, d *es positiva o negativa según que el punto* P_1 *esté arriba o abajo de la recta.*

Ejemplo 1. Hallar la distancia de la recta $3x - 4y + 12 = 0$ al punto $(4, -1)$. Interpretar el signo de la distancia como segmento dirigido.

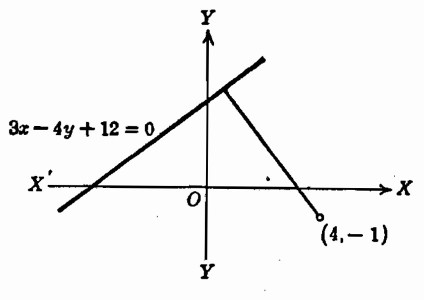


Fig. 45

Solución. La recta y el punto aparecen en la figura 45. Por el teorema 10, la distancia dirigida de la recta dada al punto es

$$d = \frac{3(4) - 4(-1) + 12}{-\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{-28}{5}.$$

Por tanto, la distancia buscada es $^{28}\!/\!_5$. El signo negativo indica que el punto y el origen están del mismo lado de la recta.

b) *Determinación de las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por dos rectas dadas que se cortan.* Supongamos que las ecuaciones de las dos rectas dadas son

$$l: \quad Ax + By + C = 0, \tag{13}$$

$$l': \quad A'x + B'y + C' = 0, \tag{14}$$

y designemos por l_1 y l_2 a las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por ellas, como se representan en la figura 46.

Por Geometría elemental, la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del ángulo. Por tanto, para cualquier punto $P(x, y)$ de la bisectriz, las distancias d_1 y d_2 de los lados l y l' a P son iguales, es decir,

$$|d_1| = |d_2|. \qquad (15)$$

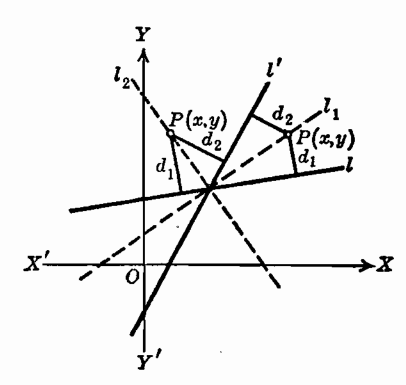


Fig. 46

Ahora bien, la condición geométrica expresada por (15) nos dice simplemente que las distancias d_1 y d_2 son *numéricamente* iguales, y la interpretación analítica conduciría entonces precisamente a la misma ecuación para ambas bisectrices. Según esto, se hace necesario considerar d_1 y d_2 como distancias *dirigidas* con el fin de hacer una distinción entre las bisectrices l_1 y l_2.

Para el punto $P(x, y)$ sobre l_1, P y el origen están en lados opuestos de l, de donde, por el teorema 10, d_1 es positiva. Análogamente, d_2 es positiva, de manera que, para la recta l_1,

$$d_1 = d_2. \qquad (16)$$

Para el punto $P(x, y)$ sobre l_2, P y O están en lados opuestos de l, pero están a un mismo lado de l' Por tanto, en este caso tenemos

$$d_1 = -d_2. \qquad (17)$$

Aplicando el teorema 10 a las ecuaciones (13) y (14), expresamos la condición (16) analíticamente por

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}}, \qquad (18)$$

en donde los signos del radical se escogen de acuerdo con el teorema 8, Artículo 32. Por tanto, (18) es la ecuación de la bisectriz l_1.

Análogamente, de (17) tenemos como ecuación de la bisectriz l_2,

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

Este resultado conduce al siguiente

TEOREMA 11. *Las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por dos rectas que se cortan,* $Ax + By + C = 0$ *y* $A'x + B'y + C' = 0$, *son*

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}},$$

y

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}},$$

en donde los signos de los radicales se escogen de acuerdo con el teorema 8, Artículo 32.

Ejemplo 2. Los vértices de un triángulo son $A(-2, 3)$, $B(5, 5)$ y $C(4, -1)$. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo interior ACB.

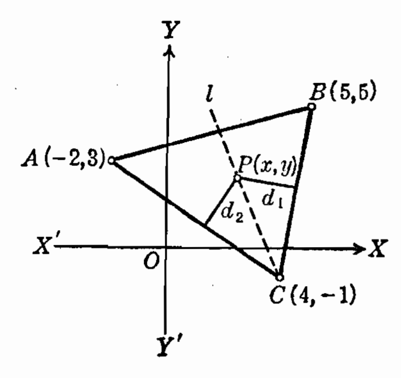


Fig. 47

Solución. Sea l (fig. 47) la bisectriz buscada. Por el teorema 3, Artículo 27, las ecuaciones de los lados BC y AC son

$$6x - y - 25 = 0 \quad y \quad 2x + 3y - 5 = 0.$$

respectivamente.

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera sobre l, y representemos por d_1 y d_2 las distancias dirigidas de los lados BC y AC, respectivamente, al punto P. Entonces, como P y el origen están del mismo lado de BC y de lados opues-

tos de AC, del teorema 10 se deduce que $d_1 = -d_2$. Por tanto, por el teorema 11, la ecuación de la bisectriz l es

$$\frac{6x - y - 25}{\sqrt{6^2 + 1}} = -\frac{2x + 3y - 5}{\sqrt{2^2 + 3^2}},$$

la cual, simplificada, toma la forma

$$(6\sqrt{13} + 2\sqrt{37})\,x - (\sqrt{13} - 3\sqrt{37})\,y - 25\sqrt{13} - 5\sqrt{37} = 0.$$

EJERCICIOS. Grupo 12

Dibújese una figura para cada ejercicio.

1. Hallar la distancia de la recta $4x - 5y + 10 = 0$ al punto $P(2, -3)$.

2. Hallar la distancia dirigida de la recta $x + 2y + 7 = 0$ al punto $P(1, 4)$.

3. Los vértices de un triángulo son $A(-4, 1)$, $B(-3, 3)$ y $C(3, -3)$. Hallar la longitud de la altura del vértice A sobre el lado BC y el área del triángulo.

4. Hallar la distancia comprendida entre las rectas paralelas $3x - 4y + 8 = 0$ y $6x - 8y + 9 = 0$.

5. Hallar la distancia entre las rectas paralelas $x + 2y - 10 = 0$ y $x + 2y + 6 = 0$.

6. Hallar la ecuación de la paralela a la recta $5x + 12y - 12 = 0$ y distante 4 unidades de ella. (Dos soluciones.)

7. La distancia dirigida de la recta $2x + 5y - 10 = 0$ al punto P es -3. Si la abscisa de P es 2, hállese su ordenada.

8. La distancia de la recta $4x - 3y + 1 = 0$ al punto P es 4. Si la ordenada de P es 3, hállese su abscisa. (Dos soluciones.)

9. Hallar la ecuación de la recta cuyos puntos equidistan todos de las dos rectas paralelas $12x - 5y + 3 = 0$ y $12x - 5y - 6 = 0$.

10. En la ecuación $kx + 3y + 5 = 0$, hallar el valor del coeficiente k de manera que la distancia dirigida de la recta que representa al punto $(2, -2)$ sea igual a -1.

11. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 1)$ y tal que la distancia de esta recta al punto $(-1, 1)$ sea igual a $2\sqrt{2}$. (Dos soluciones.)

12. Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $x + y - 1 = 0$ y $2x - y + 1 = 0$, y demostrar que son perpendiculares entre sí.

13. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas $x - 2y - 4 = 0$ y $4x - y - 4 = 0$.

14. En el triángulo del ejercicio 3, hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos interiores, y demostrar que concurren en un punto.

15. Demostrar, analíticamente, que en un triángulo cualquiera las bisectrices de los ángulos interiores se cortan en un punto que equidista de los tres lados. Este punto se llama *incentro*.

16. Demostrar, analíticamente, que en un triángulo cualquiera la bisectriz de un ángulo interior y las bisectrices de los ángulos exteriores en los otros dos vértices son concurrentes.

17. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $4x - 3y + 12 = 0$ es siempre igual al doble de su distancia del eje X.

18. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $4x - 3y + 12 = 0$ es siempre igual a la mitad de su distancia del eje Y.

19. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias de las dos rectas $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$ es una constante. Demostrar que su lugar geométrico es una recta.

20. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x + 2 = 0$ es siempre igual a su distancia del punto $(2, 0)$. Trácese el lugar geométrico.

21. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $y + 2 = 0$ es siempre igual a su distancia del punto $(0, 2)$. Trácese el lugar geométrico.

22. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x - 2 = 0$ es siempre 3 unidades mayor que su distancia del punto $(-1, -3)$. Trazar el lugar geométrico.

23. Un punto se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x + y + 1 = 0$ es siempre igual a su distancia del punto $(-2, -1)$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

24. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x + 3 = 0$ es siempre igual al triple de su distancia del punto $(2, -4)$. Trazar el lugar geométrico.

25. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(-2, 1)$ es siempre igual al triple de su distancia de la recta $y + 4 = 0$. Trazar su lugar geométrico.

26. Un punto se mueve de tal manera que su distancia del punto $(1, -1)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $3x - 2y + 6 = 0$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

27. El ángulo de inclinación de cada una de dos rectas paralelas es α. Si una de ellas pasa por el punto (a, b) y la otra por el (h, k), demostrar que la distancia que hay entre ellas es $|(h - a) \operatorname{sen} \alpha - (k - b) \cos \alpha|$.

28. Hallar el área del trapecio formado por las rectas $3x - y - 5 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$, $x + 3y - 20 = 0$ y $x - 2y = 0$.

29. Desde un punto cualquiera de la base de un triángulo isósceles se trazan perpendiculares a los lados iguales. Demostrar, analíticamente, que la suma de las longitudes de estas perpendiculares es constante e igual a la longitud de la altura de uno de los vértices de la base sobre el lado opuesto.

30. Demostrar, analíticamente, que la bisectriz de cualquier ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados contiguos a los respectivos segmentos.

34. Area de un triángulo. Se han anotado previamente varios métodos para determinar el área de un triángulo dado. Obtendremos ahora una fórmula que permite calcular el área de un triángulo en función de las coordenadas de sus vértices.

Sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ los vértices de un triángulo cualquiera dado (fig. 48). Designemos por h la longitud de la

altura de B sobre el lado AC, y por b la longitud del lado AC. El área del triángulo está dada por la fórmula

$$K = \tfrac{1}{2} bh. \qquad (1)$$

Por la fórmula de la distancia entre dos puntos (teorema 2, Artículo 6),

$$b = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}. \qquad (2)$$

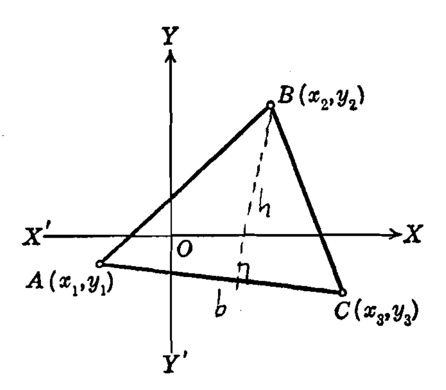


Fig. 48

Según el teorema 3, Artículo 27, la ecuación de AC es

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}(x - x_1),$$

que puede escribirse en la forma

$$(y_1 - y_3)x - (x_1 - x_3)y + x_1 y_3 - x_3 y_1 = 0.$$

Usando esta última ecuación junto con el punto $B(x_2, y_2)$, hallamos, por el teorema 9 del Artículo 33, que

$$h = \frac{|(y_1 - y_3)x_2 - (x_1 - x_3)y_2 + x_1 y_3 - x_3 y_1|}{\sqrt{(y_1 - y_3)^2 + (x_1 - x_3)^2}}. \qquad (3)$$

Por tanto, de las ecuaciones (1), (2) y (3), tenemos, para área del triángulo,

$$K = \tfrac{1}{2}|(y_1 - y_3)x_2 - (x_1 - x_3)y_2 + x_1 y_3 - x_3 y_1|. \qquad (4)$$

La expresión que está dentro de barras en el segundo miembro de (4) es el valor absoluto del desarrollo del determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(Véase nota 2 del teorema 3, Art. 27.) En consecuencia, tenemos:

TEOREMA 12. *El área del triángulo que tiene por vértices los puntos* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *y* (x_3, y_3) *es*

$$K = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

debiendo tomarse el valor absoluto del determinante.

Si tres puntos diferentes son colineales, pueden ser considerados como los vértices de un triángulo cuya área es cero. Por tanto, por el teorema 12, si los tres puntos diferentes (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) son colineales, entonces $K = 0$ y

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Recíprocamente, si (5) es verdadera, $K = 0$ en el teorema 12, y los tres puntos son colineales.

En consecuencia, tenemos:

COROLARIO. *Una condición necesaria y suficiente para que tres puntos diferentes de coordenadas* (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) *sean colineales es que*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

35. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos, en forma de determinante. En la nota 2 del teorema 3, Artículo 27, obtuvimos la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados, en forma de determinante. Ahora deduciremos esta forma por otro método que es importante porque puede usarse para obtener en forma de determinante las ecuaciones de otras figuras geométricas.

Tomemos para ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ la

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Como los puntos P_1 y P_2 están sobre la recta, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (1), y tenemos las dos ecuaciones

$$Ax_1 + By_1 + C = 0, \qquad (2)$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0. \qquad (3)$$

Como la ecuación buscada es de la forma (1), debemos considerar los coeficientes A, B y C como incógnitas. Sus valores, además, deben ser los mismos en las ecuaciones (2) y (3) si la recta pasa por P_1 y P_2. Podemos entonces considerar las ecuaciones (1), (2) y (3) como un sistema de tres ecuaciones lineales homogéneas con tres incógnitas, A, B, C. En la ecuación (1), C puede ser cero, pero A y B no pueden ser ambas cero. Ahora bien, por Algebra, sabemos que para que el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3) tenga una solución distinta de cero, es necesario y suficiente que el determinante del sistema se anule (Apéndice IB, 6; teorema), es decir,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Vamos a demostrar que (4) es la ecuación buscada. En efecto, como x_1, y_1, x_2 y y_2 son constantes conocidas, el desarrollo del determinante, por elementos de la primera fila, da una ecuación de la forma (1). Por tanto, (4) es la ecuación de una recta. Además, la ecuación (4) se satisface por las coordenadas de P_1 y P_2. Porque, si sustituímos x y y por x_1 y y_1, respectivamente, las filas primera y segunda son idénticas, y el determinante se anula (Apéndice IB, 5; propiedad 4). Análogamente, si se sustituyen en (4) las coordenadas variables x y y por las coordenadas de P_2, las filas primera y tercera quedan idénticas, y el determinante se anula.

Este resultado nos dice

TEOREMA 13. *La ecuación de la recta que pasa por los puntos* $P_1(x_1, y_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2)$, *puesta en forma de determinante, es*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ejemplo. Escribir, en forma de determinante, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 4)$ y $(3, 1)$. A partir de ella obténgase la ecuación en su forma general.

Solución. Por el teorema 13 anterior, la ecuación es

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si desarrollamos por los elementos de la primera fila, obtenemos

$$x\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde la ecuación de la recta, en su forma general, es

$$3x + 4y - 13 = 0.$$

36. Familias de líneas rectas. En el Artículo 29 vimos que una recta y su ecuación quedan determinadas perfectamente por dos condiciones independientes. Por tanto, una recta que satisface solamente una condición no es una recta única; hay infinidad de rectas que la cumplen, cada una de las cuales tiene la propiedad común asociada con esa única condición. De acuerdo con esto podemos formular la siguiente

DEFINICIÓN. La totalidad de las rectas que satisfacen una única condición geométrica se llama *familia* o *haz de rectas*.

Para mejor comprender este nuevo concepto, consideremos primero todas las rectas que tienen de pendiente 5. La totalidad de estas rectas forma una familia de rectas paralelas, teniendo todas la propiedad común de que su pendiente es igual a 5. Analíticamente, esta familia de rectas puede representarse por la ecuación

$$y = 5x + k, \qquad (1)$$

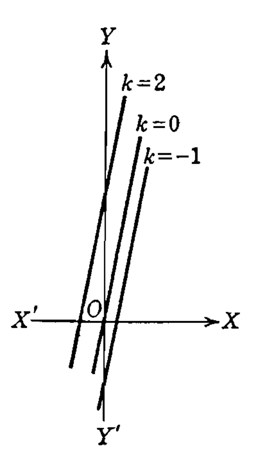


Fig. 49

en donde k es una constante arbitraria que puede tomar todos los valores reales. Así, podemos obtener la ecuación de cualquier recta de la familia asignando simplemente un valor particular a k en la ecuación (1). Recordando la ecuación de la recta en función de la pendiente y la ordenada en el origen (teorema 2, Art. 27), este valor de k representa el segmento que la recta determina sobre el eje Y. Las rectas de la familia (1) para $k = 2$, $k = 0$ y $k = -1$ están representadas en la figura 49.

Como otro ejemplo, consideremos todas las rectas que pasan por el punto (2, 3). Según la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada (teorema 1, Art. 26) esta familia de rectas puede representarse, analíticamente, por la ecuación

$$y - 3 = k(x - 2), \qquad (2)$$

en donde k, la pendiente, es una constante arbitraria a la que puede asignarse cualquier valor real. En la figura 50 se han construído tres rectas de la familia (2) correspondientes a $k = 0$, $k = 1$ y $k = -1$. Como k no está definida para una recta paralela al eje Y, la ecuación (2) no incluye a la recta $x = 2$ que también pasa por el punto (2, 3). La familia de rectas (2) se llama *haz de rectas de vértice* (2, 3).

Vemos, considerando ambas familias (1) y (2), que una recta de una familia puede obtenerse asignando un valor particular a la constante arbitraria k. Teniendo en cuenta su importancia, se le da a k un nombre especial; se le llama *parámetro* de la familia.

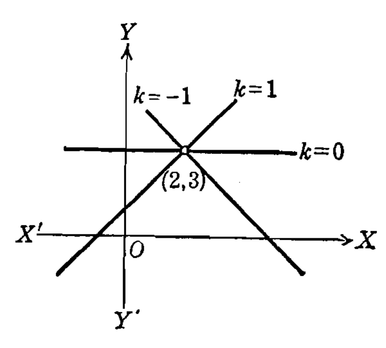


Fig. 50

El concepto de familia de rectas es útil en la determinación de la ecuación de una recta particular. El procedimiento consiste, esencialmente, en dos pasos: *a*) se escribe la ecuación de la familia de rectas de tal manera que satisfaga una condición dada, y *b*) se determina el valor del parámetro de la familia aplicando la otra condición dada.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 6) y tal que la suma algebraica de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados (intercepciones) es igual a 2.

Solución. De la forma simétrica de la ecuación de la recta (teorema 4, Artículo 27), la familia de rectas, para cada una de las cuales la suma de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es igual a 2, tiene por ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{2-a} = 1, \quad a \neq 2. \tag{3}$$

De todas las rectas de la familia (3), queremos la recta que pasa por el punto (1, 6). Para ello, determinaremos el valor del parámetro a de tal manera que las coordenadas del punto (1, 6) satisfagan (3). Por tanto, haciendo $x = 1$ y $y = 6$ en (3), obtenemos

$$\frac{1}{a} + \frac{6}{2-a} = 1,$$

de donde,

$$2 - a + 6a = 2a - a^2,$$

o sea,

$$a^2 + 3a + 2 = 0.$$

Las raíces de esta última ecuación son $a = -1, -2$, de manera que, en realidad, hay dos rectas que cumplen con las condiciones especificadas del problema.

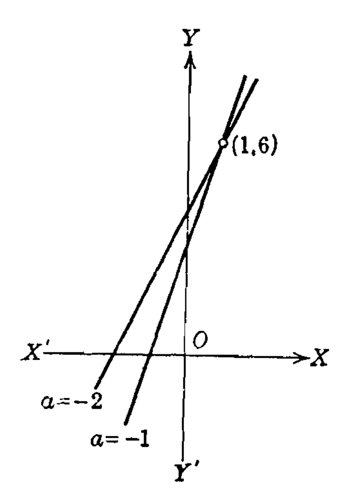


Fig. 51

Las ecuaciones de estas dos rectas se obtienen ahora fácilmente de (3) sustituyendo

$$a = -1 \text{ y } a = -2$$

sucesivamente. Así, para $a = -1$, tenemos

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{3} = 1,$$

o sea,

$$3x - y + 3 = 0;$$

y para $a = -2$, tenemos

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1,$$

o sea,

$$2x - y + 4 = 0.$$

En la figura 51 se han representado las dos rectas.

Tiene especial interés la familia de rectas que pasan por la intersección de dos rectas dadas. Supongamos que las ecuaciones de dos rectas que se cortan son

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad (4)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0, \qquad (5)$$

y sea $P_1(x_1, y_1)$ su punto de intersección. Consideremos la ecuación

$$k_1(A_1x + B_1y + C_1) + k_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \qquad (6)$$

en donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias que pueden tomar todos los valores reales, exceptuando el caso en que ambas sean cero simultáneamente. Vamos a demostrar que (6) es la ecuación de la familia de rectas que pasan por P_1.

Como k_1 y k_2 son constantes, la ecuación (6) es lineal en las variables x y y, y, por tanto, representa una línea recta. Además, como $P_1(x_1, y_1)$ está sobre ambas rectas (4) y (5), sus coordenadas satisfacen sus ecuaciones, de manera que

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0, \qquad (7)$$

$$A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 = 0. \qquad (8)$$

Si ahora hacemos en (6) $x = x_1$ y $y = y_1$, hallamos, en vista de (7) y (8), que

$$k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 = 0,$$

que es verdadera para todos los valores de k_1 y k_2. Por tanto, la ecuación (6) representa todas las rectas que pasan por $P_1(x_1, y_1)$, punto de intersección de las rectas (4) y (5). En particular, para $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$, obtenemos la recta (4) de (6), y de $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, obtenemos la recta (5).

En general, sin embargo, no nos interesa obtener las rectas (4) y (5) a partir de (6). Podemos, por ejemplo, eliminar la recta (5) de la familia (6) especificando que k_1 puede tomar todos los valores reales excepto cero. Bajo esta hipótesis podemos dividir la ecuación (6) por k_1, y si reemplazamos la constante $\frac{k_2}{k_1}$ por k, (6) toma la forma más simple

$$A_1x + B_1y + C_1 + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \qquad (9)$$

en donde el parámetro k puede tomar todos los valores reales. La ecuación (9) representa entonces la familia de todas las rectas que pasan por la intersección de las rectas (4) y (5), con la única excepción de la recta (5).

La importancia de la forma (9) está en que nos permite obtener la ecuación de una recta que pasa por la intersección de dos rectas dadas sin tener que buscar las coordenadas del punto de intersección.

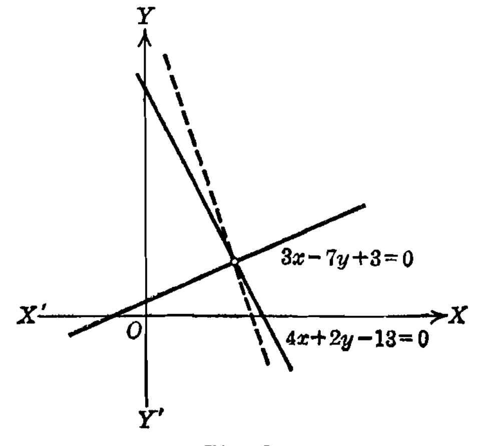


Fig. 52

Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la recta de pendiente -3 y que pasa por la intersección de las rectas $4x + 2y - 13 = 0$ y $3x - 7y + 3 = 0$.

Solución. La familia de rectas que pasan por el punto de intersección de las rectas dadas está representada por la ecuación

$$4x + 2y - 13 + k(3x - 7y + 3) = 0,$$

que puede escribirse en la forma general

$$(4 + 3k)x + (2 - 7k)y - 13 + 3k = 0, \qquad (10)$$

cuya pendiente es $-\frac{4+3k}{2-7k}$. Como la pendiente de la recta buscada es igual a -3, tendremos: $-\frac{4+3k}{2-7k} = -3$, de donde $4 + 3k = 6 - 21k$ y $k = 1/12$. Sustituyendo este valor de k en (10), tenemos, para ecuación de la recta buscada,

$$\frac{17}{4}x + \frac{17}{12}y - \frac{51}{4} = 0, \quad \text{o sea,} \quad 3x + y - 9 = 0.$$

Esta recta es la que aparece de trazos en la figura 52.

NOTA. Este método de parámetros lo usaremos también más adelante en conexión con otras curvas, en donde sus ventajas y su simplicidad relativa serán aún más marcadas.

EJERCICIOS. Grupo 13

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Escribir la ecuación de la familia de rectas que son paralelas a la recta $2x - 7y + 2 = 0$. Dibújense tres elementos de la familia, especificando en cada caso el valor del parámetro.

2. Escribir la ecuación de la familia de rectas que son perpendiculares a la recta $3x + 2y - 7 = 0$. Dibújense tres elementos de la familia, especificando en cada caso el valor del parámetro.

3. Escribir la ecuación de la familia de rectas tangentes a un círculo cuyo centro está en el origen y cuyo radio es igual a 4. Dibújense tres elementos de la familia, especificando en cada caso el valor del parámetro.

4. Establecer una propiedad común para todas las rectas de cada una de las siguientes familias:

a) $5x + 4y - k = 0$. *b*) $y - 3 = k(x + 4)$.

c) $y = kx + 7$. *d*) $\frac{x}{3} + \frac{y}{k} = 1, \quad k \neq 0$.

5. Determinar el valor del parámetro k de manera que la recta de la familia $kx - y + 8 = 0$ que le corresponda pase por el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la recta.

6. Determinar el valor del parámetro k de manera que la recta de la familia $3x - ky - 7 = 0$ que le corresponda sea perpendicular a la recta $7x + 4y - 11 = 0$. Hallado el parámetro, escríbase la ecuación de la recta.

7. Determinar el valor del parámetro c para que la recta de la familia $cx + 3y - 9 = 0$ que le corresponda, determine sobre el eje X un segmento igual a -4. Hallar la ecuación de la recta.

8. Determinar el valor del parámetro k correspondiente a la recta de la familia $5x - 12y + k = 0$ cuya distancia del origen es igual a 5. Teniendo el parámetro, hállese la ecuación de la recta. (Dos soluciones.)

9. La ecuación de una familia de rectas es $2x + 3y + k = 0$. El producto de los segmentos que una recta de la familia determina sobre los ejes coordenados es 24. Hállese la ecuación de la recta. (Dos soluciones.)

10. Usando el método del parámetro, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es paralela a la recta $5x - y + 11 = 0$.

11. Por el método del parámetro hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -1)$ y es perpendicular a la recta $7x - 9y + 8 = 0$.

12. La suma de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es igual a 3. Por el método del parámetro hallar la ecuación de la recta sabiendo que contiene al punto $(2, 10)$. (Dos soluciones.)

13. La diferencia de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es igual a 1. Por el método del parámetro hallar la ecuación de la recta si debe pasar por el punto $(6, -4)$. (Dos soluciones.)

14. El producto de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es igual a -6. Por el método del parámetro hallar la ecuación de la recta si su pendiente es igual a 3.

15. Una recta pasa por el punto $A(-6, 7)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área igual a $10\frac{1}{2}$. Hallar su ecuación.

16. Una recta pasa por el punto $A(2, \frac{4}{3})$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de perímetro igual a 12. Hallar su ecuación. Compruébese el resultado por otro método.

17. La distancia de una recta al origen es 3. La recta pasa por el punto $(3\sqrt{5}, -3)$. Hallar su ecuación.

18. La suma de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es igual a 10. Hallar la ecuación de la recta si forma con los ejes coordenados un triángulo de área 12.

19. Una recta pasa por el origen y por la intersección de las rectas $3x + 2y - 14 = 0$ y $x - 3y - 1 = 0$. Hallar su ecuación, sin determinar el punto de intersección.

20. Una recta pasa por el punto $A(-2, 3)$ y por la intersección de las rectas $x + 5y + 2 = 0$ y $3x + 4y - 5 = 0$. Hallar su ecuación sin determinar su punto de intersección.

21. Una recta pasa por la intersección de las rectas de ecuaciones $3x + 2y + 8 = 0$ y $2x - 9y - 5 = 0$. Hallar su ecuación sabiendo que es paralela a la recta $6x - 2y + 11 = 0$.

22. Una recta pasa por la intersección de las rectas de ecuaciones $7x - 2y = 0$ y $4x - y - 1 = 0$ y es perpendicular a la recta $3x + 8y - 19 = 0$. Hallar su ecuación.

23. Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las dos rectas $3x + y - 9 = 0$, $4x - 3y + 1 = 0$ y cuya distancia del origen es 2.

24. Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las dos rectas $3x - 4y = 0$, $2x - 5y + 7 = 0$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área 8.

25. Una recta pasa por el punto de intersección de las rectas $2x - 3y - 5 = 0$ y $x + 2y - 13 = 0$ y el segmento que determina sobre el eje X es igual al doble de su pendiente. Hallar la ecuación de dicha recta.

37. Resumen de resultados. En el Artículo 12 se dió un resumen, en forma tabular, de los principales resultados obtenidos en el primer capítulo. Se recomienda al estudiante que haga una tabla semejante en que aparezcan las características y propiedades de la recta tal como se han presentado en este capítulo.

El lector habrá notado que muchos problemas pueden resolverse por dos o más métodos diferentes. Es una buena práctica comprobar una solución usando un método diferente. Los ejercicios del grupo 14 son problemas generales sobre la recta y se recomienda resolverlos por más de un método en los casos en que esto sea posible.

EJERCICIOS. Grupo 14

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar, por tres métodos diferentes, el área del triángulo cuyos vértices son $A(-1, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(5, -1)$.

2. Hallar el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo del ejercicio 1.

3. Hallar la ecuación de la recta de Euler para el triángulo del ejercicio 1. (Véase el ejercicio 26 del grupo 10, Art. 30.)

4. Demostrar que las medianas del triángulo del ejercicio 1 lo dividen en seis triángulos de igual área.

5. Una recta pasa por el punto de intersección de las dos rectas $2x + 3y + 1 = 0$ y $3x - 5y + 11 = 0$ y también por la intersección de las rectas $x - 3y + 7 = 0$, $4x + y - 11 = 0$. Hállese la ecuación de la recta sin determinar los puntos de intersección. Compruébese el resultado hallando los puntos de intersección.

6. Demostrar, analíticamente, que las bisectrices de los dos ángulos suplementarios formados por dos rectas cualesquiera que se cortan, son perpendiculares entre sí.

7. La ecuación (2) del Artículo 36 para la familia de rectas que pasan por el punto $(2, 3)$ no incluye a la recta $x = 2$. Obténgase otra forma de la ecuación de la misma familia, que sí incluya a la recta $x = 2$.

8. La base de un triángulo tiene una posición fija, y su longitud es constante e igual a a. La diferencia de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados es constante e igual a b^2. Demuéstrese que el lugar geométrico del vértice es una línea recta.

9. Las ecuaciones de tres rectas son

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,\quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad y \quad A_3x + B_3y + C_3 = 0.$$

Si existen tres constantes, diferentes de cero, k_1, k_2 y k_3, tales que la ecuación

$$k_1(A_1x + B_1y + C_1) + k_2(A_2x + B_2y + C_2) + k_3(A_3x + B_3y + C_3) = 0,$$

se verifica para todos los valores de x y y, demuéstrese que las tres rectas son concurrentes.

10. Sin hallar su punto de intersección, demostrar que las tres rectas $3x + 4y + 14 = 0$, $2x - y - 9 = 0$ y $7x + 3y + 1 = 0$ son concurrentes. (Véase ejercicio 20 del grupo 10, Art. 30.)

11. Demostrar, por dos métodos diferentes, que los puntos $A(1, 2)$ y $B(4, -3)$ están de lados opuestos de la recta $2x + 5y - 10 = 0$.

12. Determinar el valor de la constante b para que las tres rectas

$$8x + 3y - 1 = 0, \quad 3x + by - 3 = 0 \quad \text{y} \quad x - 5y + 16 = 0$$

sean concurrentes.

13. Demostrar, analíticamente, que las bisectrices de dos ángulos exteriores de cualquier triángulo forman un ángulo igual a la mitad del tercer ángulo exterior.

14. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son

$$y = ax - \frac{bc}{2}, \quad y = bx - \frac{ac}{2} \quad \text{y} \quad y = cx - \frac{ab}{2}.$$

Demostrar que el área del triángulo está dada por $\frac{1}{8}|(a-b)(b-c)(c-a)|$.

15. Demostrar que la recta $4x + 3y - 40 = 0$ es tangente al círculo cuyo radio es 5 y cuyo centro es el punto $C(3, 1)$. Hallar las coordenadas del punto de tangencia.

16. Un círculo tiene su centro en el punto $C(-2, -4)$. Sabiendo que es tangente a la recta $x + y + 12 = 0$, calcular el área del círculo.

17. Deducir una fórmula para la distancia entre dos rectas paralelas

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{y} \quad Ax + By + C' = 0, \quad C \neq C'.$$

18. Determinar los valores de k_1 y k_2 para que las dos ecuaciones

$$k_1x - 7y + 18 = 0 \quad \text{y} \quad 8x - k_2y + 9k_1 = 0$$

representen la misma recta.

19. Consideremos el ángulo comprendido entre dos rectas, definido como en la definición 1 del Artículo 8, de manera que α sea el ángulo formado por la recta dirigida l y la parte positiva del eje X y β el ángulo que forma l con la parte positiva del eje Y. Entonces α y β se llaman *ángulos directores* de l, y $\cos\alpha$ y $\cos\beta$ se llaman *cosenos directores*. Demostrar que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

20. Sean α_1, β_1 y α_2, β_2, respectivamente, los ángulos directores de las rectas dirigidas l_1 y l_2. Entonces, si θ es el ángulo formado por l_1 y l_2, demuéstrese que $\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2$.

21. Sea l una recta no paralela a ninguno de los ejes coordenados, y sean α y β sus ángulos directores. Si l contiene al punto (x_1, y_1), demuéstrese que su ecuación puede escribirse en la forma

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta}.$$

22. Si (x_1, y_1) son las coordenadas de un punto que está arriba de la recta $Ax + Bu + C = 0$, $B \neq 0$, demuéstrese que

$$Ax_1 + By_1 + C > 0, \quad \text{si } B > 0,$$

y

$$Ax_1 + By_1 + C < 0, \quad \text{si } B < 0.$$

23. Si (x_1, y_1) son las coordenadas de un punto que está abajo de la recta $Ax + By + C = 0$, $B \neq 0$, demuéstrese que las desigualdades del ejercicio 22 se invierten.

24. Demostrar que el área del triángulo formado por el eje Y y las rectas $y = m_1 x + b_1$ y $y = m_2 x + b_2$ está dada por

$$\frac{1}{2}\,\frac{(b_2 - b_1)^2}{|m_2 - m_1|}, \quad m_1 \neq m_2.$$

25. Si m_1, m_2 y m_3 son diferentes, demostrar que una condición necesaria y suficiente para que las tres rectas $y = m_1 x + b_1$, $y = m_2 x + b_2$ y $y = m_3 x + b_3$ sean concurrentes es

$$m_1 b_2 - m_2 b_1 - m_3 b_2 + m_3 b_1 - m_1 b_3 + m_2 b_3 = 0.$$

CAPITULO IV

ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA

38. **Introducción.** Después de la recta, la línea más familiar al estudiante es la circunferencia, pues la conoce desde sus primeros estudios de Geometría elemental. En el Artículo 22 hemos considerado la circunferencia como un ejemplo específico de lugar geométrico. En este capítulo haremos un estudio detallado de la ecuación de la circunferencia y deduciremos algunas de sus propiedades especiales.

39. **Ecuación de la circunferencia; forma ordinaria.** La ecuación de la circunferencia se obtendrá a partir de la siguiente

DEFINICIÓN. *Circunferencia* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano.

El punto fijo se llama *centro* de la circunferencia, y la distancia constante se llama *radio*.

TEOREMA 1. *La circunferencia cuyo centro es el punto* (h, k) *y cuyo radio es la constante* r, *tiene por ecuación*

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $P(x, y)$ (fig. 53) un punto cualquiera de la circunferencia de centro $C(h, k)$ y radio r. Entonces, por definición de circunferencia, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$|\overline{CP}| = r, \tag{1}$$

la cual, por el teorema 2 del Artículo 6, está expresada, analíticamente, por la ecuación

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r,$$

de donde,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \tag{2}$$

Recíprocamente, sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2), de manera que se verifica la igualdad

$$(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = r^2.$$

De aquí se deduce, extrayendo la raíz cuadrada,

$$\sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2} = r,$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (1) aplicada al punto P_1. Por tanto, demostrados los teoremas directo y recíproco, resulta que (2) es la ecuación buscada.

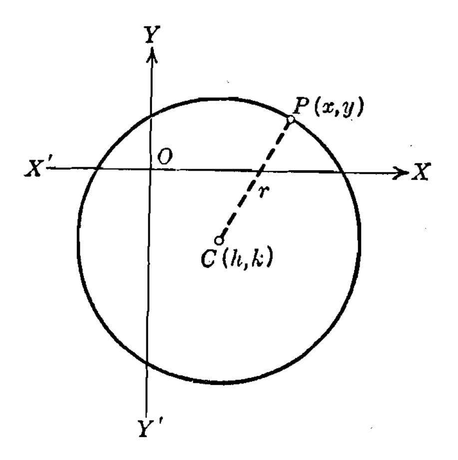


Fig. 53

Para el caso particular en que el centro C está en el origen, $h = k = 0$, y tenemos:

CoROLARIO. *La circunferencia de centro en el origen y radio* r *tiene por ecuación*

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (3)$$

NOTAS. 1. La ecuación (2) se conoce como la *ecuación ordinaria* o *forma ordinaria* de la ecuación de una circunferencia. En general, designaremos como forma ordinaria aquella ecuación de una curva que nos permita obtener más rápida y fácilmente sus características importantes. Así, por ejemplo, en el caso de la ecuación (2) podemos obtener, inmediatamente, las coordenadas del centro y el radio.

2. El tipo más simple de la ecuación ordinaria de una curva se denomina frecuentemente *forma canónica*. Por tanto, la ecuación (3) es la forma canónica de la ecuación de una circunferencia.

Por el teorema 1 observamos que, si se conocen las coordenadas del centro y la longitud del radio, la ecuación puede escribirse inmediatamente. Esto sugiere un método para obtener la ecuación de una circunferencia en cualquier problema dado; todo lo que se necesita es obtener las coordenadas del centro y la longitud del radio a partir de las condiciones dadas. La construcción de una circunferencia, en Geometría elemental, implica la determinación del centro y el radio; el método allí empleado, aunque no siempre es el más corto, puede usarse para obtener en Geometría analítica la ecuación de una circunferencia.

Ejemplo. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices son $P_1(-1, 1)$, $P_2(3, 5)$ y $P_3(5, -3)$.

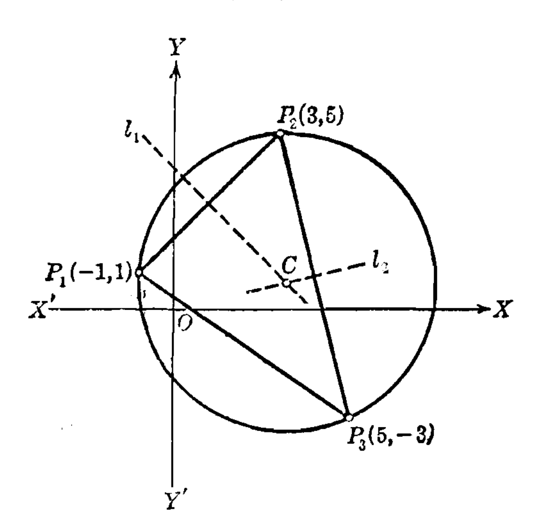


Fig. 54

Solución. La construcción de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados es un problema conocido de la Geometría elemental. El método consiste en construir las mediatrices l_1 y l_2, respectivamente, de dos cualesquiera de los lados, digamos P_1P_2 y P_2P_3 (fig. 54). La intersección C de l_1 y l_2 es el centro y la distancia de C a uno cualquiera de los puntos P_1, P_2, P_3 es el radio. Ahora determinaremos la ecuación de la circunferencia siguiendo este mismo método analíticamente.

Por los métodos del Capítulo III, se puede demostrar rápidamente que las ecuaciones de las mediatrices l_1 y l_2 son $x + y = 4$ y $x - 4y = 0$, respectivamente. La solución común de estas dos ecuaciones es $x = \frac{16}{5}$, $y = \frac{4}{5}$, de manera que las coordenadas del centro C son $\left(\frac{16}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Por el teorema 2 del Artículo 6, el radio está dado por

$$r = |\overline{CP_1}| = \sqrt{\left(\frac{16}{5}+1\right)^2 + \left(\frac{4}{5}-1\right)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{442}.$$

Por tanto, por el teorema 1 anterior, la ecuación buscada es

$$\left(x - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{442}{25}.$$

Se recomienda al estudiante que verifique el hecho de que las coordenadas de los puntos P_1, P_2 y P_3 satisfacen la ecuación hallada de la circunferencia.

EJERCICIOS. Grupo 15

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Escribir la ecuación de la circunferencia de centro $C(-3, -5)$ y radio 7.

2. Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $A(2, 3)$ y $B(-4, 5)$. Hallar la ecuación de la curva.

3. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(7, -6)$ y que pasa por el punto $A(2, 2)$.

4. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C(2, -4)$ y que es tangente al eje Y.

5. Una circunferencia tiene su centro en el punto $C(0, -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$. Hallar su ecuación.

6. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $(-4, -1)$ y que es tangente a la recta $3x + 2y - 12 = 0$.

7. La ecuación de una circunferencia es $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$. Demostrar que el punto $A(2, -5)$ es interior a la circunferencia y que el punto $B(-4, 1)$ es exterior.

8. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 5 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - 2y - 24 = 0$, $2x + 7y + 9 = 0$.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7, -5)$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $7x - 9y - 10 = 0$ y $2x - 5y + 2 = 0$.

10. Una cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ está sobre la recta cuya ecuación es $x - 7y + 25 = 0$. Hállese la longitud de la cuerda.

11. Hallar la ecuación de la mediatriz de la cuerda del ejercicio 10, y demostrar que pasa por el centro de la circunferencia.

Los ejercicios 12-16 se refieren al triángulo cuyos vértices son $A(-1, 0)$, $B(2, \frac{9}{4})$ y $C(5, 0)$.

12. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el vértice A y que es tangente al lado BC.

13. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo.

14. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo.

15. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo.

16. Demostrar que la circunferencia del ejercicio 15 pasa por los pies de las alturas del triángulo.

17. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre el eje X y que pasa por los dos puntos $A(1, 3)$ y $B(4, 6)$.

18. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre el eje Y y que pasa por los puntos $A(2, 2)$ y $B(6, -4)$.

19. Una circunferencia pasa por los puntos $A(-3, 3)$ y $B(1, 4)$ y su centro está sobre la recta $3x - 2y - 23 = 0$. Hállese su ecuación.

20. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $9x + 2y + 13 = 0$, $3x + 8y - 47 = 0$ y $x - y - 1 = 0$. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita.

21. La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = 50$ El punto medio de una cuerda de esta circunferencia es el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la cuerda.

22. La ecuación de una circunferencia es $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$. Hallar la ecuación de la tangente a este círculo en el punto $(6, 7)$.

23. La ecuación de una circunferencia es $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia que pasa por el punto $(3, 3)$. (Dos soluciones.)

24. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7, -5)$ y es tangente a la recta $x - y - 4 = 0$ en el punto $B(3, -1)$.

25. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $6x + 7y - 16 = 0$ y es tangente a cada una de las rectas $8x + 15y + 7 = 0$ y $3x - 4y - 18 = 0$. (Dos soluciones.)

40. Forma general de la ecuación de la circunferencia. Si desarrollamos la ecuación ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \tag{1}$$

obtenemos

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0,$$

lo cual puede escribirse en la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2}$$

en donde

$$D = -2h, \quad E = -2k \quad \text{y} \quad F = h^2 + k^2 - r^2.$$

Se deduce, por lo tanto, que la ecuación de una circunferencia cualquiera puede escribirse en la forma (2), llamada *forma general* de la ecuación de la circunferencia. El problema que se presenta ahora es averiguar si, recíprocamente, toda ecuación de la forma general (2) representa una circunferencia. Para contestar esta pregunta, pasaremos de la forma (2) a la forma (1) empleando el método de completar cuadrados. Ordenando los términos de (2), resulta

$$(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = -F;$$

y sumando $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$ a ambos miembros, obtenemos

$$\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4},$$

de donde,

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}. \qquad (3)$$

Comparando las ecuaciones (1) y (3), vemos que depende del valor del segundo miembro de (3) el que (3) represente o no una circunferencia. Hay tres casos posibles por considerar:

a) Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la ecuación (3) representa una circunferencia de centro en el punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio igual a $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

b) Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, la ecuación (3) se dice, con frecuencia, que representa una circunferencia de radio cero; se dice también que es un círculo punto o círculo nulo. Desde nuestro punto de vista, sin embargo, la ecuación (3) representa un solo punto de coordenadas $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.

c) Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, la ecuación (3) se dice que representa un círculo imaginario. En nuestra Geometría real, sin embargo, la ecuación (3) *no representa*, en este caso, un *lugar geométrico*.

Aunque el caso (*b*) puede considerarse como un caso límite del caso (*a*), en adelante consideraremos que una ecuación representa una circunferencia solamente en el caso (*a*). Por tanto, tenemos el siguiente

TEOREMA 2. *La ecuación* $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ *representa una circunferencia de radio diferente de cero, solamente si*

$$D^2 + E^2 - 4F > 0.$$

Las coordenadas del centro son, entonces, $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ *y el radio es* $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

NOTA. Si se da la ecuación de una circunferencia en la forma general, se aconseja al estudiante que no proceda mecánicamente, usando las fórmulas dadas en el teorema 2, para obtener el centro y el radio. En vez de esto, es conveniente que reduzca la ecuación a la forma ordinaria por el método de completar cuadrados, tal como se hizo en la deducción del teorema mismo.

Ejemplo. Reducir las tres ecuaciones siguientes a la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia. Si la ecuación representa una circunferencia, hállense su centro y su radio.

$a)\quad 2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0.$
$b)\quad 36x^2 + 36y^2 + 48x - 108y + 97 = 0.$
$c)\quad x^2 + y^2 - 8x + 6y + 29 = 0.$

Solución. *a*) Primero dividimos la ecuación por 2, coeficiente de x^2, y pasamos el término independiente al segundo miembro. Esto nos da, después de volver a ordenar los términos,

$$(x^2 - 5x) + (y^2 + 3y) = \frac{15}{2}.$$

Para completar los cuadrados, sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x y el cuadrado de la mitad del coeficiente de y a ambos miembros. Esto nos da

$$\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) = \frac{15}{2} + \frac{25}{4} + \frac{9}{4},$$

que puede escribirse en la forma

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 16.$$

Por tanto, la ecuación dada representa una circunferencia cuyo centro es $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ y cuyo radio es 4.

b) Dividiendo la ecuación por 36, trasponiendo el término independiente, y volviendo a ordenar los términos, obtenemos

$$\left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) + (y^2 - 3y) = -\frac{97}{36}.$$

Completando los cuadrados, resulta

$$\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + \left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = -\frac{97}{36} + \frac{4}{9} + \frac{9}{4}.$$

de donde,

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 0.$$

Por tanto, el lugar geométrico de la ecuación (*b*) es el punto único $\left(-\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}\right)$.

c) Ordenando los términos y completando los cuadrados, obtenemos

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) = -29 + 16 + 9,$$

de donde,

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = -4.$$

Por tanto, la ecuación (*c*) no representa ningún lugar geométrico real.

41. Determinación de una circunferencia sujeta a tres condiciones dadas. En la ecuación ordinaria de la circunferencia (Art. 39),

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \qquad (1)$$

hay tres constantes arbitrarias independientes, h, k y r. De manera semejante, en la ecuación general (Art. 40),

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (2)$$

hay tres constantes arbitrarias independientes, D, E y F. Como la ecuación de toda circunferencia puede escribirse en cualquiera de las dos formas (1) o (2), la ecuación de cualquier circunferencia particular puede obtenerse determinando los valores de tres constantes. Esto requiere tres ecuaciones independientes, que pueden obtenerse a partir de tres condiciones independientes. Por tanto, *analíticamente, la ecuación de una circunferencia se determina completamente por tres condiciones independientes*. Geométricamente, una circunferencia queda, también, perfectamente determinada por tres condiciones independientes; así, por ejemplo, queda determinada por tres cualesquiera de sus puntos. El estudiante debe comparar estas observaciones con la discusión análoga que sobre la recta dimos en el Artículo 29. Vemos, por lo tanto, que además del método estudiado en el Artículo 39 tenemos ahora otro método para determinar la ecuación de una circunferencia.

Ejemplo 1. Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos $A(-1, 1)$, $B(3, 5)$ y $C(5, -3)$.

Solución. Este problema es idéntico al ejemplo dado en el Artículo 39. Supongamos que la ecuación buscada es, en la forma general,

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (2)$$

en donde las constantes D, E y F deben ser determinadas.

Como los tres puntos dados están sobre la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (2). De acuerdo con esto, tenemos las tres ecuaciones siguientes correspondiendo a los puntos dados:

$$\begin{cases} (-1, 1), & 1 + 1 - D + E + F = 0, \\ (3, 5), & 9 + 25 + 3D + 5E + F = 0, \\ (5, -3), & 25 + 9 + 5D - 3E + F = 0, \end{cases}$$

que pueden escribirse más abreviadamente así:

$$\begin{cases} D - E - F = 2, \\ 3D + 5E + F = -34, \\ 5D - 3E + F = -34. \end{cases}$$

La solución de este sistema de tres ecuaciones nos da

$$D = -\frac{32}{5}, \quad E = -\frac{8}{5}, \quad F = -\frac{34}{5},$$

de manera que sustituyendo estos valores en (2), obtenemos

$$x^2 + y^2 - \frac{32}{5}x - \frac{8}{5}y - \frac{34}{5} = 0,$$

o sea,

$$5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$$

como ecuación de la circunferencia buscada.

El centro y el radio de obtienen reduciendo la última ecuación a la forma ordinaria

$$\left(x - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{442}{25},$$

de donde el centro es $\left(\frac{16}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y el radio es $\frac{1}{5}\sqrt{442}$.

Ejemplo 2. Hallar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos (6, 2), (8, 0) y cuyo centro está sobre la recta $3x + 7y + 2 = 0$.

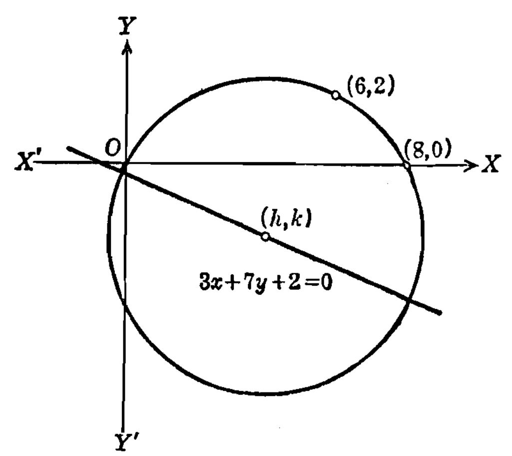


Fig. 55

Solución. Supongamos que la ecuación buscada, en la forma ordinaria, es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \qquad (1)$$

Como el centro (h, k) está sobre la recta $3x + 7y + 2 = 0$, sus coordenadas satisfacen la ecuación de la recta, y tenemos

$$3h + 7k + 2 = 0. \qquad (3)$$

También, como los puntos (6, 2) y (8, 0) están sobre la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (1). Por tanto, tenemos las dos ecuaciones

$$(6 - h)^2 + (2 - k)^2 = r^2, \qquad (4)$$

$$(8 - h)^2 + k^2 = r^2. \qquad (5)$$

La solución del sistema formado por las tres ecuaciones (3), (4) y (5) con las tres incógnitas h, k y r da

$$h = 4, \quad k = -2, \quad r = 2\sqrt{5}.$$

Por tanto, la ecuación buscada es

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 20.$$

El centro es el punto $(4, -2)$ y el radio es $2\sqrt{5}$. La gráfica aparece en la figura 55.

En el Artículo 35 obtuvimos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados diferentes en forma de determinante, Por un argumento semejante, podemos obtener la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos dados, no colineales, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, en forma de determinante. El resultado está dado por el

TEOREMA 3. *La ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos dados no colineales* $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ *viene dada por el determinante*

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

NOTA. Esta forma es útil para determinar si cuatro puntos dados están o no sobre una circunferencia. Se dice que tales puntos son *concíclicos*.

EJERCICIOS. Grupo 16

Dibujar una figura para cada ejercicio.

En cada uno de los ejercicios 1-3, reduciendo la ecuación dada a la forma ordinaria, determinar si representa o no una circunferencia. Si la respuesta es afirmativa, hallar su centro y su radio.

1. $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0.$
2. $4x^2 + 4y^2 + 28x - 8y + 53 = 0.$
3. $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0.$
4. Hallar el área del círculo cuya ecuación es

$$9x^2 + 9y^2 + 72x - 12y + 103 = 0.$$

5. Hallar la longitud de la circunferencia cuya ecuación es

$$25x^2 + 25y^2 + 30x - 20y - 62 = 0.$$

6. Demostrar que las circunferencias $4x^2 + 4y^2 - 16x + 12y + 13 = 0$ y $12x^2 + 12y^2 - 48x + 36y + 55 = 0$ son concéntricas.

7. Demostrar que las circunferencias $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0$ y $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$ son tangentes.

8. Demostrar, por dos métodos, que las circunferencias

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0 \quad y \quad 4x^2 + 4y^2 - 40x + 8y + 79 = 0$$

no se cortan.

En cada uno de los ejercicios 9-11, determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados, usando el método del ejemplo 1, Artículo 41.

9. $(0, 0)$, $(3, 6)$, $(7, 0)$.
10. $(2, -2)$, $(-1, 4)$, $(4, 6)$.
11. $(4, -1)$, $(0, -7)$, $(-2, -3)$.
12. Resolver el ejercicio 9 por el método del ejemplo del Artículo 39.
13. Resolver el ejercicio 10 por el método del ejemplo 2, Artículo 41.
14. Resolver el ejercicio 11 usando el determinante del teorema 3, Artículo 41.
15. Por medio del teorema 3, Artículo 41, demostrar que los cuatro puntos $(-1, -1)$, $(2, 8)$, $(5, 7)$, $(7, 3)$ son concíclicos.
16. Resolver el ejercicio 15 hallando la ecuación de la circunferencia que pasa por tres cualesquiera de los puntos y demostrando después que las coordenadas del cuarto punto satisfacen esta ecuación.
17. Las ecuaciones de dos circunferencias diferentes son

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0 \quad y \quad x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0.$$

Hallar las condiciones que deben satisfacer los coeficientes para que sean concéntricas.

18. La ecuación de una circunferencia es $4x^2 + 4y^2 - 16x + 20y + 25 = 0$. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica que es tangente a la recta $5x - 12y = 1$.

19. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 39 = 0$$

en el punto $(4, 5)$.

20. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(11, 4)$ y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. (Dos soluciones.)

21. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-1, -4)$, $(2, -1)$ y cuyo centro está sobre la recta $4x + 7y + 5 = 0$.

22. Una circunferencia de radio 5 es tangente a la recta $3x - 4y - 1 = 0$ en el punto $(3, 2)$. Hallar su ecuación. (Dos soluciones.)

23. Una circunferencia de radio $\sqrt{13}$ es tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 47 = 0$$

en el punto $(6, 5)$. Hallar su ecuación. (Dos soluciones.)

24. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(1, 4)$ y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ en el punto $(-2, 1)$.

25. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(5, 9)$ y es tangente a la recta $x + 2y - 3 = 0$ en el punto $(1, 1)$.

26. Una circunferencia de radio 5 pasa por los puntos $(0, 2)$, $(7, 3)$. Hállese su ecuación. (Dos soluciones.)

27. Demostrar, analíticamente, que cualquier recta que pasa por el punto $(-1, 5)$ no puede ser tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6 = 0$. Interpretar el resultado geométricamente.

28. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $7x - 2y - 1 = 0$ y que es tangente a cada una de las rectas $5x - 12y + 5 = 0$ y $4x + 3y - 3 = 0$. (Dos soluciones.)

29. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos lados son $4x - 3y = 0$, $4x + 3y - 8 = 0$, $y = 0$.

30. Una circunferencia que es tangente a un lado de un triángulo y a las prolongaciones de los otros dos lados se llama *exinscrita* al triángulo. Hallar las ecuaciones de las tres circunferencias exinscritas al triángulo del ejercicio 29. (Véase el ejercicio 16 del grupo 12.)

31. Determinar el valor de la constante k para que la recta $2x + 3y + k = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$.

32. Hallar las ecuaciones de las rectas que tienen de pendiente 5 y son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 9 = 0$.

33. Desde el punto $A(-2, -1)$ se traza una tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$. Si B es el punto de contacto, hallar la longitud del segmento AB.

34. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(6, 1)$ y es tangente a cada una de las rectas $4x - 3y + 6 = 0$, $12x + 5y - 2 = 0$. (Dos soluciones.)

35. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-3, -1)$ y $(5, 3)$ y es tangente a la recta $x + 2y - 13 = 0$. (Dos soluciones.)

42. Familias de circunferencias. Ahora consideraremos familias o haces de circunferencias de la misma manera que en el Artículo 36 consideramos familias de rectas. En el Artículo 41 demostramos que una circunferencia y su ecuación se determinan cada una por tres condiciones independientes. Una circunfererencia que satisface menos de tres condiciones independientes no es, por lo tanto, única. La ecuación de una circunferencia que satisface solamente a dos condiciones, contiene una constante arbitraria llamada *parámetro*. Se dice entonces que tal ecuación representa una *familia* de circunferencias *de un parámetro*. Por ejemplo, la familia de todas las circunferencias concéntricas cuyo centro común es el punto $(1, 2)$ tiene por ecuación

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = k^2,$$

en donde el parámetro k es cualquier número positivo

Consideremos ahora el caso importante de la familia de curvas que pasan por las intersecciones de dos circunferencias dadas. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias diferentes dadas cualesquiera, cuyas ecuaciones son

$$C_1: \quad x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0, \tag{1}$$

$$C_2: \quad x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0. \tag{2}$$

De (1) y (2) se deduce la ecuación

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2) = 0, \tag{3}$$

en donde el parámetro k puede tomar todos los valores reales. Supongamos que los círculos C_1 y C_2 se cortan en dos puntos distintos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Como las coordenadas (x_1, y_1) de P_1 satisfacen ambas ecuaciones (1) y (2), también satisfacen a la ecuación (3), y ésta se reduce entonces a la forma $0 + k \cdot 0 = 0$, que es verdadera para todos los valores de k. Análogamente, las coordenadas (x_2, y_2) de P_2 que satisfacen ambas ecuaciones (1) y (2) satisfacen también a la ecuación (3) para todos los valores de k. Por tanto, la ecuación (3) representa la familia de curvas que pasan por las dos intersecciones de las circunferencias C_1 y C_2. Para determinar la naturaleza de las curvas de esta familia, escribimos la ecuación (3) en la forma

$$(k+1)x^2 + (k+1)y^2 + (D_1 + kD_2)x + (E_1 + kE_2)y + F_1 + kF_2 = 0. \tag{4}$$

Si $k = -1$, la ecuación (4) se reduce a una de primer grado y, por lo tanto, representa una línea recta. Pero, para cualquier otro valor de k, la ecuación (4) representa una circunferencia de acuerdo con el teorema 2 del Artículo 40. En particular, para $k = 0$, la ecuación (4) se reduce a la ecuación C_1.

La ecuación (3) es particularmente útil para obtener la ecuación de una curva que pasa por las intersecciones de las circunferencias dadas, ya que entonces no es necesario determinar las coordenadas de los puntos de intersección.

Ejemplo. Las ecuaciones de dos circunferencias son

$$C_1: \quad x^2 + y^2 + 7x - 10y + 31 = 0,$$

y

$$C_2: \quad x^2 + y^2 - x - 6y + 3 = 0.$$

Hallar la ecuación de la circunferencia C_3 que pasa por las intersecciones de C_1 y C_2 y tiene su centro sobre la recta l: $x - y - 2 = 0$.

Solución. La circunferencia buscada C_3 es un elemento de la familia

$$x^2 + y^2 + 7x - 10y + 31 + k(x^2 + y^2 - x - 6y + 3) = 0, \qquad (5)$$

en donde el parámetro k debe determinarse por la condición de que el centro de C_3 está sobre la recta l. El centro de cualquier circunferencia de la familia (5) se halla fácilmente y sus coordenadas son $\left(\frac{k-7}{2(k+1)}, \frac{3k+5}{k+1} \right)$. Como estas coordenadas deben satisfacer la ecuación de l, tenemos

$$\frac{k-7}{2(k+1)} - \frac{3k+5}{k+1} - 2 = 0,$$

de donde $k = -\frac{7}{3}$. Sustituyendo este valor de k en (5) y simplificando, obtenemos para ecuación de C_3:

$$x^2 + y^2 - 7x - 3y - 18 = 0.$$

En la figura 56 se han trazado las tres circunferencias C_1, C_2, C_3, y la recta l. Se deja al estudiante, como ejercicio, la demostración de que los centros de C_1, C_2 y C_3 son colineales.

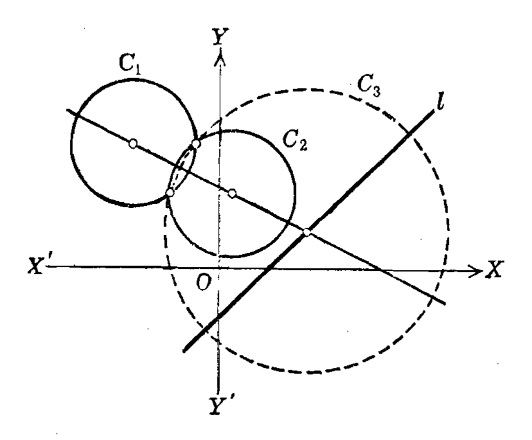


Fig. 56

Consideremos ahora el caso de dos circunferencias C_1 y C_2 tangentes entre sí, en el punto $P_3(x_3, y_3)$. Por un razonamiento análogo al anterior, en el caso de intersección en dos puntos diferentes, podemos demostrar que, para cada valor de k diferente de -1, la ecuación (3) representa una circunferencia tangente a C_1 y C_2 en P_3.

Finalmente, consideremos el caso de que C_1 y C_2 no tengan ningún punto común. Entonces, las coordenadas de un punto que satisfacen la ecuación (2) no pueden satisfacer la ecuación (1) y, por lo tanto, no pueden satisfacer la ecuación (3) para ningún valor de k. Análogamente, las coordenadas de un punto que satisfacen (1) no pueden satisfacer (2), y, por lo tanto, tampoco (3), para ningún valor de k excepto $k = 0$, en cuyo caso, (3) se reduce a (1).

En resumen, ninguna circunferencia de la familia (3), excepto C_1, tiene un punto en común con C_1 o C_2. Aun más, sea P_4 un punto cualquiera que esté sobre cualquier elemento de la familia (3), excepto sobre C_1. Acabamos de demostrar que P_4 no puede estar sobre C_2. Por tanto, si se sustituyen las coordenadas de P_4 en las ecuaciones (1) y (2), los primeros miembros no se reducirán a cero sino que tendrán valores diferentes a cero, digamos k_1 y k_2, respectivamente. Por lo tanto, si se sustituyen en (3) las coordenadas de P_4, la ecuación toma la forma

$$k_1 + kk_2 = 0,$$

de donde k tiene el único valor $-\frac{k_1}{k_2}$. Esto significa que hay solamente una circunferencia de la familia (3) que pasa por el punto P_4. Como P_4 se eligió como *cualquier* punto sobre *cualquier* elemento de (3), excepto C_1, se deduce que ningún par de circunferencias de la familia (3) tienen un punto en común.

En los dos primeros casos considerados anteriormente, es decir, cuando C_1 y C_2 tienen uno o dos puntos comunes, la ecuación (3) representa una circunferencia real para todo valor de k, ya que por lo menos existe un punto del lugar geométrico. Pero esto no ocurre cuando C_1 y C_2 no tienen ningún punto común. Entonces no se puede asegurar que la ecuación (3) represente una circunferencia real para todo valor de k. Si C_1 y C_2 no tienen ningún punto común es fácil encontrar ejemplos, en los que, para valores específicos de k, la ecuación (3) no representa ninguna circunferencia real. (Ver el ejercicio 18 del grupo 17.)

La recta que pasa por los centros de dos circunferencias no concéntricas se llama *recta de los centros*. Es muy sencillo demostrar que todas las circunferencias de la familia (3) tienen su centro en la recta de los centros de C_1 y C_2. En efecto, los centros de C_1 y C_2 son $\left(-\frac{D_1}{2}, -\frac{E_1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{D_2}{2}, -\frac{E_2}{2}\right)$, respectivamente, y la ecuación de la recta que contiene a estos dos puntos es

$$2(E_1 - E_2)x - 2(D_1 - D_2)y + D_2E_1 - D_1E_2 = 0,$$

la cual se satisface por las coordenadas $\left(-\frac{D_1 + kD_2}{2(k+1)}, -\frac{E_1 + kE_2}{2(k+1)}\right)$ del centro de cualquier circunferencia definida por (3).

Todos los resultados precedentes se resumen en el siguiente

TEOREMA 4. *Si las ecuaciones de dos circunferencias dadas cualesquiera* C_1 *y* C_2 *son*

$$C_1:\ x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0,$$

$$C_2:\ x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0,$$

la ecuación

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

representa una familia de circunferencias todas las cuales tienen sus centros en la recta de los centros de C_1 *y* C_2.

Si C_1 *y* C_2 *se cortan en dos puntos diferentes, la ecuación representa, para todos los valores de* k *diferentes de* -1, *todas las circunferencias que pasan por los dos puntos de intersección* C_1 *y* C_2, *con la única excepción de* C_2 *misma.*

Si C_1 *y* C_2 *son tangentes entre sí, la ecuación representa, para todos los valores de* k *diferentes de* -1, *todas las circunferencias que son tangentes a* C_1 *y* C_2 *en su punto común, con la única excepción de* C_2 *misma.*

Si C_1 *y* C_2 *no tienen ningún punto común la ecuación representa una circunferencia para cada valor de* k *diferente de* -1, *siempre que la ecuación resultante tenga coeficientes que satisfagan las condiciones especificadas en el teorema 2 del Artículo 40. Ningún par de circunferencias de la familia tiene un punto común con ninguna de las dos circunferencias* C_1 *y* C_2.

43. Eje radical. En el artículo precedente hemos considerado dos circunferencias diferentes, C_1 y C_2, de ecuaciones

$$C_1: \quad x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0, \tag{1}$$

$$C_2: \quad x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0. \tag{2}$$

A partir de estas ecuaciones formamos la ecuación

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2) = 0, \tag{3}$$

y la discutimos como ecuación de una familia de circunferencias para todos los valores de k, excepto -1. Si $k = -1$, la ecuación (3) toma la forma

$$(D_1 - D_2)\,x + (E_1 - E_2)\,y + F_1 - F_2 = 0. \tag{4}$$

Si C_1 y C_2, no son concéntricas, se verificará $D_1 \neq D_2$ o $E_1 \neq E_2$, o ambas, de manera que por lo menos uno de los coeficientes de x y y en (4) será diferente de cero, y la ecuación (4) representa entonces una línea recta llamada *eje radical* de C_1 y C_2.

Si C_1 y C_2 se cortan en dos puntos diferentes, se sigue, de la discusión del Artículo 42, que el eje radical pasa por estos dos puntos y, por tanto, coincide con su cuerda común. Si C_1 y C_2 son tangentes entre sí, su eje radical es la tangente común a ambas circunferencias. Si C_1 y C_2 no tienen ningún punto común y no son concéntricas, su eje radical no tiene ningún punto común con ninguna de las dos circunferencias.

Ahora demostraremos que el eje radical de dos circunferencias cualesquiera es perpendicular a su recta de los centros. En efecto,

en el Artículo 42 vimos que la ecuación de la recta de los centros de C_1 y C_2 es

$$2(E_1 - E_2)\,x - 2(D_1 - D_2)\,y + D_2 E_1 - D_1 E_2 = 0\,,$$

y la pendiente de esta recta es $\dfrac{E_1 - E_2}{D_1 - D_2}$, si $D_1 \neq D_2$. La pendiente del eje radical, deducida de la ecuación (4), es $-\dfrac{D_1 - D_2}{E_1 - E_2}$, si $E_1 \neq E_2$. Como estas pendientes son negativamente recíprocas, se sigue que el eje radical es perpendicular a la recta de los centros. Si $D_1 = D_2$, entonces, por la ecuación (4), resulta que el eje radical es paralelo al eje X, y por la ecuación anterior, la recta de los centros es paralela al eje Y; por tanto, en este caso, el eje radical y la línea de los centros también son perpendiculares entre sí. Análogamente, si $E_1 = E_2$, el eje radical es paralelo al eje Y y la recta de los centros es paralela al eje X; por lo tanto, son perpendiculares entre sí.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación del eje radical de las circunferencias

$$C_1:\quad 2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y + 9 = 0, \qquad (5)$$

$$C_2:\quad x^2 + y^2 - 8x - 12y + 43 = 0, \qquad (6)$$

y demostrar que es perpendicular a su recta de los centros.

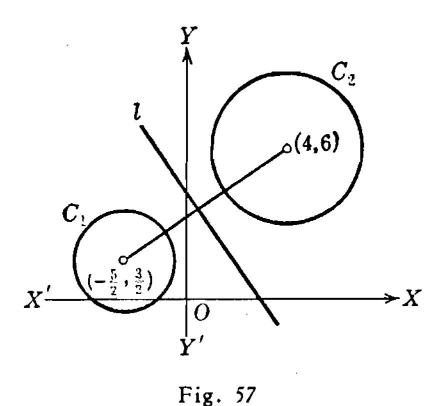


Fig. 57

Solución. Si multiplicamos la ecuación (6) por 2 y la restamos de la ecuación (5), obtenemos

$$l:\quad 26x + 18y - 77 = 0$$

como ecuación del eje radical. Su pendiente es $-\dfrac{13}{9}$.

Las coordenadas de los centros C_1 y C_2 se encuentran fácilmente y son $\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $(4, 6)$, respectivamente, de manera que la pendiente de la recta de los centros es $\frac{6-(3/2)}{4+(5/2)} = \frac{9}{13}$, que es negativamente recíproca de la pendiente del eje radical. Por tanto, el eje radical es perpendicular a la recta de los centros. Las circunferencias C_1 y C_2, su recta de los centros y su eje radical l, se han trazado en la figura 57.

Para deducir una propiedad importante del eje radical, estableceremos el siguiente teorema:

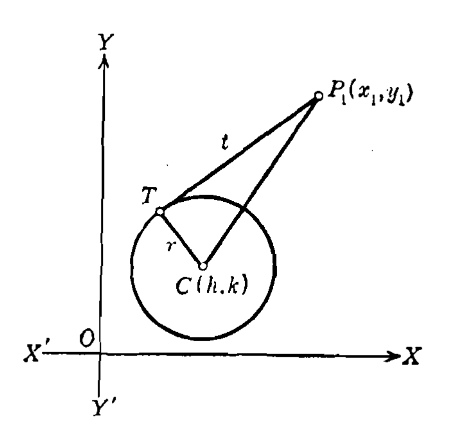


Fig. 58

TEOREMA 5. *Si* t *es la longitud de la tangente trazada del punto exterior* $P_1(x_1, y_1)$ *a la circunferencia* $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, *entonces*

$$t = \sqrt{(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2 - r^2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea T (fig. 58) el punto de tangencia, de manera que $t = \overline{P_1T}$. Como P_1T es tangente a la circunferencia, el radio CT es perpendicular a P_1T. Por tanto, en el triángulo rectángulo P_1TC, tendremos:

$$t^2 = \overline{CP_1}^2 - r^2. \qquad (7)$$

Por el teorema 2, Artículo 6,

$$\overline{CP_1}^2 = (x_1-h)^2 + (y_1-k)^2,$$

valor que, sustituído en la ecuación (7), da

$$t^2 = (x_1-h)^2 + (y_1-k)^2 - r^2.$$

de donde,

$$t = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}.$$

NOTA. Evidentemente, se pueden trazar dos tangentes del punto P_1 al círculo, pero sus longitudes son iguales.

Ejemplo 2. Hallar la longitud de la tangente trazada del punto $(-3, 2)$ a la circunferencia $9x^2 + 9y^2 - 30x - 18y - 2 = 0$.

Solución. Para aplicar el teorema 5, es necesario hacer que los coeficientes de x^2 y y^2 sean iguales a la unidad. Para ello dividiendo por 9, resulta:

$$x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x - 2y - \frac{2}{9} = 0.$$

Sustituyendo x por -3 y y por 2 en el primer miembro de esta ecuación, obtenemos

$$t^2 = 9 + 4 + 10 - 4 - \frac{2}{9} = \frac{169}{9},$$

de donde se deduce que la longitud de la tangente es $t = \frac{13}{3}$. Debe observarse que, si se utilizara la ecuación de la circunferencia en la forma original, es decir, sin dividir por 9, el resultado sería el triple del valor correcto. Se recomienda al estudiante que dibuje la figura correspondiente a este ejercicio.

Por medio del teorema 5, podemos demostrar fácilmente que *el eje radical de dos circunferencias no concéntricas es el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que las longitudes de las tangentes trazadas desde él a las dos circunferencias son iguales*. En efecto, sean C_1 y C_2 las dos circunferencias no concéntricas dadas por las ecuaciones (1) y (2), respectivamente. Sea $P(x, y)$ el punto móvil y sean t_1 y t_2, respectivamente, las longitudes de las tangentes trazadas de P a C_1 y C_2. Entonces, por el teorema 5,

$$t_1^2 = x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1,$$

y

$$t_2^2 = x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2,$$

Como, por hipótesis, $t_1 = t_2$, de estas dos últimas ecuaciones se deduce que

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0,$$

que, según (4), es la ecuación del eje radical de C_1 y C_2. Podemos demostrar, recíprocamente, que, si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto que está sobre el eje radical, las longitudes de las tangentes trazadas de P_1 a C_1 y C_2 son iguales.

Los resultados precedentes se resumen en el siguiente

TEOREMA 6. *Si las ecuaciones de dos circunferencias no concéntricas* C_1 *y* C_2 *son*

$$C_1: \quad x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0,$$

$$C_2: \quad x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0,$$

la eliminación de x^2 *y* y^2 *entre estas dos ecuaciones da la ecuación lineal*

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0,$$

que es la ecuación del eje radical de C_1 *y* C_2.

Si C_1 *y* C_2 *se cortan en dos puntos diferentes, su eje radical coincide con su cuerda común; si* C_1 *y* C_2 *son tangentes entre sí, su eje radical es su tangente común, y si* C_1 *y* C_2 *no tienen ningún punto común, su eje radical no tiene ningún punto común con ninguno de ellos.*

El eje radical de C_1 *y* C_2 *es perpendicular a la recta de los centros; es también el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que las longitudes de las tangentes trazadas por él a* C_1 *y* C_2 *son iguales.*

Consideremos tres circunferencias, de las cuales no hay dos que sean concéntricas. Cada par tiene un eje radical, y las tres, tomadas a pares, tienen tres ejes radicales Si las tres circunferencias no tienen una recta de los centros común, sus tres ejes radicales se cortan en un punto llamado *centro radical*. La demostración de la existencia del centro radical de tres circunferencias dadas se deja como ejercicio al estudiante.

EJERCICIOS. Grupo 17

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Escribir la ecuación de la familia de circunferencias concéntricas cuyo centro común es el punto $(-3, 5)$. Dibujar tres elementos de la familia, especificando el valor del parámetro en cada caso.

2. Escribir la ecuación de la familia de circunferencias cuyos centros están sobre el eje Y. Desígnense los dos parámetros por k_1 y k_2. Dibújense tres elementos de la familia conservando a k_1 constante y asignando a k_2 tres valores diferentes. Dibújense otros tres miembros de la familia haciendo que k_2 permanezca constante y asignando a k_1 tres valores diferentes.

3. Escribir la ecuación de la familia de todas las circunferencias que pasan por el origen. Dibujar seis elementos de la familia asignando valores a los dos parámetros como en el ejercicio 2.

4. Determinar la ecuación de la familia de circunferencias, cada una de las cuales pasa por el origen y el punto $(1, 3)$. Dibujar tres elementos de la familia, especificando el valor del parámetro en cada caso.

5. Dibujar las dos circunferencias cuyas ecuaciones son

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 8y + 7 = 0 \quad \text{y} \quad C_2 \equiv x^2 + y^2 - 16x - 4y + 3 = 0.$$

También dibujar tres elementos de la familia $C_1 + kC_2 = 0$ para valores de k diferentes de 0 y -1, y demostrar que sus centros están sobre la recta de los centros de C_1 y C_2.

6. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(-8, 5)$ y por las intersecciones de las circunferencias $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$ y $x^2 + y^2 - 18x - 4y + 67 = 0$.

7. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre el eje X y pasa por las intersecciones de las dos circunferencias dadas en el ejercicio 6.

8. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el eje Y y pasa por las intersecciones de las dos circunferencias dadas en el ejercicio 6.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre la recta $2x + y - 14 = 0$ y que pasa por las intersecciones de las circunferencias

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0.$$

10. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ y que pasa por las intersecciones de las circunferencias $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 16 = 0$ y $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$. (Dos soluciones.)

11. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por las intersecciones de las circunferencias $x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2 = 0$, y que es tangente a la recta $x + 3y - 14 = 0$. (Dos soluciones.)

12. La ecuación de la familia de circunferencias dada en el teorema 4 del Artículo 42 no incluye a la ecuación de C_2. Usando dos parámetros k_1 y k_2, escríbase la ecuación de la familia de tal manera que incluya a C_2. (Véase la ecuación [6] del Artículo 36.) ¿A qué restricciones deben someterse los parámetros k_1 y k_2? ¿Qué relación debe existir entre k_1 y k_2 para obtener la ecuación de una línea recta?

13. Demostrar que las circunferencias C_1: $x^2 + y^2 - 3x - 6y + 10 = 0$ y C_2: $x^2 + y^2 - 5 = 0$, son tangentes. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 en su punto común y que pasa por el punto $A(7, 2)$. Demostrar que el centro de esta circunferencia está sobre la recta de los centros de C_1 y C_2.

14. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 del ejercicio 13 en su punto común y cuyo centro está sobre la recta $3x + y + 5 = 0$.

15. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 del ejercicio 13 en su punto común y cuyo radio es igual a $\frac{3}{2}\sqrt{5}$. (Dos soluciones.)

16. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 del ejercicio 13 en su punto común y que es tangente a la recta $x - 2y - 1 = 0$. (Dos soluciones.)

17. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(-10, -2)$ y por las intersecciones de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 32 = 0$ y la recta $x - y + 4 = 0$.

18. Demostrar que las circunferencias $C_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ y $C_2 \equiv x^2 + y^2 + 10x - 6y + 33 = 0$ no se cortan. Demostrar que para $k = -2$ el elemento correspondiente de la familia $C_1 + kC_2 = 0$ es una circun-

ferencia que no corta a ninguna de las dos circunferencias C_1 y C_2, y cuyo centro está sobre la recta de los centros de C_1 y C_2. Demuéstrese, también, que no existe ninguna circunferencia real si k toma uno cualquiera de los valores 1, 2, 3. Hállense otros valores de k para los cuales no exista circunferencia real.

19. Hallar la ecuación del eje radical de las circunferencias

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0, \quad 4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0,$$

y demostrar que es perpendicular a su recta de los centros.

20. Hallar la ecuación del eje radical de las circunferencias

$$9x^2 + 9y^2 - 54x - 48y + 64 = 0, \quad x^2 + y^2 + 8x - 10y + 37 = 0,$$

y demostrar que es perpendicular a su recta de los centros.

21. Hallar la ecuación y la longitud de la cuerda común de las circunferencias $x^2 + y^2 - 8y + 6 = 0$ y $x^2 + y^2 - 14x - 6y + 38 = 0$.

22. Demostrar analíticamente que si dos circunferencias diferentes son concéntricas, su eje radical no existe.

23. Hallar la longitud de la tangente trazada del punto $P(3, 4)$ a la circunferencia $3x^2 + 3y^2 + 12x + 4y - 35 = 0$.

24. Hallar la longitud de la tangente trazada del punto $P(-1, 3)$ a la circunferencia $3x^2 + 3y^2 - 14x - 15y + 23 = 0$.

25. Obtener las coordenadas de un punto que se encuentre sobre el eje radical del ejercicio 19, y demostrar que las longitudes de las tangentes trazadas de ese punto a las dos circunferencias son iguales.

26. Las ecuaciones de dos circunferencias no concéntricas son $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$. Demuéstrese que el eje radical de cualquier par de circunferencias de la familia $C_1 + kC_2 = 0$ es el mismo que el eje radical de C_1 y C_2.

27. Las ecuaciones de tres circunferencias son

$$x^2 + y^2 + D_i x + E_i y + F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Suponiendo que entre ellas no hay dos que sean concéntricas, hállense las ecuaciones de sus ejes radicales. Si las tres circunferencias no tienen una recta de centros común, demuéstrese que sus ejes radicales se encuentran en un punto común (el centro radical).

28. Hallar las coordenadas del centro radical de las tres circunferencias $x^2+y^2+2x - 4y - 6 = 0$, $x^2+y^2-4x - 2y = 0$ y $x^2+y^2+2x + 12y + 36 = 0$.

29. Hallar las longitudes de las tangentes trazadas del centro radical a las tres circunferencias del ejercicio 28, y demostrar que son iguales.

30. Demostrar que las tres circunferencias $x^2 + y^2 + 10x + 2y + 17 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ y $x^2 + y^2 - 8x - 16y + 71 = 0$ no tienen centro radical. Explicar el resultado.

44. Tangente a una curva. En Geometría elemental solamente se estudia, en general, la tangente a una curva: la circunferencia. La tangente se define como una recta que tiene un solo punto común con la circunferencia. Esta definición, suficiente para la circunferencia, es inadecuada para las curvas planas en general, pues hay curvas planas en las cuales una tangente en un punto corta a la curva en uno

o más puntos diferentes. Por esto, vamos a dar ahora una definición de tangente que se aplique a todas las curvas planas en general.

Sea la ecuación de una curva plana cualquiera C

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ (fig. 59) dos puntos diferentes cualesquiera de C tales que el arco de curva que los une sea continuo; es decir, P_2 puede moverse hacia P_1 permaneciendo siempre sobre la curva. La recta que pasa por P_1 y P_2 se llama *secante*. Consideraremos que P_1 es un punto fijo mientras que P_2 se mueve a lo largo

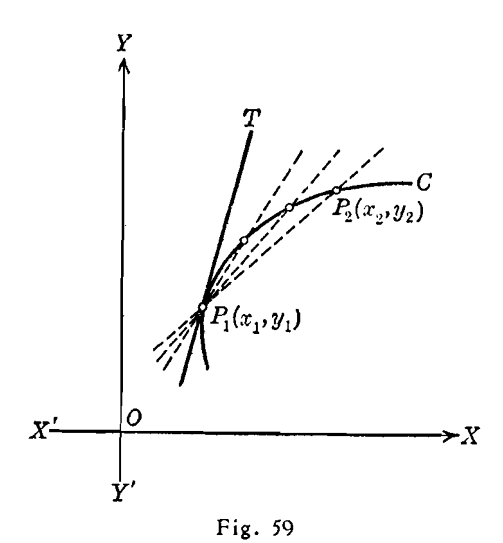


Fig. 59

de C hacia P_1. Entonces, a medida que P_2 se aproxima a P_1, la secante gira en el sentido contrario al de las manecillas de un reloj en torno a P_1 y, en general, tiende a una posición límite representada por la recta P_1T que se *define* como *la tangente a la curva* C *en el punto* P₁. El punto P_1 se llama *punto de tangencia* o *punto de contacto* de la tangente. *La pendiente de la curva* C *en el punto* P_1 *se define como la pendiente de la tangente a* C *en* P_1.

Para determinar la ecuación de la tangente a una curva dada en un punto particular de la curva, se conoce un punto, el punto de contacto; por lo tanto, queda por hallar la pendiente de la tangente. La pendiente de la secante P_1P_2 es

$$m_s = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2 \tag{2}$$

Si C es una curva cualquiera diferente de una línea recta, el valor de m_s varía a medida que P_2 se aproxima a P_1. Definiéndose la tangente $P_1 T$ como la posición límite de la secante $P_1 P_2$ a medida que P_2 tiende a P_1, se sigue que la pendiente m de la tangente es el valor límite de la pendiente m_s de la secante dado por (2), y escribimos

$$m = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \tag{3}$$

siempre que, por supuesto, ese límite exista. La determinación, significado y propiedades de este límite son problemas fundamentales del *Cálculo infinitesimal* y no serán considerados en este libro. Usaremos, sin embargo, la idea de la coincidencia de dos puntos sobre una curva, como se indica en la siguiente discusión.

En nuestro estudio no será necesario obtener la pendiente de una tangente calculando el límite expresado por (3), ya que restringiremos nuestro trabajo a la determinación de las ecuaciones de tangentes a curvas planas representadas, analíticamente, por ecuaciones algebraicas de segundo grado. Tomamos, por lo tanto, (1) como tipo de tales ecuaciones y consideramos el sistema formado por esta ecuación y la ecuación de la recta,

$$y = mx + k. \tag{4}$$

Las soluciones comunes de (1) y (4) son dos y pueden obtenerse sustituyendo primero y por $mx + k$ en (1), y resolviendo la ecuación cuadrática en una variable que resulta, de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0. \tag{5}$$

Las raíces de (5) pueden ser reales y desiguales, reales e iguales o complejas (Apéndice IB, 3) correspondiendo, respectivamente, a la interpretación geométrica de que la recta (4) y la curva (1) se corten en dos puntos diferentes, tengan un punto común o no se corten. Para el caso de intersección en dos puntos diferentes, la recta (4) es una secante de la curva (1). Si, ahora, imaginamos que varían los coeficientes de la ecuación (4) de tal manera que una de las raíces reales de (5) se aproxima a la otra, esto equivale, geométricamente, a que la secante va variando hasta ocupar la posición límite de la tangente, como en la definición anterior. De este razonamiento se deduce, por lo tanto, que la *igualdad de las raíces de la ecuación* (5) *es una condición para la tangencia de la recta* (4) *a la curva* (1). Haremos uso de esta condición al determinar las ecuaciones de las tangentes a las curvas planas algebraicas de segundo grado.

Sea $P_1(x_1, y_1)$ (fig. 60) un punto cualquiera de la curva continua C. Sea l la tangente a C en P_1. Si m es la pendiente de l, por el teorema 1, Artículo 26, la ecuación de la tangente l es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Sea l' la recta trazada por P_1 perpendicular a la tangente l; la recta l' se llama *normal a la curva* C *en el punto* P_1. La ecuación de la normal l' es, evidentemente,

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1), \quad m \neq 0.$$

Supongamos que la tangente y la normal cortan a X en los puntos T y N, respectivamente. La longitud $\overline{P_1T}$ del segmento de la tan-

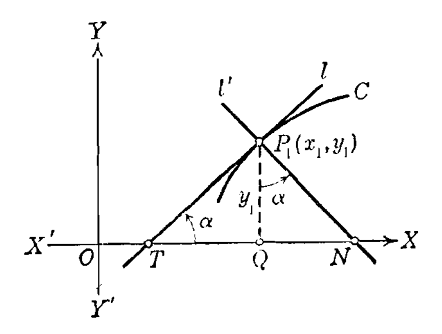


Fig. 60

gente l comprendido entre el punto de contacto y el eje X se llama *longitud de la tangente*. La longitud P_1N del segmento de la normal l' comprendido entre el punto de contacto y el eje X se llama *longitud de la normal*. Por P_1 tracemos la ordenada P_1Q. La proyección QT de la longitud de la tangente sobre el eje X se llama *subtangente*, y la proyección QN de la longitud de la normal sobre el eje X se llama *subnormal*. Sea α el ángulo de inclinación de l, de manera que $m = \operatorname{tg} \alpha$. Observando que el ángulo $QP_1N = \alpha$, el estudiante puede fácilmente demostrar que las longitudes de los últimos cuatro elementos definidos son las que se dan en el siguiente

Teorema 7. *Si* m *es la pendiente de una curva plana continua* C *en el punto* $P_1(x_1, y_1)$, *entonces para el punto* P_1 *tenemos las siguientes ecuaciones y fórmulas:*

Ecuación de la tangente a C: $y - y_1 = m(x - x_1)$,

Ecuación de la normal a C: $y - y_1 = -\dfrac{1}{m}(x - x_1)$, $m \neq 0$.

Longitud de la tangente $= \dfrac{y_1}{m}\sqrt{1 + m^2}$, $m \neq 0$,

Longitud de la normal $= y_1\sqrt{1 + m^2}$,

Longitud de la subtangente $= \dfrac{y_1}{m}$, $m \neq 0$,

Longitud de la subnormal $= my_1$.

Sean C y C' dos curvas planas que se cortan en el punto P (figura 61). Sean l y l' las tangentes a C y C', respectivamente, en P.

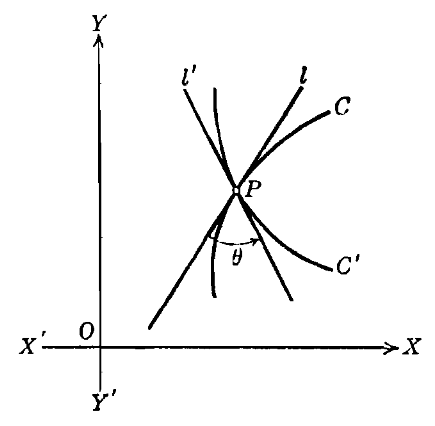


Fig. 61

Se llama *ángulo de dos curvas en uno de sus puntos de intersección, a cualquiera de los dos ángulos suplementarios formados por las dos tangentes a las curvas en dicho punto*. Para las curvas C y C' de la figura 61, si las pendientes de l y l' son m y m', respectivamente, el ángulo que forman las curvas en P es uno de los dos ángulos θ dados, según el teorema 5, Artículo 10, por la fórmula

$$\operatorname{tg}\theta = \pm\frac{m - m'}{1 + mm'}, \quad mm' \neq -1.$$

Si se verifica que $mm' = -1$, de tal manera que ambos ángulos sean rectos, se dice que las curvas son *ortogonales* entre sí. También, si cada elemento de una familia de curvas es ortogonal a cada uno de los elementos de una segunda familia, las curvas de cualquiera de las dos familias se llaman las *trayectorias ortogonales* de las curvas de la otra familia. El problema de la ortogonalidad es de considerable importancia en la Matemática superior y en Física.

45. Tangente a una circunferencia. La determinación de la ecuación de una tangente a una circunferencia se simplifica considerablemente por la propiedad de la circunferencia, que dice: la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado al punto de contacto. En este artículo determinaremos la ecuación de la tangente a una circunferencia sin usar esta propiedad particular; lo haremos por el método general discutido en el Artículo 44.

Es evidente, por el teorema 7 del Artículo 44, que la ecuación de la tangente a una circunferencia dada está perfectamente determinada cuando se conocen su pendiente y el punto de contacto (o algún otro de sus puntos). Si se tiene uno de estos datos, el otro debe determinarse a partir de las condiciones del problema; según esto, tenemos los elementos necesarios para la solución de cualquier problema particular. Vamos a considerar tres problemas, a saber:

1) Hallar la ecuación de la tangente a una circunferencia dada en un punto dado de contacto;

2) Hallar la ecuación de la tangente a una circunferencia dada y que tiene una pendiente dada;

3) Hallar la ecuación de la tangente a una circunferencia dada y que pasa por un punto exterior dado.

El procedimiento para resolver cada uno de estos problemas es esencialmente el mismo. En cada caso se da una condición; de acuerdo con esto escribiremos primero la ecuación de la familia de rectas que satisfacen esta condición (Art. 36). Esta ecuación contiene un parámetro que se determina aplicando la condición de tangencia dada en el Artículo 44.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$$

en el punto $(3, 5)$.

Solución. La ecuación de la familia de rectas que pasa por el punto $(3, 5)$ es

$$y - 5 = m(x - 3), \qquad (1)$$

en donde el parámetro m es la pendiente de la tangente buscada. De la ecuación (1), $y = mx - 3m + 5$, y sustituyendo este valor en la ecuación de la circunferencia, resulta:

$$x^2 + (mx - 3m + 5)^2 - 8x - 6(mx - 3m + 5) + 20 = 0,$$

que se reduce a

$$(m^2 + 1)x^2 - (6m^2 - 4m + 8)x + (9m^2 - 12m + 15) = 0.$$

Según lo dicho en el Artículo 44, la recta (1) será tangente a la circunferencia dada siempre que las raíces de esta última ecuación sean iguales, es decir, siempre que el discriminante se anule. Deberá, pues, verificarse la condición:

$$(6m^2 - 4m + 8)^2 - 4(m^2 + 1)(9m^2 - 12m + 15) = 0.$$

La solución de esta ecuación es $m = \frac{1}{2}$, de manera que, de (1), la ecuación de la tangente buscada es

$$y - 5 = \tfrac{1}{2}(x - 3)$$

o sea,

$$x - 2y + 7 = 0.$$

Se recomienda al estudiante que dibuje la figura correspondiente a este ejemplo.

Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$$

y que tiene de pendiente 1.

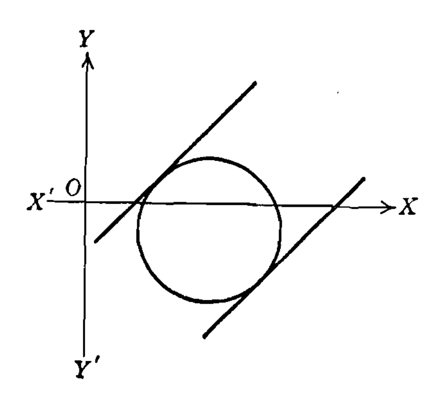


Fig. 62

Solución. La ecuación de la familia de rectas de pendiente 1 es

$$y = x + k, \qquad (2)$$

siendo k un parámetro cuyo valor debe determinarse. Si el valor de y dado por (2) se sustituye en la ecuación de la circunferencia, se obtiene

$$x^2 + (x + k)^2 - 10x + 2(x + k) + 18 = 0$$

o sea,

$$2x^2 + (2k - 8)x + (k^2 + 2k + 18) = 0.$$

La condición de tangencia es

$$(2k - 8)^2 - 8(k^2 + 2k + 18) = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son $k = -2, -10$. Por tanto, de (2), las ecuaciones de las tangentes buscadas son

$$y = x - 2 \quad \text{y} \quad y = x - 10.$$

En la figura 62 se han trazado estas tangentes.

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la tangente trazada del punto (8, 6) a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0$.

Ejemplo. La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto (8, 6) es

$$y - 6 = m(x - 8), \qquad (3)$$

en donde el parámetro m es la pendiente de la tangente buscada. De la ecuación (3), $y = mx - 8m + 6$, valor que sustituído en la ecuación de la circunferencia, da

$$x^2 + (mx - 8m + 6)^2 + 2x + 2(mx - 8m + 6) - 24 = 0,$$

la cual se reduce a

$$(m^2 + 1)x^2 - (16m^2 - 14m - 2)x + (64m^2 - 112m + 24) = 0.$$

La condición para tangencia es

$$(16m^2 - 14m - 2)^2 - 4(m^2 + 1)(64m^2 - 112m + 24) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación se encuentra que sus soluciones son

$$m = \frac{1}{5}, \quad \frac{23}{11}.$$

Por tanto, de (3), las ecuaciones de las tangentes que cumplen las condiciones dadas, son

$$y - 6 = \frac{1}{5}(x - 8) \quad \text{y} \quad y - 6 = \frac{23}{11}(x - 8)$$

o sea,

$$x - 5y + 22 = 0 \quad \text{y} \quad 23x - 11y - 118 = 0.$$

EJERCICIOS. Grupo 18

Dibujar una figura para cada ejercicio.

Los ejercicios 1-7 deben resolverse usando la condición de tangencia estudiada en el Artículo 44.

1. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$$

en el punto $(-1, 6)$.

2. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia

$$4x^2 + 4y^2 + 8x + 4y - 47 = 0$$

que tengan de pendiente $-\frac{3}{2}$.

3. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(-2, 7)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$.

4. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 3 = 0$ en el punto (6, 3).

5. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 21 = 0$$

que son paralelas a la recta $5x - 5y + 31 = 0$.

6. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 6x - 8 = 0$$

que son perpendiculares a la recta $4x - y + 31 = 0$.

7. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(6, -4)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 35 = 0$.

8. Resolver el ejercicio 4 recordando que la tangente es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.

9. Resolver los ejemplos 1, 2 y 3 del Artículo 45 por el método indicado en el ejercicio 8.

10. Demostrar que la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto de contacto $P_1(x_1, y_1)$ es $x_1x + y_1y = r^2$. *Sugestión:* Usese el hecho de que $x_1^2 + y_1^2 = r^2$.

11. Por dos métodos diferentes, hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $9x^2 + 9y^2 + 18x - 12y - 32 = 0$, cuya pendiente sea $\frac{1}{2}$.

12. Por dos métodos diferentes, hállense las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(6, -4)$ a la circunferencia $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 15 = 0$.

13. Por el punto $(-5, 4)$ se trazan tangentes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 10x + 7 = 0.$$

Hallar el ángulo agudo que forman estas tangentes.

14. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $x - 2y + k = 0$:

a) cortan a la circunferencia en dos puntos diferentes;
b) son tangentes;
c) no tienen ningún punto común con la circunferencia.

15. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$, hallar los valores de m para los cuales las rectas de la familia $y = mx + 3$:

a) corta a la circunferencia en dos puntos diferentes;
b) son tangentes;
c) no tienen ningún punto común con la circunferencia.

16. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ son $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$.

17. Hallar la ecuación de la normal a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 21 = 0$$

en el punto $(6, -3)$, y demostrar que pasa por el centro de la circunferencia.

En cada uno de los ejercicios 18-20 hallar la ecuaciones de las tangente y normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para cada circunferencia y punto de contacto dados.

18. $x^2 + y^2 = 34$; $(3, 5)$.
19. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 15 = 0$; $(0, 3)$.
20. $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 39 = 0$; $(-2, 3)$.

21. Hallar el ángulo agudo que forman las circunferencias $x^2 + y^2 = 17$ y $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 11 = 0$ en su intersección.

22. Hallar el ángulo agudo que forman la recta $2x + 3y - 6 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ al cortarse.

23. Demostrar que las circunferencias

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$$

se cortan ortogonalmente.

24. Demostrar, analíticamente, que las trayectorias ortogonales de una familia de circunferencias concéntricas están dadas por la familia de rectas que pasan por su centro común.

25. Si de un punto exterior P se trazan tangentes a una circunferencia, el segmento que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto de* P. Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, demuéstrese que la ecuación de la cuerda de contacto de P_1 es $x_1 x + y_1 y = r^2$. (Ver ejercicio 10.)

46. Teoremas y problemas de lugares geométricos relativos a la circunferencia. La demostración analítica de cualquier teorema sobre la circunferencia se efectúa siguiendo el procedimiento general discutido en el Artículo 11. De acuerdo con esto, mientras el teorema no se particularice, debe colocarse la circunferencia con su centro en el origen, ya que en esta posición su ecuación tiene la forma más simple, la forma canónica,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ejemplo 1. Demostrar, analíticamente, que cualquier ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Demostración. Es evidente que la demostración no perderá generalidad si colocamos la semicircunferencia con su centro en el origen, tal como aparece en la figura 63. La ecuación de la semicircunferencia es entonces

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (1)$$

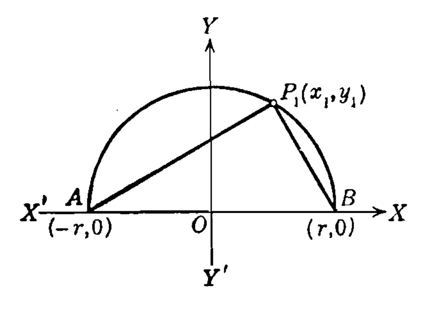


Fig. 63

Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera de la semicircunferencia, y sean A y B los extremos de su diámetro. Como r es el radio, es evidente que las coordenadas de A y B son $(-r, 0)$ y $(r, 0)$, respectivamente. Tenemos que demostrar que el segmento P_1A es perpendicular al segmento P_1B. Por tanto, si las pendientes de P_1A y P_1B son m_1 y m_2, respectivamente, vamos a demostrar que

$$m_1 m_2 = -1, \qquad (2)$$

de acuerdo con el corolario 2 del teorema 5, Artículo 10.

Por el teorema 4 del Art. 8, tenemos

$$m_1 = \frac{y_1}{x_1 + r} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{y_1}{x_1 - r},$$

de manera que

$$m_1 m_2 = \frac{y_1^2}{x_1^2 - r^2}. \qquad (3)$$

Pero, como P_1 está sobre la semicircunferencia, sus coordenadas (x_1, y_1) deben satisfacer la ecuación (1), y tenemos

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2,$$

de donde,

$$x_1^2 - r^2 = -y_1^2.$$

De esta última relación y (3) obtenemos, inmediatamente, la relación buscada (2), como se quería demostrar.

En relación con la resolución de problemas sobre lugares geométricos relativos a circunferencias, seguiremos el procedimiento general bosquejado en el Artículo 23.

Ejemplo 2. Un punto se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos dados es constante. Hallar la ecuación de su lugar geométrico, y demuéstrese que es una circunferencia.

Solución. Por simplicidad, y sin ninguna restricción, podemos tomar uno de los puntos como origen O y el otro punto $A(a, 0)$, $a \neq 0$, sobre el eje X, como se indica en la figura 64. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Entonces P debe satisfacer la condición geométrica

$$\overline{PO}^2 + \overline{PA}^2 = k, \qquad (4)$$

en donde k es un número positivo.

Por el teorema 2 del Artículo 6,

$$\overline{PO}^2 = x^2 + y^2$$

y

$$\overline{PA}^2 = (x - a)^2 + y^2,$$

de manera que la condición geométrica (4) puede expresarse, analíticamente, por la ecuación

$$x^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 = k \qquad (5)$$

que se reduce a

$$x^2 + y^2 - ax + \frac{a^2}{2} - \frac{k}{2} = 0. \qquad (6)$$

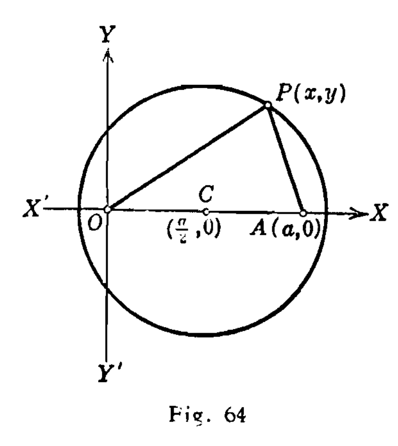


Fig. 64

Por el teorema 2 del Artículo 40, la ecuación (6) representa una circunferencia cuyo centro es el punto $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ y cuyo radio tiene una longitud $\overline{PC} = \frac{1}{2}\sqrt{2k - a^2}$, siempre que, sin embargo, la constante $k > \frac{a^2}{2}$. Si

$k = \frac{a^2}{2}$, el lugar geométrico se reduce al punto $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$; y si $k < \frac{a^2}{2}$, no existe ningún lugar geométrico.

EJERCICIOS. Grupo 19

Dibujar una figura para cada ejercicio.

Todos los teoremas enunciados en los siguientes ejercicios deben demostrarse *analíticamente*. De manera semejante, todos los problemas de lugares geométricos deben resolverse analíticamente.

1. Las longitudes de las dos tangentes trazadas a una circunferencia desde un punto exterior son iguales.
2. Si de un punto cualquiera de una circunferencia se traza una perpendicular a un diámetro, la longitud de la perpendicular es media proporcional entre las longitudes de los dos segmentos en los que divide al diámetro.
3. Todo diámetro perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales.
4. En dos circunferencias secantes la recta de los centros es perpendicular a su cuerda común en su punto medio.
5. Si por los extremos de un diámetro se trazan dos cuerdas paralelas, éstas son iguales.
6. Se tiene una circunferencia circunscrita a cualquier triángulo dado. Demostrar que el producto de las longitudes de dos lados cualesquiera del triángulo es igual al producto de la longitud del diámetro por la longitud de la altura trazada al tercer lado.
7. Un punto se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(2, 0)$ y $(-1, 0)$ es siempre igual a 5. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.
8. Un punto se mueve de tal manera que su distancia del punto $(4, 2)$ es siempre igual al doble de su distancia del punto $(-1, 3)$. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.
9. Un punto se mueve de tal manera que su distancia del punto $(2, -2)$ es siempre igual a un tercio de su distancia del punto $(4, 1)$. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.
10. Un punto se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia del punto $(1, 2)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $3x + 4y - 1 = 0$. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.
11. Un punto se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias de los tres puntos $(0, 3)$, $(3, 0)$ y $(-2, -2)$ es siempre igual a 30. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.
12. Un punto P se mueve de tal manera que su distancia de un punto fijo es siempre igual a k veces su distancia de otro punto fijo. Demostrar que el lugar geométrico de P es una circunferencia para valores apropiados de k.
13. Un punto P se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia de la base de un triángulo isósceles es siempre igual al producto de sus distancias de los otros dos lados. Demostrar que el lugar geométrico de P es una circunferencia.

14. Desde un punto P, se trazan tangentes a las circunferencias

$$C_1: \quad x^2 + y^2 - 9 = 0 \quad \text{y} \quad C_2: \quad x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0.$$

Si la longitud de la tangente trazada a C_1 es siempre igual al doble de la longitud de la tangente trazada a C_2, hallar y construir el lugar geométrico de P.

15. Un punto P se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a las dos rectas $3x - y + 4 = 0$, $x + 3y - 7 = 0$ es siempre igual a 2. Hallar, identificar y trazar el lugar geométrico de P.

16. Desde un punto fijo de una circunferencia dada se trazan cuerdas. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de estas cuerdas es una circunferencia.

17. Se han trazado dos tangentes a una circunferencia, paralelas entre sí, que cortan a una tercera tangente en los puntos A y B. Demostrar que las rectas que unen A y B con el centro son perpendiculares entre sí.

18. Desde un punto exterior P, se trazan una tangente y una secante a una circunferencia dada, siendo A y B los puntos de intersección de la secante con la circunferencia. Demostrar que la longitud de la tangente es media proporcional entre la longitud $\overline{PB}$ de la secante y la longitud $\overline{PA}$ de su segmento externo.

19. Por medio del teorema del ejercicio 18, resolver el ejercicio 35 del grupo 16.

Ver Pág 72

20. Demostrar que si desde cualquier punto P de la circunferencia circunscrita a un triángulo, se bajan perpendiculares a los lados del triángulo, los pies de estas perpendiculares son colineales. La recta que determinan se llama *recta de Simpson para el punto* P.

21. Demostrar que el punto $P(7, 3)$ está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices son $(-1, -1)$, $(2, 8)$, $(5, 7)$, y hallar la ecuación de la recta de Simpson para el punto P.

22. Demostrar el recíproco del teorema del ejercicio 20; es decir, demostrar que, si el punto P se mueve de tal manera que los pies de las perpendiculares bajadas desde él a los lados de un triángulo cualquiera son colineales, el lugar geométrico de P es la circunferencia circunscrita al triángulo.

23. Demostrar que en un triángulo cualquiera los pies de las alturas, los pies de las medianas, y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro (punto de intersección de las alturas) a los vértices son concíclicos. Esta circunferencia se llama con toda propiedad la *circunferencia de los nueve puntos* del triángulo.

24. Hallar la ecuación de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo cuyos vértices son $(3, 7)$, $(1, -1)$ y $(7, 3)$ obteniendo la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados, demostrando que los otros seis puntos están sobre la circunferencia.

25. Demostrar que en un triángulo cualquiera el centro de la circunferencia de los nueve puntos está sobre la recta de Euler (ver el ejercicio 26 del grupo 10).

Pag 72

CAPITULO V

TRANSFORMACION DE COORDENADAS

47. Introducción. Uno de los objetivos principales de la Geometría analítica es la determinación de las propiedades de las diversas figuras geométricas. Apoyándonos en algunos de los conceptos fundamentales hemos hecho ya un estudio detallado de la recta y la circunferencia. En adelante continuaremos estas investigaciones con referencia a otras curvas. Encontraremos, sin embargo, que, a medida que progresemos en nuestro estudio, las ecuaciones de las curvas se van haciendo más y más difíciles de analizar; por esto, se hace necesario en algunas ocasiones introducir ciertos artificios con el fin de facilitar el estudio de estas curvas. Uno de estos artificios, que nos permite simplificar las ecuaciones de muchas curvas, consiste en la transformación dc coordenadas.

48. Transformaciones. Una transformación es el proceso que consiste en cambiar una relación, expresión o figura en otra. El estudiante ya ha encontrado este término en su estudio de Algebra y Trigonometría. Así, podemos transformar una ecuación algebraica en otra ecuación cada una de cuyas raíces sea el triple de la raíz correspondiente de la ecuación dada; o podemos transformar una expresión trigonométrica en otra usando las relaciones trigonométricas fundamentales.

DEFINICIÓN. Una *transformación* es una operación por la cual una relación, expresión o figura se cambia en otra siguiendo una ley dada.

Analíticamente, la ley se expresa por una o más ecuaciones llamadas *ecuaciones de transformación*.

49. Transformación de coordenadas. Consideremos una circunferencia de radio r cuya ecuación está dada en la forma ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \qquad (1)$$

siendo las coordenadas (h, k) del centro O' diferentes de cero (figura 65). Si esta circunferencia, sin cambiar ninguna de sus características, se coloca con su centro en el origen O, su ecuación toma la forma más simple, o forma canónica,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Pero se puede obtener lo mismo sin mover la figura. En vez de llevar la circunferencia a que su centro coincida con el origen, podemos mover los ejes coordenados paralelamente a sí mismos, respectivamente, en el plano coordenado, de manera que el origen O coincida con el centro $O'(h, k)$ de la circunferencia y los ejes coordenados tomen las posiciones paralelas designadas por los nuevos ejes X' y Y' en la figura 65. Sea P un punto cualquiera de la circunferencia. Las coordenadas de P referido a los ejes originales X y Y son (x, y), pero son diferentes, evidentemente, si se le refiere a los nuevos ejes X' y Y'. Designemos las nuevas coordenadas de P por (x', y'). Entonces la ecuación de la circunferencia referida al nuevo sistema de ejes está dada por la simple forma canónica

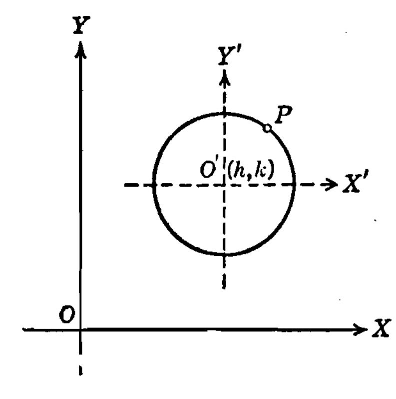


Fig. 65

$$x'^2 + y'^2 = r^2. \qquad (2)$$

Vemos entonces, que moviendo los ejes coordenados paralelamente a sí mismos, hemos *transformado las coordenadas* (x, y) de un punto cualquiera de la circunferencia en las coordenadas (x', y') y como resultado hemos transformado la ecuación (1) en la forma más simple (2). La operación de mover los ejes coordenados en el plano coordenado a una posición diferente, de manera que los nuevos ejes sean, respectivamente, paralelos a los ejes primitivos, y dirigidos en el mismo sentido, se llama *traslación de los ejes coordenados*.

Veremos más adelante (Art. 51) que algunas ecuaciones pueden transformarse también en ecuaciones de forma más simple por una rotación de los ejes coordenados en torno de su origen como punto fijo.

NOTA. En las figuras de los capítulos precedentes hemos designado cada uno de los ejes coordenados por dos letras, el eje X por XX' y el eje Y por YY'. Con el fin de evitar confusión más adelante, usaremos, en general, solamente una letra para cada uno de los ejes coordenados, la letra X para el eje X origi-

nal y la letra Y para el eje Y original. Reservaremos las letras X', Y', X'', Y'', para los nuevos ejes coordenados obtenidos por traslación o rotación. Esta nueva convención ya ha sido adoptada en la figura 65.

50. Traslación de los ejes coordenados. Para simplificar las ecuaciones, mediante traslación de los ejes coordenados, se requiere el siguiente teorema:

TEOREMA 1. *Si se trasladan los ejes coordenados a un nuevo origen* O′(h, k), *y si las coordenadas de cualquier punto* P *antes y después de la traslación son* (x, y) *y* (x′, y′), *respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema primitivo al nuevo sistema de coordenadas son*

$$x = x' + h,$$
$$y = y' + k.$$

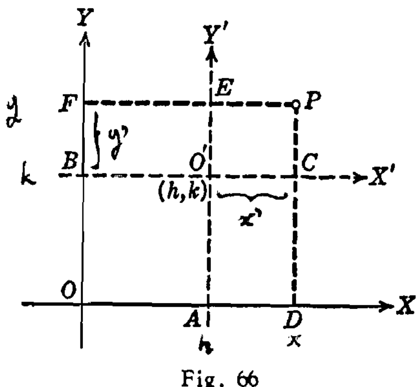


Fig. 66

DEMOSTRACIÓN. Sean (fig. 66) X y Y los ejes primitivos y X' y Y' los nuevos ejes, y sean (h, k) las coordenadas del nuevo origen O' con referencia al sistema original. Desde el punto P, trazamos perpendiculares a ambos sistemas de ejes, y prolongamos los nuevos ejes hasta que corten a los originales, tal como aparece en la figura.

Usando la relación fundamental para segmentos rectilíneos dirigidos, dada en el Artículo 2, tenemos, inmediatamente, de la figura,

$$x = \overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = \overline{OA} + \overline{O'C} = h + x'.$$

Análogamente,

$$y = \overline{OF} = \overline{OB} + \overline{BF} = \overline{OB} + \overline{O'E} = k + y'.$$

Ejemplo 1. Transformar la ecuación

$$x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0 \qquad (1)$$

trasladando los ejes coordenados al nuevo origen (1, 2). Trazar el lugar geométrico, y los dos sistemas de ejes.

Solución. Por el teorema 1, las ecuaciones de transformación son

$$x = x' + 1, \quad y = y' + 2.$$

Si sustituímos estos valores de x y y en la ecuación (1), obtenemos

$$(x' + 1)^3 - 3(x' + 1)^2 - (y' + 2)^2 + 3(x' + 1) + 4(y' + 2) - 5 = 0.$$

Desarrollando y simplificando esta última ecuación, obtenemos la ecuación transformada buscada

$$x'^3 - y'^2 = 0. \qquad (2)$$

Por los métodos estudiados en el Artículo 19, podemos fácilmente (fig. 67) trazar el lugar geométrico de la ecuación (2) con respecto a los nuevos ejes X' y Y'. El lector reconocerá este lugar geométrico como la parábola semicúbica (Art. 17). Debe observarse que la figura es también la gráfica de la ecuación (1) referida a los ejes originales X y Y. Evidentemente que es mucho más fácil trazar el lugar geométrico usando la ecuación (2) que usando la (1).

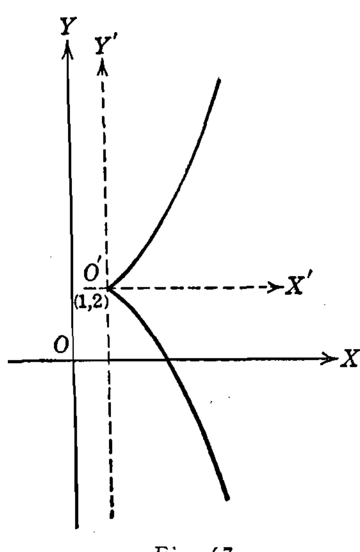


Fig. 67

En el ejemplo 1, se especificó el nuevo origen. Usualmente, sin embargo, no se dan las coordenadas del nuevo origen, sino que deben ser determinadas. El procedimiento a seguir en tal caso está indicado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Por una traslación de los ejes coordenados, transformar la ecuación

$$x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 1 = 0 \qquad (3)$$

en otra ecuación que carezca de términos de primer grado. Trazar su lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

Solución. En este caso particular podemos usar dos métodos diferentes, siendo el primero el más general.

Primer método. Si sustituímos en la ecuación (3) los valores de x y y dados por las ecuaciones de transformación en el teorema 1, obtenemos la ecuación transformada

$$(x' + h)^2 - 4(y' + k)^2 + 6(x' + h) + 8(y' + k) + 1 = 0,$$

la cual, después de desarrollar y agrupar términos semejantes, toma la forma

$$x'^2 - 4y'^2 + (2h + 6)x' - (8k - 8)y' + h^2 - 4k^2 + 6h + 8k + 1 = 0. \qquad (4)$$

Como la ecuación transformada debe carecer de términos de primer grado, igualaremos a cero los coeficientes de x' y y' en la ecuación (4). Tendremos

$$2h + 6 = 0 \quad y \quad 8k - 8 = 0,$$

de donde,

$$h = -3 \quad y \quad k = 1.$$

Por tanto, el nuevo origen es el punto $(-3, 1)$. Si sustituímos estos valores de h y k en (4), obtenemos la ecuación buscada

$$x'^2 - 4y'^2 - 4 = 0. \qquad (5)$$

El lugar geométrico, una hipérbola, está trazado en la figura 68.

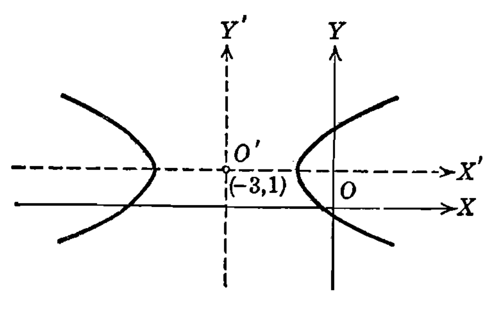


Fig. 68

Segundo método. En el caso de ecuaciones de segundo grado que carezcan del término en xy, es posible efectuar la transformación completando los cuadrados. Este método se enseñó previamente en el Artículo 40 para la circunferencia. Así, los términos de la ecuación (3) pueden ordenarse en la forma

$$(x^2 + 6x) - 4(y^2 - 2y) = -1.$$

Completando cuadrados, obtenemos

$$(x^2 + 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -1 + 9 - 4,$$

de donde,

$$(x + 3)^2 - 4(y - 1)^2 = 4. \qquad (6)$$

Si en la ecuación (6) hacemos las sustituciones

$$x + 3 = x', \quad y - 1 = y', \qquad (7)$$

obtenemos la ecuación (5). Evidentemente, de (7) se deducen las ecuaciones de transformación:

$$x = x' - 3, \quad y = y' + 1.$$

En el enunciado del ejemplo 2 se ha indicado el tipo de simplificación deseado ; si en algún problema no se especifica , debemos efectuar la máxima simplificación posible.

Ejemplo 3. Por una traslación de ejes simplificar la ecuación

$$y^2 - 4x - 6y + 17 = 0. \qquad (8)$$

Solución. Procediendo como en el primer método del ejemplo 2, sustituiremos en la ecuación (8) los valores de x y y dados por las ecuaciones de trasformación en el teorema 1. Tendremos:

$$(y' + k)^2 - 4(x' + h) - 6(y' + k) + 17 = 0.$$

que puede escribirse en la forma

$$y'^2 - 4x' + (2k - 6)y' + k^2 - 4h - 6k + 17 = 0. \qquad (9)$$

Nuestro siguiente paso es determinar los valores de h y k que simplifiquen la ecuación (9). En este caso no podemos hacer que se anule el término en x', ya que su coeficiente es -4, pero podemos eliminar el término en y' y el término independiente. De acuerdo con esto escribimos

$$2k - 6 = 0 \quad \text{y} \quad k^2 - 4h - 6k + 17 = 0,$$

de donde,

$$k = 3 \quad \text{y} \quad h = 2.$$

Para estos valores de h y k, la ecuación (9) se reduce a la forma

$$y'^2 - 4x' = 0.$$

EJERCICIOS. Grupo 20

Para cada ejercicio es conveniente trazar el lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

En cada uno de los ejercicios 1-5, transfórmese la ecuación dada trasladando los ejes coordenados al nuevo origen indicado.

1. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0;\quad (-1, 3)$.
2. $3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 8 = 0;\quad (-2, 1)$.
3. $4x^2 - y^2 - 8x - 10y - 25 = 0;\quad (1, -5)$.
4. $y^3 - x^2 + 3y^2 - 4x + 3y - 3 = 0;\quad (-2, -1)$.
5. $xy - 3x + 4y - 13 = 0;\quad (-4, 3)$.

En cada uno de los ejercicios 6-10, por una traslación de ejes, transfórmese la ecuación dada en otra que carezca de términos de primer grado. Usese el primer método del ejemplo 2, Artículo 50.

6. $2x^2 + y^2 + 16x - 4y + 32 = 0$.
7. $3x^2 + 2y^2 + 18x - 8y + 29 = 0$.
8. $3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$.
9. $xy - x + 2y - 10 = 0$.
10. $8x^3 + 24x^2 - 4y^2 + 24x - 12y - 1 = 0$.

En cada uno de los ejercicios 11-15, por una traslación de los ejes coordenados, transfórmese la ecuación dada en otra que carezca de términos de primer grado. Usese el segundo método del ejemplo 2, Artículo 50.

11. $4x^2 + 4y^2 + 32x - 4y + 45 = 0$.
12. $2x^2 + 5y^2 - 28x + 20y + 108 = 0$.

13. $x^2 - 3y^2 + 6x + 6y + 3 = 0.$
14. $12x^2 + 18y^2 - 12x + 12y - 1 = 0.$
15. $12x^2 - 18y^2 - 12x - 12y - 5 = 0.$

En cada uno de los ejercicios 16-20, simplifíquese la ecuación dada por una traslación de los ejes coordenados.

16. $x^2 + 8x - 3y + 10 = 0.$
17. $16x^2 + 16y^2 + 8x - 48y + 5 = 0.$
18. $72x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 55 = 0.$
19. $y^2 - 6x^2 - 24x - 2y - 32 = 0.$
20. $30xy + 24x - 25y - 80 = 0.$

51. Rotación de los ejes coordenados. Para simplificar las ecuaciones por rotación de los ejes coordenados, necesitamos el siguiente teorema:

TEOREMA 2. *Si los ejes coordenados giran un ángulo* ϕ *en torno de su origen como centro de rotación, y las coordenadas de un punto cualquiera* P *antes y después de la rotación son* (x, y) *y* (x', y'), *respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema original al nuevo sistema de coordenadas están dadas por*

$$x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta,$$

$$y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean (figura 69) X y Y los ejes originales y X' y Y' los nuevos ejes. Desde el punto P tracemos la ordenada AP correspondiente al sistema X, Y, la ordenada $A'P$ correspondiente al sistema X', Y', y la recta OP. Sea el ángulo $POA' = \phi$ y $\overline{OP} = r$. Por Trigonometría (Apéndice IC, 1), tenemos

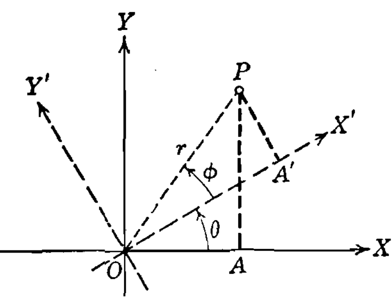


Fig. 69

$$x = \overline{OA} = r \cos (\theta + \phi), \tag{1}$$

$$y = \overline{AP} = r \operatorname{sen} (\theta + \phi), \tag{2}$$

$$x' = \overline{OA'} = r \cos \phi, \quad y' = \overline{A'P} = r \operatorname{sen} \phi. \tag{3}$$

De (1), por el Apéndice IC, 6, tenemos

$$x = r \cos (\theta + \phi) = r \cos \theta \cos \phi - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi.$$

Si en esta última ecuación sustituímos los valores dados por (3), obtenemos la primera ecuación de transformación,

$$x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta .$$

Análogamente, de (2),

$$y = r \operatorname{sen} (\theta + \phi) = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi + r \cos \theta \operatorname{sen} \phi ,$$

por tanto, de (3), tenemos la segunda ecuación de transformación,

$$y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta .$$

NOTA. Para nuestras aplicaciones, será necesario girar los ejes coordenados solamente un ángulo suficientemente grande para hacer coincidir uno de los ejes coordenados con una recta dada fija cualquiera, o para hacer que sea paralelo a ella en el plano coordenado. De acuerdo con esto, restringiremos, en general, los valores del ángulo de rotación θ al intervalo dado por

$$0° \leq \theta < 90° .$$

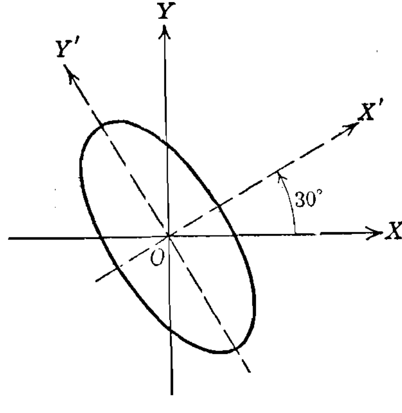


Fig. 70

Ejemplo 1. Transformar la ecuación

$$2x^2 + \sqrt{3}\, xy + y^2 = 4 \qquad (4)$$

girando los ejes coordenados un ángulo de 30°. Trazar el lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

Solución. Por el teorema 2, las ecuaciones de transformación son

$$x = x' \cos 30° - y' \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y',$$

$$y = x' \operatorname{sen} 30° + y' \cos 30° = \frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'.$$

Si sustituímos estos valores de x y y en la ecuación (4), obtenemos

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y'\right)^2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y'\right)\left(\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'\right)^2 = 4.$$

Desarrollando y simplificando esta última ecuación, obtenemos la ecuación transformada

$$5x'^2 + y'^2 = 8. \qquad (5)$$

El lugar geométrico (fig. 70) es una elipse.

En este ejemplo se ha dado el ángulo de rotación. Sin embargo, generalmente, el ángulo de rotación debe determinarse de modo que se cumpla alguna condición establecida. La aplicación principal de la rotación de ejes es la eliminación del término en xy de las ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo 2. Por una rotación de los ejes coordenados, transformar la ecuación

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y = 0 \tag{6}$$

en otra que carezca del término en $x'y'$. Trazar su lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

Solución. Si en la ecuación (6) sustituímos los valores de x y y dados por las ecuaciones de transformación del teorema 2, obtenemos

$$\begin{aligned} 9(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)^2 &- 24(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta) \\ &+ 16(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta)^2 - 40(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta) \\ &- 30(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta) = 0, \end{aligned}$$

la cual, después de efectuar el desarrollo y agrupar los términos, toma la forma

$$\begin{aligned} (9 \cos^2\theta - 24 \cos\theta \operatorname{sen}\theta + 16 \operatorname{sen}^2\theta) x'^2 &+ (14 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + 24 \operatorname{sen}^2\theta \\ - 24 \cos^2\theta) x'y' &+ (9 \operatorname{sen}^2\theta + 24 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + 16 \cos^2\theta) y'^2 \\ - (40 \cos\theta + 30 \operatorname{sen}\theta) x' &+ (40 \operatorname{sen}\theta - 30 \cos\theta) y' = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Como la ecuación transformada debe carecer del término en $x'y'$, igualamos el coeficiente de $x'y'$ en (7) a cero y obtenemos

$$14 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + 24 \operatorname{sen}^2\theta - 24 \cos^2\theta = 0.$$

Ahora bien, $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$ y $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ (Apéndice IC, 7). Por tanto, la última relación puede escribirse

$$7 \operatorname{sen} 2\theta - 24 \cos 2\theta = 0,$$

de donde,

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{24}{7}.$$

Por la nota del teorema 2, el ángulo θ estará restringido a estar en el primer cuadrante, de manera que 2θ estará en el primero o en el segundo cuadrante en donde el coseno y la tangente de un ángulo tiene el mismo signo. De manera semejante, $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ no serán negativos. Por tanto, por el valor de $\operatorname{tg} 2\theta$ dado arriba, tenemos

$$\cos 2\theta = \frac{7}{25}.$$

Para efectuar la simplificación de la ecuación (7), necesitamos los valores de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, que pueden obtenerse por las fórmulas del ángulo mitad de Trigonometría (Apéndice IC, 8).

Luego,

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 7/25}{2}} = \frac{3}{5}$$

y

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 7/25}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Si sustituímos estos valores de sen θ y cos θ en la ecuación (7), tenemos

$$\left(\frac{144}{25} - \frac{288}{25} + \frac{144}{25}\right) x'^2 + \left(\frac{168}{25} + \frac{216}{25} - \frac{384}{25}\right) x'y' + \left(\frac{81}{25} + \frac{288}{25} + \frac{256}{25}\right) y'^2$$
$$- (32 + 18) x' + (24 - 24) y' = 0,$$

la cual se reduce a la ecuación transformada buscada,

$$y'^2 - 2x' = 0. \qquad (8)$$

El lugar geométrico, una parábola, está representada en la figura 71.

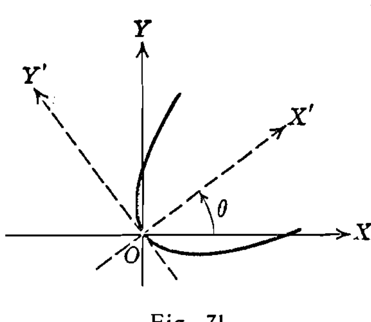


Fig. 71

NOTA. Evidentemente, es mucho más fácil trazar el lugar geométrico de la ecuación (8) con respecto a los ejes X' y Y' que trazar el de la ecuación (6) con respecto a los ejes X y Y. Más aún, las propiedades de la parábola pueden obtenerse más fácilmente a partir de la ecuación (8) que es la más sencilla. El estudiante puede, sin embargo, pensar que estas ventajas no son sino una compensación de los cálculos necesarios para transformar la ecuación (6) en la (8). El problema general de la supresión del término en xy de la ecuación de segundo grado será considerado más adelante (Capítulo IX), y se verá entonces como la cantidad de cálculos se reduce considerablemente.

EJERCICIOS. Grupo 21

Para cada ejercicio el estudiante debe dibujar el lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

1. Hallar las nuevas coordenadas del punto $(3, -4)$ cuando los ejes coordenados giran un ángulo de $30°$.

2. Hallar las nuevas coordenadas de los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ cuando los ejes coordenados giran un ángulo de $90°$.

En cada uno de los ejercicios 3-8, hallar la transformada de la ecuación dada, al girar los ejes coordenados un ángulo igual al indicado.

3. $2x + 5y - 3 = 0$; arc tg 2,5.

4. $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$; $45°$.

5. $\sqrt{3}y^2 + 3xy - 1 = 0$; 60°.

6. $5x^2 + 3xy + y^2 - 4 = 0$; $\text{arc sen}\,\frac{\sqrt{10}}{10}$.

7. $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 20 = 0$; arc tg 0,75.

8. $x^4 + y^4 + 6x^2y^2 - 32 = 0$; 45°.

9. Por rotación de los ejes coordenados, transformar la ecuación $2x - y - 2 = 0$ en otra que carezca del término en x'.

10. Por rotación de los ejes coordenados, transformar la ecuación $x + 2y - 2 = 0$ en otra que carezca del término en y'.

En cada uno de los ejercicios 11-16, por una rotación de los ejes coordenados, transfórmese la ecuación dada en otra que carezca del término en $x'y'$.

11. $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x = 1$.
12. $9x^2 + 3xy + 9y^2 = 5$.
13. $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 2$.
14. $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$.
15. $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$.
16. $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0$.

17. La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$. Demostrar que la forma de esta ecuación no se altera cuando se refiere a los ejes coordenados que han girado cualquier ángulo θ. Se dice que esta ecuación es *invariante* por rotación.

18. Deducir las ecuaciones de transformación del teorema 2 (Art. 51) cuando el ángulo θ es obtuso.

19. Las ecuaciones de transformación del teorema 2 (Art. 51) pueden considerarse como un sistema de dos ecuaciones en las dos incógnitas x' y y'. Para cualquier valor de θ, demuéstrese que el determinante de este sistema es la unidad y, por tanto, que por la regla de Cramer (Apéndice IB, 6) el sistema tiene una única solución para x' y y' dada por

$$x' = x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta,$$
$$y' = -x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta.$$

Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones recíprocas* de las originales de transformación.

20. Por una rotación de 45° de los ejes coordenados, una cierta ecuación se transformó en $4x'^2 - 9y'^2 = 36$. Hállese la ecuación original usando el resultado del ejercicio 19.

52. Simplificación de ecuaciones por transformación de coordenadas. Acabamos de ver que, por una traslación o una rotación de los ejes coordenados, es posible transformar muchas ecuaciones en formas más simples. Es entonces lógico inferir que se puede efectuar una simplificación mayor aún aplicando *ambas* operaciones a la vez. Si una ecuación es transformada en una forma más simple por una traslación o una rotación de los ejes coordenados, o por ambas, el proceso se llama *simplificación por transformación de coordenadas*.

Consideremos primero el caso en que una traslación de los ejes coordenados a un nuevo origen $O'(h, k)$ es seguida por una rotación

de los ejes trasladados en torno de O' de un ángulo θ, tal como se indica en la figura 72. Si P es un punto cualquiera del plano coordenado, sean (x, y), (x', y') y (x'', y'') sus coordenadas referido, respectivamente, a los ejes originales X y Y, a los ejes trasladados X' y Y', y a los ejes girados X'' y Y''. Por el teorema 1 del Artículo 50,

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + h, \\ y &= y' + k; \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

y por el teorema 2 del Artículo 51,

$$\left. \begin{aligned} x' &= x'' \cos \theta - y'' \operatorname{sen} \theta, \\ y' &= x'' \operatorname{sen} \theta + y'' \cos \theta. \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

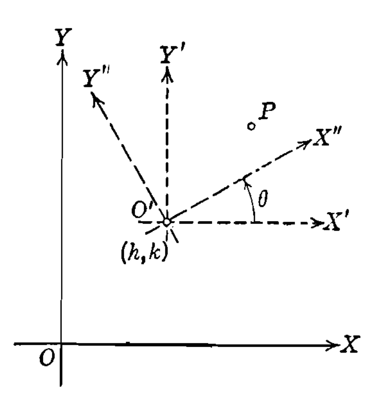


Fig. 72

Si sustituímos en (1) los valores de x' y y' dados por (2) obtenemos las ecuaciones buscadas de transformación:

$$\left. \begin{aligned} x &= x'' \cos \theta - y'' \operatorname{sen} \theta + h, \\ y &= x'' \operatorname{sen} \theta + y'' \cos \theta + k. \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

Puede demostrarse que las ecuaciones de transformación (3) son verdaderas aun cuando el orden de transformación se invierta, es decir, cuando una rotación vaya seguida de una traslación. Tenemos pues, el siguiente teorema:

TEOREMA 3. *Si efectuamos un cambio de ejes coordenados mediante una traslación y una rotación, tomadas en cualquier orden, y las coordenadas de cualquier punto* P *referido a los sistemas original y final*

son (x, y) *y* (x'', y''), *respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema original al nuevo sistema de coordenadas son*

$$x = x'' \cos\theta - y'' \operatorname{sen}\theta + h,$$

$$y = x'' \operatorname{sen}\theta + y'' \cos\theta + k,$$

en donde θ *es el ángulo de rotación y* (h, k) *son las coordenadas del nuevo origen referido a los ejes coordenados originales.*

NOTAS. 1. Las ecuaciones de transformación dadas por el teorema 1 del Artículo 50, teorema 2 del Artículo 51 y teorema 3 anterior son todas relaciones *lineales*. De aquí que el grado de la ecuación transformada no pueda ser mayor que el de la ecuación original. Ni tampoco puede ser menor; porque si lo fuera, podríamos, por transformación de coordenadas, regresar la ecuación transformada a su forma original y elevar así el grado de la ecuación. Pero acabamos de ver que esto es imposible. Por tanto, *el grado de una ecuación no se altera por transformación de coordenadas.*

2. Aunque las ecuaciones de transformación del teorema 3 pueden emplearse cuando se van a efectuar simultáneamente una traslación y una rotación, es, generalmente, más sencillo, efectuar estas operaciones separadamente en dos pasos diferentes. El teorema 3 explica que el orden de estas operaciones no tiene importancia. Sin embargo, en el caso de una ecuación de segundo grado en la cual los términos en x^2, y^2 y xy forman un cuadrado perfecto, los ejes deben girarse primero y trasladarse después (ver el ejercicio 10 del grupo 22). Este caso particular será estudiado más adelante en el Capítulo IX.

Ejemplo. Por transformación de coordenadas, simplificar la ecuación

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 9 = 0. \quad (4)$$

Trácese el lugar geométrico y todos los sistemas de ejes coordenados.

Solución. Como los términos de segundo grado en (4) no forman un cuadrado perfecto, podemos primero trasladar los ejes a un nuevo origen (h, k). Por tanto, usando las ecuaciones de transformación del teorema 1 (Art. 50), obtenemos, de la ecuación (4),

$$3(x' + h)^2 - 2(x' + h)(y' + k) + 3(y' + k)^2$$
$$- 2(x' + h) - 10(y' + k) + 9 = 0,$$

la que, después de desarrollar, simplificar y agrupar términos, toma la forma

$$3x'^2 - 2x'y' + 3y'^2 + (6h - 2k - 2)x' + (-2h + 6k - 10)y'$$
$$+ (3h^2 - 2hk + 3k^2 - 2h - 10k + 9) = 0. \quad (5)$$

Para eliminar los términos de primer grado en (5), igualamos sus coeficientes a cero. Esto nos da el sistema

$$6h - 2k - 2 = 0,$$

$$-2h + 6k - 10 = 0,$$

cuya solución es $h = 1$, $k = 2$. Sustituyendo estos valores de h y k en (5), obtenemos

$$3x'^2 - 2x'y' + 3y'^2 - 2 = 0. \tag{6}$$

A continuación, por rotación de los ejes, usando las ecuaciones de transformación del teorema 2 (Art. 51), obtenemos, de la ecuación (6),

$$3(x'' \cos\theta - y'' \operatorname{sen}\theta)^2 - 2(x'' \cos\theta - y'' \operatorname{sen}\theta)(x'' \operatorname{sen}\theta + y'' \cos\theta)$$
$$+ 3(x'' \operatorname{sen}\theta + y'' \cos\theta)^2 - 2 = 0,$$

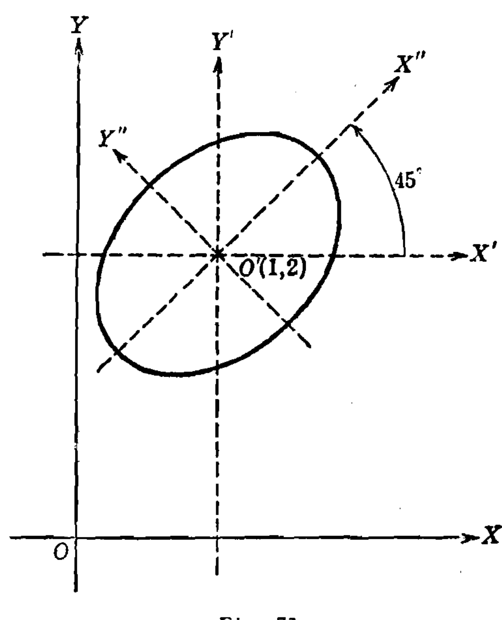


Fig. 73

la cual se reduce a

$$(3\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta)x''^2 + (2\operatorname{sen}^2\theta - 2\cos^2\theta)x''y''$$
$$+ (3\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta)y''^2 - 2 = 0. \tag{7}$$

Para eliminar el término en $x''y''$ de (7), igualamos sus coeficiente a cero, y obtenemos

$$2\operatorname{sen}^2\theta - 2\cos^2\theta = 0,$$

de donde $\theta = 45°$ de acuerdo con la nota al teorema 2 (Art. 51). Sustituyendo este valor de θ en (7), y simplificando, obtenemos la ecuación buscada,

$$x''^2 + 2y''^2 - 1 = 0. \tag{8}$$

En la figura 73 se han trazado el lugar geométrico de la ecuación (8), una elipse, y todos los sistemas de ejes coordenados.

EJERCICIOS. Grupo 22

Para cada ejercicio el estudiante debe dibujar el lugar geométrico y todos los sistemas de ejes coordenados.

En cada uno de los ejercicios 1-5, simplifíquese la ecuación dada por transformación de coordenadas.

1. $x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0.$
2. $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 104x + 72y - 48 = 0.$
3. $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 60x - 80y + 100 = 0.$
4. $3x + 2y - 5 = 0.$
5. $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 10y + 11 = 0.$

6. Trazar el lugar geométrico del ejercicio 1 aplicando directamente los métodos del Artículo 19.

7. Trazar el lugar geométrico del ejercicio 2 directamente por los métodos del Artículo 19.

8. Por transformación de coordenadas, demuéstrese que la ecuación general de una recta, $Ax + By + C = 0$, puede transformarse en $y'' = 0$, que es la ecuación del eje X''.

9. Por transformación de coordenadas, demuéstrese que la ecuación general de una recta, $Ax + By + C = 0$, puede transformarse en $x'' = 0$, que es la ecuación del eje Y''.

10. Hallar las coordenadas del nuevo origen si los ejes coordenados se trasladan de manera que la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se transforma en otra ecuación que carezca de términos de primer grado.

11. Hallar las nuevas ordenadas del punto $(-1, 3)$ cuando los ejes coordenados son trasladados primero al nuevo origen $(4, 5)$ y después se les gira un ángulo de $60°$.

12. Hallar las nuevas coordenadas del punto $(2, 2)$ cuando los ejes coordenados son girados primero un ángulo de $45°$ y después son trasladados al nuevo origen $(-1, 1)$.

13. Por traslación de los ejes coordenados al nuevo origen $(3, 3)$ y después rotación en un ángulo de $30°$, las coordenadas de un cierto punto P se transforman en $(7, 6)$. Hállense las coordenadas de P con respecto a los ejes originales.

14. Por traslación de los ejes coordenados al nuevo origen $(1, 1)$ y luego rotación de los ejes en un ángulo de $45°$, la ecuación de cierto lugar geométrico se transformó en $x''^2 - 2y''^2 = 2$. Hallar la ecuación del lugar geométrico con respecto a los ejes originales.

15. Demostrar, analíticamente, que la distancia entre dos puntos en el plano coordenado no se altera (es invariante) con la transformación de coordenadas.

En cada uno de los ejercicios 16-20, hállese la ecuación del lugar geométrico del punto móvil y simplifíquese por transformación de coordenadas.

16. El punto se mueve de tal manera que su distancia del punto $(-2, 2)$ es siempre igual a su distancia a la recta $x - y + 1 = 0$.

17. El punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ es siempre igual a 4.

18. El punto se mueve de tal manera que su distancia del punto (2, 1) es siempre igual al doble de su distancia de la recta $x + 2y - 2 = 0$.

19. El punto se mueve de tal manera que su distancia de la recta

$$x + 2y - 2 = 0$$

es siempre igual al doble de su distancia del punto $(-1, 1)$.

20. El punto se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los dos puntos (1, 4) y $(-2, 1)$ es siempre igual a 3.

CAPITULO VI

LA PARABOLA

53. Introducción. En su estudio previo de Geometría elemental, el estudiante conoció dos líneas: la línea recta y la circunferencia. Las dos líneas ya han sido estudiadas desde el punto de vista analítico. Ahora comenzamos el estudio de ciertas curvas planas no incluídas, ordinariamente, en un curso de Geometría elemental. Empezaremos con la curva conocida con el nombre de parábola.

54. Definiciones. La ecuación de la parábola la deduciremos a partir de su definición como el lugar geométrico de un punto que se mueve de acuerdo con una ley especificada.

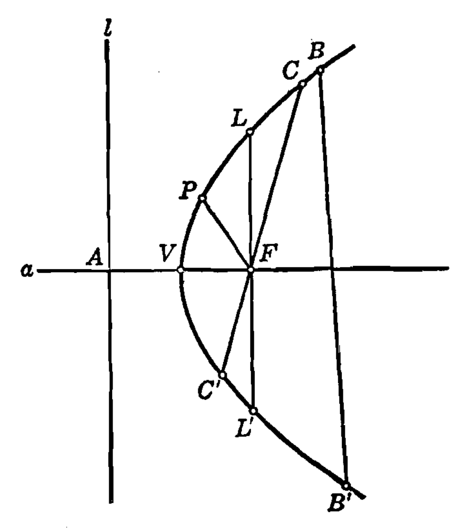


Fig. 74

DEFINICIÓN. Una *parábola* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.

El punto fijo se llama *foco* y la recta fija *directriz* de la parábola. La definición excluye el caso en que el foco está sobre la directriz.

Designemos por F y l (fig. 74), el foco y la directriz de una parábola, respectivamente. La recta a que pasa por F y es perpendicular a l se llama *eje* de la parábola. Sea A el punto de intersec-

ción del eje y la directriz. El punto V, punto medio del segmento AF, está, por definición, sobre la parábola; este punto se llama *vértice*. El segmento de recta, tal como BB', que une dos puntos cualesquiera diferentes de la parábola se llama *cuerda;* en particular, una cuerda que pasa por el foco como CC', se llama *cuerda focal*. La cuerda focal LL' perpendicular al eje se llama *lado recto*. Si P es un punto cualquiera de la parábola, la recta FP que une el foco F con el punto P se llama *radio focal* de P, o *radio vector*.

55. Ecuación de la parábola de vértice en el origen y eje un eje coordenado. Veremos que la ecuación de una parábola toma su forma más simple cuando su vértice está en el origen y su eje coincide con uno de los ejes coordenados. De acuerdo con esto, consideremos la parábola cuyo vértice está en el origen (fig. 75) y cuyo eje coincide con el eje X. Entonces el foco F está sobre el eje X; sean $(p, 0)$ sus coordenadas. Por definición de parábola, la ecuación de la directriz l es $x = -p$. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola. Por P tracemos el segmento PA perpendicular a l. Entonces, por la definición de parábola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

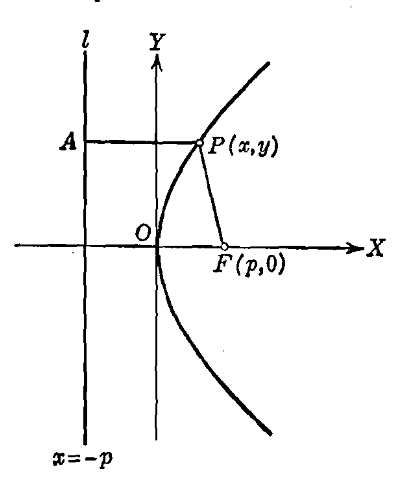


Fig. 75

$$|\overline{FP}| = |\overline{PA}|. \qquad (1)$$

Por el teorema 2 del Artículo 6, tenemos

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2};$$

y por el teorema 9 (Art. 33), tenemos

$$|\overline{PA}| = |x + p|.$$

Por tanto, la condición geométrica (1) está expresada, analíticamente, por la ecuación

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|.$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de esta ecuación y simplificamos, obtenemos

$$y^2 = 4px. \qquad (2)$$

Recíprocamente, sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfagan (2). Tendremos:

$$y_1^2 = 4px_1.$$

Si sumamos $(x_1 - p)^2$ a ambos miembros de esta ecuación, y extraemos la raíz cuadrada, obtenemos, para la raíz positiva,

$$\sqrt{(x_1 - p)^2 + y_1^2} = | x_1 + p |,$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (1) aplicada al punto P_1. Por tanto, P_1 está sobre la parábola cuya ecuación está dada por (2).

Ahora discutiremos la ecuación (2) siguiendo el método explicado en el Artículo 19. Evidentemente, la curva pasa por el origen y no tiene ninguna otra intersección con los ejes coordenados. La única simetría que posee el lugar geométrico de (2) es con respecto al eje X. Despejando y de la ecuación (2), tenemos:

$$y = \pm 2\sqrt{px}. \qquad (3)$$

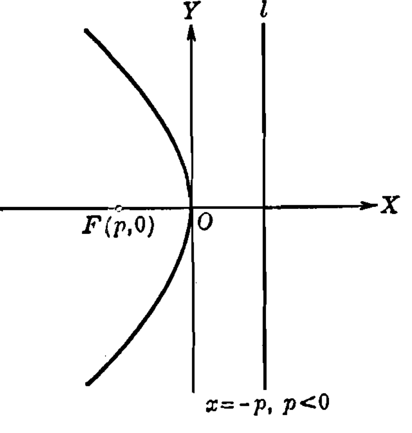


Fig. 76

Por tanto, para valores de y reales y diferentes de cero, p y x deben ser del mismo signo. Según esto, podemos considerar dos casos: $p > 0$ y $p < 0$.

Si $p > 0$, deben excluirse todos los valores negativos de x, y todo el lugar geométrico se encuentra a la derecha del eje Y. Como no se excluye ningún valor positivo de x, y como y puede tomar todos los valores reales, el lugar geométrico de (2) es una curva abierta que se extiende indefinidamente hacia la derecha del eje Y y hacia arriba y abajo del eje X. Esta posición es la indicada en la figura 75, y se dice que la parábola se abre hacia la derecha.

Análogamente, si $p < 0$, todos los valores positivos de x deben excluirse en la ecuación (3) y todo el lugar geométrico aparece a la izquierda del eje Y. Esta posición está indicada en la figura 76, y, en este caso, se dice que la parábola se abre hacia la izquierda.

Es evidente que la curva correspondiente a la ecuación (2) no tiene asíntotas verticales ni horizontales.

Según la ecuación (3), hay dos puntos sobre la parábola que tienen abscisa igual a p; uno de ellos tiene la ordenada $2p$ y el otro la ordenada $-2p$. Como la abscisa del foco es p, se sigue (Art. 54) que la longitud del lado recto es igual al valor absoluto de la cantidad $4p$.

Si el vértice de la parábola está en el origen y su eje coincide con el eje Y, se demuestra, análogamente, que la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4py, \tag{4}$$

en donde el foco es el punto $(0, p)$. Puede demostrarse fácilmente que, si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba (fig. 77 [a]); y, si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo (fig. 77 [b]). La discusión completa de la ecuación (4) se deja como ejercicio al estudiante.

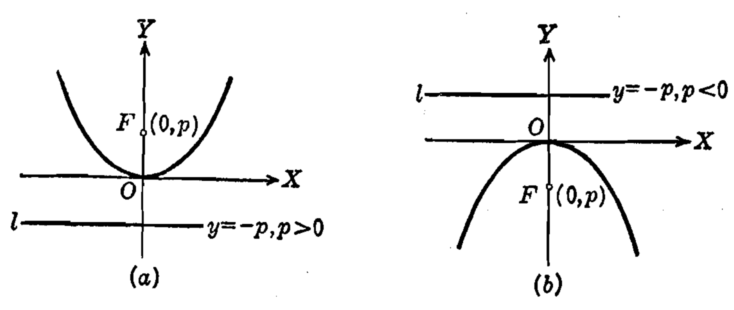


Fig. 77

Las ecuaciones (2) y (4) se llaman a veces la *primera ecuación ordinaria de la parábola*. Como son las ecuaciones más simples de la parábola, nos referimos a ellas como a las formas canónicas.

Los resultados anteriores se resumen en el siguiente

TEOREMA 1. *La ecuación de una parábola de vértice en el origen y eje el eje* X, *es*

$$y^2 = 4px,$$

en donde el foco es el punto $(p, 0)$ *y la ecuación de la directriz es* $x = -p$. *Si* $p > 0$, *la parábola se abre hacia la derecha; si* $p < 0$, *la parábola se abre hacia la izquierda.*

Si el eje de una parábola coincide con el eje Y, *y el vértice está en el origen, su ecuación es*

$$x^2 = 4py,$$

en donde el foco es el punto $(0, p)$, *y la ecuación de la directriz es* $y = -p$. *Si* $p > 0$, *la parábola se abre hacia arriba; si* $p < 0$, *la parábola se abre hacia abajo.*

En cada caso, la longitud del lado recto está dada por el valor absoluto de 4p, *que es el coeficiente del término de primer grado.*

Ejemplo. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje Y pasa por el punto $(4, -2)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto. Trazar la gráfica correspondiente.

Solución. Por el teorema 1, la ecuación de la parábola es de la forma

$$x^2 = 4py. \qquad (4)$$

Como la parábola pasa por el punto $(4, -2)$, las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación (4), y tenemos

$$16 = 4p(-2),$$

de donde, $p = -2$, y la ecuación buscada es

$$x^2 = -8y.$$

También, por el teorema 1, el foco es el punto $(0, p)$, o sea, $(0, -2)$, la ecuación de la directriz es

$$y = -p,$$

o sea, $$y = 2,$$

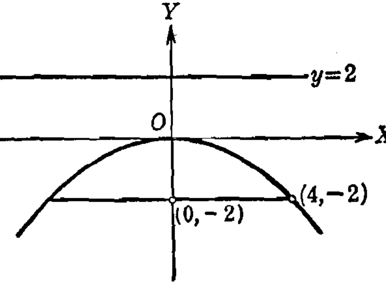


Fig. 78

y la longitud del lado recto es $|4p| = 8$. En la figura 78, se ha trazado el lugar geométrico, foco, directriz y lado recto.

EJERCICIOS. Grupo 23

Dibujar para cada ejercicio la gráfica correspondiente.

En cada uno de los ejercicios 1-4, hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto para la ecuación dada, y discutir el lugar geométrico correspondiente.

1. $y^2 = 12x$. **3.** $y^2 + 8x = 0$.

2. $x^2 = 12y$. **4.** $x^2 + 2y = 0$.

5. Deducir y discutir la ecuación ordinaria $x^2 = 4py$.

6. Hallar un procedimiento para obtener puntos de la parábola por medio de escuadras y compás, cuando se conocen el foco y la directriz.

7. Hallar un procedimiento para obtener puntos de la parábola por medio de escuadras y compás, si se dan el foco y el vértice.

8. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $(3, 0)$.

9. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $(0, -3)$.

10. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $y - 5 = 0$.

11. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $x + 5 = 0$.

12. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje X pasa por el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.

13. Una cuerda de la parábola $y^2 - 4x = 0$ es un segmento de la recta $x - 2y + 3 = 0$. Hallar su longitud.

14. Hallar la longitud de la cuerda focal de la parábola $x^2 + 8y = 0$ que es paralela a la recta $3x + 4y - 7 = 0$.

15. Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola $y^2 = 4px$ es igual a $|x_1 + p|$.

16. Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola $y^2 - 9x = 0$ cuya ordenada es igual a 6.

17. De un punto cualquiera de una parábola se traza una perpendicular al eje. Demostrar que esta perpendicular es media proporcional entre el lado recto y la porción del eje comprendida entre el vértice y el pie de la perpendicular.

18. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el vértice y los puntos extremos del lado recto de la parábola $x^2 - 4y = 0$.



19. Los extremos del lado recto de una parábola cualquiera se unen con el punto de intersección del eje con la directriz. Demostrar que estas rectas son perpendiculares entre sí.

20. Una circunferencia cuyo centro es el punto $(4, -1)$ pasa por el foco de la parábola $x^2 + 16y = 0$. Demostrar que es tangente a la directriz de la parábola.

21. Hallar la ecuación de una parábola tomando como ejes X y Y, el eje y la directriz respectivamente.

En cada uno de los ejercicios 22-25, aplicando la definición de la parábola, hallar la ecuación de la parábola a partir de los datos dados. Reducir la ecuación a la primera forma ordinaria por transformación de coordenadas.

22. Foco $(3, 4)$, directriz $x - 1 = 0$.
23. Foco $(3, -5)$, directriz $y - 1 = 0$.
24. Vértice $(2, 0)$, foco $(0, 0)$.
25. Foco $(-1, 1)$, directriz $x + y - 5 = 0$.

56. Ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje paralelo a un eje coordenado. Frecuentemente necesitaremos obtener la ecuación de una parábola cuyo vértice no esté en el origen y cuyo eje sea paralelo, y no necesariamente coincidente, a uno de los ejes coordenados. De acuerdo con esto, consideremos la parábola (fig. 79) cuyo vértice es el punto (h, k) y cuyo eje es paralelo al eje X. Si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen O' coincida con el vértice (h, k), se sigue, por el teorema 1 del Artículo 55, que la ecuación de la parábola con referencia a los nuevos ejes X' y Y' está dada por

$$y'^2 = 4px', \qquad (1)$$

en donde las coordenadas del foco F son $(p, 0)$ referido a los nuevos ejes. A partir de la ecuación de la parábola referida a los ejes originales X y Y, podemos obtener la ecuación (1) usando las ecuaciones de trasformación del teorema 1, Artículo 50, a saber,

$$x = x' + h, \quad y = y' + k,$$

de donde,

$$x' = x - h, \quad y' = y - k.$$

Si sustituímos estos valores de x' y y' en la ecuación (1), obtenemos

$$(y - k)^2 = 4p(x - h). \qquad (2)$$

Análogamente, la parábola cuyo vértice es el punto (h, k) y cuyo eje es paralelo al eje Y tiene por ecuación

$$(x - h)^2 = 4p(y - k), \qquad (3)$$

en donde $|p|$ es la longitud de aquella porción del eje comprendida entre el foco y el vértice.

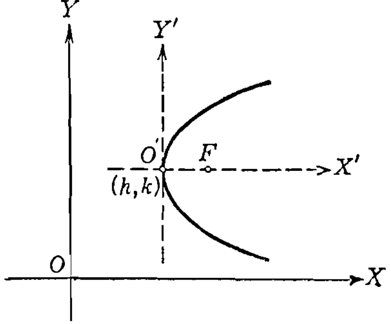


Fig. 79

Las ecuaciones (2) y (3) se llaman, generalmente, *segunda ecuación ordinaria de la parábola*.

Los resultados anteriores, junto con los obtenidos en el teorema 1 del Artículo 55, conducen al siguiente

Teorema 2. *La ecuación de una parábola de vértice* (h, k) *y eje paralelo al eje* X, *es de la forma*

$$(\mathrm{y} - \mathrm{k})^2 = 4\mathrm{p}(\mathrm{x} - \mathrm{h}),$$

siendo $|\mathrm{p}|$ *la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice.*

Si $\mathrm{p} > 0$, *la parábola se abre hacia la derecha; si* $\mathrm{p} < 0$, *la parábola se abre hacia la izquierda.*

Si el vértice es el punto (h, k) *y el eje de la parábola es paralelo al eje* Y, *su ecuación es de la forma*

$$(\mathrm{x} - \mathrm{h})^2 = 4\mathrm{p}(\mathrm{y} - \mathrm{k}).$$

Si $\mathrm{p} > 0$, *la parábola se abre hacia arriba; si* $\mathrm{p} < 0$, *la parábola se abre hacia abajo.*

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (3, 4) y cuyo foco es el punto (3, 2). Hallar también la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Solución. Como el vértice V y el foco F de una parábola están sobre su eje, y como en este caso cada uno de estos puntos tiene la misma abscisa 3, se

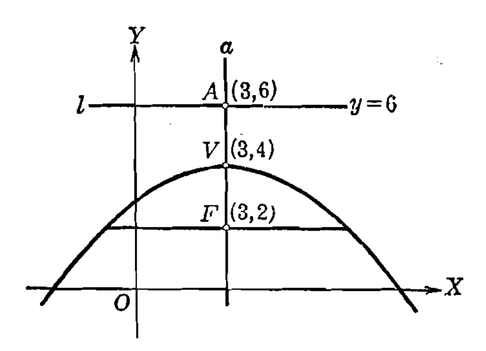


Fig. 80

sigue que el eje a es paralelo al eje Y, como se indica en la figura 80. Por tanto, por el teorema 2, la ecuación de la parábola es de la forma

$$(x - h)^2 = 4p(y - k).$$

Como el vértice V es el punto (3, 4), la ecuación puede escribirse

$$(x - 3)^2 = 4p(y - 4).$$

Ahora bien, $|p| = |\overline{FV}| = |4 - 2| = 2$. Pero, como el foco F está abajo del vértice V, la parábola se abre hacia abajo y p es negativo. Por tanto, $p = -2$, y la ecuación de la parábola es

$$(x - 3)^2 = -8(y - 4),$$

y la longitud del lado recto es 8.

Designemos por A el punto en que el eje a corta a la directriz l. Como $V(3, 4)$ es el punto medio del segmento AF, se sigue que las coordenadas de A son (3, 6). Por tanto, la ecuación de la directriz es $y = 6$.

Si desarrollamos y trasponemos términos en la ecuación

$$(y - k)^2 = 4p(x - h),$$

obtenemos

$$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0,$$

que puede escribirse en la forma

$$y^2 + a_1 x + a_2 y + a_3 = 0, \qquad (4)$$

en donde $a_1 = -4p$, $a_2 = -2k$ y $a_3 = k^2 + 4ph$. Recíprocamente, completando el cuadrado en y, podemos demostrar que una ecuación

de la forma (4) representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje X.

Al discutir la ecuación de la forma (4) suponemos que $a_1 \neq 0$. Si $a_1 = 0$, la ecuación toma la forma

$$y^2 + a_2 y + a_3 = 0, \qquad (5)$$

que es una ecuación cuadrática en la única variable y. Si las raíces de (5) son reales y desiguales, digamos r_1 y r_2, entonces la ecuación (5) puede escribirse en la forma

$$(y - r_1)(y - r_2) = 0,$$

y el lugar geométrico correspondiente consta de dos rectas diferentes, $y = r_1$ y $y = r_2$, paralelas ambas al eje X. Si las raíces de (5) son reales e iguales, el lugar geométrico consta de dos rectas coincidentes representadas geométricamente por una sola recta paralela al eje X. Finalmente, si las raíces de (5) son complejas, no existe ningún lugar geométrico.

Una discusión semejante se aplica a la otra forma de la segunda ecuación ordinaria de la parábola

$$(x - h)^2 = 4p(y - k).$$

Los resultados se resumen en el siguiente

TEOREMA 3. *Una ecuación de segundo grado en las variables* x *y* y *que carezca del término en* xy *puede escribirse en la forma*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Si $A = 0$, $C \neq 0$ *y* $D \neq 0$, *la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje* X. *Si, en cambio,* $D = 0$, *la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje* X, *dos rectas coincidentes paralelas al eje* X, *o ningún lugar geométrico, según que las raíces de* $Cy^2 + Ey + F = 0$ *sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas.*

Si $A \neq 0$, $C = 0$ *y* $E \neq 0$, *la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje* Y. *Si, en cambio,* $E = 0$, *la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje* Y, *dos rectas coincidentes paralelas al eje* Y *o ningún lugar geométrico, según que las raíces de* $Ax^2 + Dx + F = 0$ *sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas.*

Ejemplo 2. Demostrar que la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Solución. Por el teorema 3, la ecuación

$$4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0 \qquad (6)$$

representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje Y.

Si reducimos la ecuación (6) a la segunda forma ordinaria, completando el cuadrado en x, obtenemos

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6(y - 3). \qquad (7)$$

De esta ecuación vemos inmediatamente que las coordenadas del vértice son $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$. Como $4p = 6$, $p = \frac{3}{2}$, y la parábola se abre hacia arriba. Entonces, como el foco está sobre el eje y el eje es paralelo al eje Y, se sigue que las coordenadas del foco son $\left(\frac{5}{2}, 3 + \frac{3}{2}\right)$, o sea, $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$. La ecuación de la directriz es $y = 3 - \frac{3}{2}$, o sea, $y = \frac{3}{2}$, y la longitud del lado recto es $|4p| = 6$.

Se recomienda al estudiante que dibuje la figura correspondiente a este ejemplo. También se recomienda resolver el problema por traslación de los ejes coordenados.

En las dos formas de la segunda ecuación ordinaria de la parábola, dadas por el teorema 2, hay tres constantes arbitrarias independientes o parámetros, h, k y p. Por tanto, la ecuación de cualquier parábola cuyo eje sea paralelo a uno de los ejes coordenados puede determinarse a partir de tres condiciones independientes. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los tres puntos $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, $(0, 5)$ y $(-6, -7)$.

Solución. Por el teorema 2, la ecuación buscada es de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

Podemos, sin embargo, tomar también la ecuación en la forma dada por el teorema 3, a saber,

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Como $C \neq 0$, podemos dividir toda la ecuación por C, obteniendo así

$$y^2 + D'x + E'y + F' = 0, \qquad (8)$$

en donde $D' = \frac{D}{C}$, $E' = \frac{E}{C}$ y $F' = \frac{F}{C}$ son tres constantes por determinarse.

Como los tres puntos dados están sobre la parábola, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (8). Por tanto, expresando este hecho, obtenemos las tres ecuaciones siguientes correspondiendo a los puntos dados:

$$\begin{cases} (3/2, -1), & 1 + \frac{3}{2}D' - E' + F' = 0, \\ (0, 5), & 25 \qquad\quad + 5E' + F' = 0, \\ (-6, -7), & 49 - 6D' - 7E' + F' = 0, \end{cases}$$

que pueden escribirse así,

$$\begin{cases} \frac{3}{2}D' - E' + F' = -1, \\ 5E' + F' = -25, \\ 6D' + 7E' - F' = 49. \end{cases}$$

La solución de este sistema de tres ecuaciones nos da

$$D' = 8, \quad E' = -2, \quad F' = -15.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (8), obtenemos

$$y^2 + 8x - 2y - 15 = 0,$$

que es la ecuación de la parábola que se buscaba.

El estudiante debe dibujar la figura para este ejemplo y verificar el hecho de que las coordenadas de cada uno de los tres puntos dados satisfacen la ecuación de la parábola. También debe obtener la misma ecuación usando la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

EJERCICIOS. Grupo 24

Dibujar para cada ejercicio la figura correspondiente.

1. Deducir y discutir la ecuación ordinaria $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

2. Por transformación de coordenadas, reducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria a las dos formas correspondientes de la primera ecuación ordinaria de la parábola.

3. Demostrar que si se tiene la ecuación de la parábola en la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, las coordenadas de su foco son $(h + p, k)$, y la ecuación de su directriz es $x = h - p$.

4. Demostrar que si se tiene la ecuación de una parábola en la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, las coordenadas de su foco son $(h, k + p)$, y la ecuación de su directriz es $y = k - p$.

5. Por medio de la primera ecuación ordinaria, deducir la siguiente propiedad geométrica de la parábola: Si desde un punto cualquiera de una parábola se baja una perpendicular a su eje, el cuadrado de la longitud de esta perpendicular es igual al producto de las longitudes de su lado recto y del segmento del eje comprendido entre el pie de dicha perpendicular y el vértice. Toda parábola, cualquiera que sea su posición relativa a los ejes coordenados, posee esta propiedad geométrica llamada *propiedad intrínseca* de la parábola.

6. Por medio de la propiedad intrínseca de la parábola, establecida en el ejercicio 5, deducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria de dicha curva.

7. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos $(-4, 3)$ y $(-1, 3)$, respectivamente. Hallar también las ecuaciones de su directriz y su eje.

8. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos $(3, 3)$ y $(3, 1)$, respectivamente. Hallar también la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

9. La directriz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$, y su foco es el punto $(4, -3)$. Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

10. La directriz de una parábola es la recta $x + 5 = 0$, y su vértice es el punto $(0, 3)$. Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

En cada uno de los ejercicios 11-15, redúzcase la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y eje, y la longitud del lado recto.

11. $4y^2 - 48x - 20y = 71$.

12. $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$.

13. $y^2 + 4x = 7$.

14. $4x^2 + 48y + 12x = 159$.

15. $y = ax^2 + bx + c$.

16. Resolver el ejemplo 2 del Artículo 56 trasladando los ejes coordenados.

17. Resolver el ejercicio 14 trasladando los ejes coordenados.

18. Discutir la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando $A = E = F = 0$ y $C \neq 0$, $D \neq 0$.

19. Resolver el ejemplo 3 del Artículo 56 tomando la ecuación en la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

20. Hallar las coordenadas del foco y el vértice, las ecuaciones de la directriz y el eje, y la longitud del lado recto de la parábola del ejemplo 3 del Artículo 56.

21. Determinar la ecuación de la familia de parábolas que tienen un foco común $(3, 4)$ y un eje común paralelo al eje Y.

22. La ecuación de una familia de parábolas es $y = 4x^2 + 4x + c$. Discutir cómo varía el lugar geométrico cuando se hace variar el valor del parámetro c.

23. La ecuación de una familia de parábolas es $y = ax^2 + bx$. Hállese la ecuación del elemento de la familia que pasa por los dos puntos $(2, 8)$ y $(-1, 5)$.

24. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los tres puntos $(0, 0)$, $(8, -4)$ y $(3, 1)$.

25. Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto $(4, -1)$, eje la recta $y + 1 = 0$ y que pasa por el punto $(3, -3)$.

26. Demostrar, analíticamente, que cualquier recta paralela al eje de una parábola corta a ésta en uno y solamente en un punto.

27. Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ es igual a $|x_1 - h + p|$.

28. Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola

$$y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$$

cuya ordenada es igual a 3.

29. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x + 3 = 0$ es siempre 2 unidades mayor que su distancia del punto $(1, 1)$.

30. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia que es siempre tangente a la recta $y - 1 = 0$ y a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 9.$$

57. Ecuación de la tangente a una parábola. La determinación de la tangente a la parábola no requiere la introducción de ningún concepto nuevo. Como la ecuación de una parábola es de segundo grado, su tangente puede obtenerse empleando la condición para tangencia estudiada en el Artículo 44.

Como para la circunferencia (Art. 45), consideraremos tres casos:

1. *Tangente en un punto de contacto dado.* Vamos a determinar la ecuación de la tangente a la parábola

$$y^2 = 4px, \qquad (1)$$

en un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola.

La ecuación de la tangente buscada es de la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1), \qquad (2)$$

en donde está por determinarse la pendiente m. Si el valor de y dado por la ecuación (2) es sustituído en la ecuación (1), se obtiene

$$(y_1 + mx - mx_1)^2 = 4px,$$

la cual se reduce a

$$m^2x^2 + (2my_1 - 2m^2x_1 - 4p)x + (y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1) = 0.$$

Para la tangencia, el discriminante de esta ecuación debe anularse, y escribimos

$$(2my_1 - 2m^2x_1 - 4p)^2 - 4m^2(y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1) = 0,$$

la cual se reduce a

$$x_1m^2 - y_1m + p = 0, \qquad (3)$$

de donde,

$$m = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4px_1}}{2x_1}.$$

Pero, como $P_1(x_1, y_1)$ está sobre la parábola (1), tenemos

$$y_1^2 = 4px_1, \qquad (4)$$

de donde $m = \frac{y_1}{2x_1}$. Si sustituímos este valor de m en (2), obtenemos, después de simplificar y ordenar los términos,

$$2x_1y = y_1(x + x_1).$$

De la ecuación (4), $2x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$, y si se sustituye este valor en la última ecuación se obtiene la forma más común de la ecuación de la tangente,

$$y_1y = 2p(x + x_1).$$

Muchas propiedades interesantes e importantes de la parábola están asociadas con la tangente en un punto cualquiera de la curva. La deducción de tales propiedades es más sencilla, en general, usando la forma canónica (1) y, por tanto, la ecuación de la tangente que acabamos de obtener es especialmente útil. Según la ecuación obtenida, tenemos el teorema que damos a continuación.

TEOREMA 4. *La tangente a la parábola* $y^2 = 4px$ *en cualquier punto* $P_1(x_1, y_1)$ *de la curva tiene por ecuación*

$$y_1 y = 2p(x + x_1).$$

2. *Tangente con una pendiente dada.* Consideremos ahora el problema general de determinar la ecuación de la tangente de pendiente m a la parábola (1).

La ecuación buscada es de la forma

$$y = mx + k, \qquad (5)$$

en donde k es una constante cuyo valor debe determinarse. Si sustituímos el valor de y dado por (5) en la ecuación (1), obtenemos

$$(mx + k)^2 = 4px,$$

o sea,

$$m^2x^2 + (2mk - 4p)x + k^2 = 0.$$

La condición para la tangencia es

$$(2mk - 4p)^2 - 4k^2m^2 = 0,$$

de donde,

$$k = \frac{p}{m},$$

valor que, sustituído en (5), nos da la ecuación buscada

$$y = mx + \frac{p}{m}, \quad m \neq 0.$$

TEOREMA 5. *La tangente de pendiente* m *a la parábola* $y^2 = 4px$ *tiene por ecuación*

$$y = mx + \frac{p}{m}, \quad m \neq 0.$$

3. *Tangente trazada desde un punto exterior.* Veamos el siguiente problema:

Ejemplo. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto (2, −4) a la parábola $x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$.

Solución. La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto (2, − 4) es

$$y + 4 = m(x - 2), \qquad (6)$$

en donde el parámetro m es la pendiente de la tangente buscada. De la ecuación (6), $y = mx - 2m - 4$, valor que sustituído en la ecuación de la parábola nos da

$$x^2 - 6x - 4(mx - 2m - 4) + 17 = 0.$$

Esta ecuación se reduce a

$$x^2 - (4m + 6)x + (8m + 33) = 0.$$

Para que haya tangencia,

$$(4m + 6)^2 - 4(8m + 33) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene $m = 2, -3$. Por tanto, por (6), las ecuaciones de las tangentes buscadas son

$$y + 4 = 2(x - 2) \quad \text{y} \quad y + 4 = -3(x - 2),$$

o sea,

$$2x - y - 8 = 0 \quad \text{y} \quad 3x + y - 2 = 0.$$

El estudiante debe dibujar la figura correspondiente a este problema.

EJERCICIOS. Grupo 25

Dibujar una figura para cada ejercicio.

En cada uno de los ejercicios 1-3 hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para la parábola y el punto de contacto dados.

1. $y^2 - 4x = 0$; $(1, 2)$.
2. $y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$; $(-6, 3)$.
3. $x^2 - 6x + 5y - 11 = 0$; $(-2, -1)$.

4. Por medio del teorema 4 (Art. 57) hallar la ecuación de la tangente del ejercicio 1.

5. Demostrar que la ecuación de la normal a la parábola $y^2 = 4px$ en $P_1(x_1, y_1)$ es $y_1 x + 2py = x_1 y_1 + 2py_1$.

6. Por medio del resultado del ejercicio 5, hallar la ecuación de la normal del ejercicio 1.

7. Demostrar que las tangentes a una parábola en los puntos extremos de su lado recto son perpendiculares entre sí.

8. Demostrar que el punto de intersección de las tangentes del ejercicio 7 está sobre la directriz de la parábola. (Ver el ejercicio 19 del grupo 23, Art. 55.)

9. Hallar la ecuación de la tangente de pendiente -1 a la parábola $y^2 - 8x = 0$.

10. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 + 4x + 12y - 8 = 0$ que es paralela a la recta $3x + 9y - 11 = 0$.

11. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$ que es perpendicular a la recta $2x + y + 7 = 0$.

12. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $(-3, 3)$ a la parábola $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$.

13. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(1, 4)$ a la parábola $y^2 + 3x - 6y + 9 = 0$.

14. Del punto $(-1, -1)$, se trazan dos tangentes a las parábola

$$y^2 - x + 4y + 6 = 0.$$

Hallar el ángulo agudo formado por estas rectas.

15. Con referencia a la parábola $y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $x + 2y + k = 0$:

a) cortan a la parábola en dos puntos diferentes;
b) son tangentes a la parábola;
c) no cortan a la parábola.

16. Hallar el ángulo agudo de intersección de la recta $x - y - 4 = 0$ y la parábola $y^2 = 2x$ en cada uno de sus puntos de intersección.

17. Hallar el ángulo agudo de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y la parábola $x^2 - 4y - 4 = 0$ en uno cualquiera de sus dos puntos de intersección.

18. Demostrar que las parábolas $x^2 - 4x + 8y - 20 = 0$ y $x^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ son ortogonales entre sí en cada uno de sus puntos de intersección.

19. Desde el foco de una parábola se traza una recta perpendicular a una tangente cualquiera a la parábola. Demostrar que el punto de intersección de estas rectas está sobre la tangente a la parábola en el vértice.

20. Demostrar que la normal de pendiente m a la parábola $y^2 = 4\,px$ tiene por ecuación $y = mx - 2pm - pm^3$.

21. Demostrar que cualquier tangente a una parábola, excepto la tangente en el vértice, corta a la directriz y al lado recto (prolongado si es necesario) en puntos que son equidistantes del foco.

22. En cualquier punto P de una parábola, no siendo el vértice, la tangente y la normal cortan al eje de la parábola en los puntos A y B, respectivamente. Demostrar que los puntos A, B y P son equidistantes del foco.

23. Por medio del resultado del ejercicio 22, demuéstrese un procedimiento para trazar la tangente y la normal en cualquier punto de una parábola dada.

24. Demostrar que la tangente a la parábola $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, de pendiente m, tiene por ecuación $y = mx - mh + k + \frac{p}{m}$, $m \neq 0$.

25. Demostrar que toda circunferencia que tiene de diámetro una cuerda focal de una parábola, es tangente a la directriz.

26. Se han trazado dos círculos cada uno de los cuales tiene por diámetro una cuerda focal de una parábola. Demostrar que la cuerda común de los círculos pasa por el vértice de la parábola.

27. Si desde un punto exterior P se trazan tangentes a una parábola, el segmento de recta que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto de* P para esa parábola (véase el ejercicio 25 del grupo 18, Art. 45). Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto exterior a la parábola $y^2 = 4px$, demuéstrese que la ecuación de la cuerda de contacto de P_1 es $y_1 y = 2p(x + x_1)$. (Ver el teorema 4, Art. 57.)

28. Demostrar que la cuerda de contacto de cualquier punto de la directriz de una parábola pasa por su foco.

29. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas de una parábola es una recta paralela al eje. Esta recta se llama *diámetro* de la parábola.

30. Hallar la ecuación del diámetro de la parábola $y^2 = 16x$ para un sistema de cuerdas paralelas de pendiente 2.

58. La función cuadrática. La forma

$$ax^2 + bx + c, \qquad (1)$$

en donde, a, b y c son constantes y $a \neq 0$, se llama *función cuadrática* de x, o *trinomio de segundo grado*, y puede ser investigada por medio de la relación

$$y = ax^2 + bx + c. \qquad (2)$$

Vimos en el Artículo 56 que la ecuación (2) se representa gráficamente por una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje Y. Por tanto, las propiedades analíticas de la función cuadrática (1) pueden estudiarse convenientemente por medio de las propiedades geométricas de la parábola (2). Si reducimos la ecuación (2) a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola, completando el cuadrado en x, obtenemos

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{1}{a}\left(y+\frac{b^2}{4a}-c\right),$$

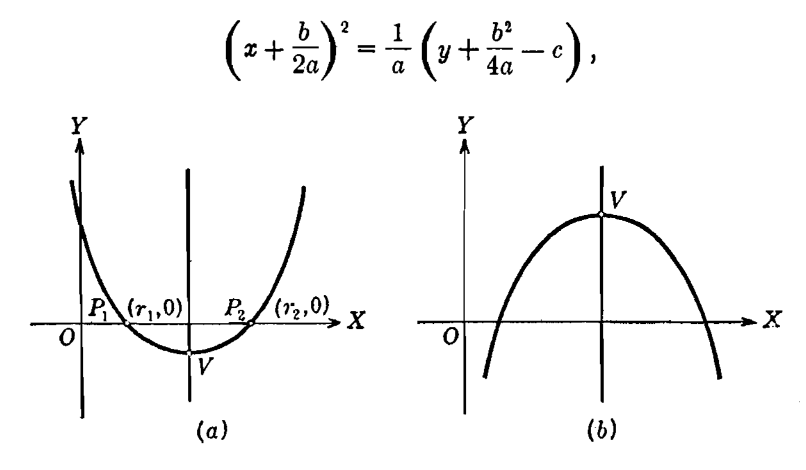


Fig. 81

que es la ecuación de una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje Y, y cuyo vértice es el punto $\left(-\frac{b}{2a},\ c-\frac{b^2}{4a}\right)$. Si $a>0$, la parábola se abre hacia arriba (fig. 81 [a]); si $a<0$, la parábola se abre hacia abajo (fig. 81 [b]).

Un punto de una curva continua cuya ordenada sea algebraicamente mayor que la de cualquiera de los puntos vecinos a él se llama *punto máximo* de la curva. Análogamente, un punto cuya ordenada sea algebraicamente menor que la de cualquiera de los puntos vecinos a él se llama *punto mínimo* de la curva. Evidentemente, si $a>0$ (fig. 81 [a]) la parábola (2) tiene un solo punto mínimo, el vértice V. De manera semejante, si $a<0$ (fig. 81 [b]) la parábola (2) tiene un único punto máximo, el vértice V. La interpretación analítica es bien obvia. Como las coordenadas del vértice V de la parábola (4) son $\left(-\frac{b}{2a},\ c-\frac{b^2}{4a}\right)$, se sigue que si $a>0$ la función cuadrática (3) tiene, para $x=-\frac{b}{2a}$, un valor mínimo igual a

$c - \frac{b^2}{4a}$, y si $a < 0$ tiene, para $x = -\frac{b}{2a}$, un valor máximo igual a $c - \frac{b^2}{4a}$. Resumimos estos resultados en el siguiente

Teorema 6. *La función cuadrática*

$$ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \tag{1}$$

está representada gráficamente por la parábola

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{2}$$

cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje Y, *y cuyo vértice es el punto* $\left(-\frac{b}{2a},\ c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Si $a > 0$, *la parábola (2) se abre hacia arriba y su vértice es un punto mínimo, y la función cuadrática (1) tiene un valor mínimo igual a* $c - \frac{b^2}{4a}$ *cuando* $= -\frac{b}{2a}$.

Si $a < 0$, *la parábola (2) se abre hacia abajo y su vértice es un punto máximo, y la función cuadrática (1) tiene un valor máximo igual a* $c - \frac{b^2}{4a}$ *cuando* $x = -\frac{b}{2a}$.

Acabamos de discutir los valores extremos de la función cuadrática (1). Pero podemos también determinar fácilmente los valores de x para los cuales la función es positiva, negativa o cero. Por ejemplo, supongamos que la función cuadrática (1) es tal que tiene por gráfica a la figura 81 (a) en donde la parábola corta al eje X en los dos puntos diferentes P_1 y P_2. Como las ordenadas de P_1 y P_2 son nulas, se sigue, de (1) y (2), que sus abscisas r_1 y r_2, respectivamente, son las las raíces de la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Además, como aparece en la gráfica, la función (1) es negativa para los valores de x comprendidos entre r_1 y r_2, y es positiva para valores de x menores que r_1 y mayores que r_2. El estudiante debe desarrollar una discusión semejante para la función cuadrática representada por la figura 81 (b). También debe discutir la función cuadrática cuya gráfica es tangente al eje X, y la función cuadrática cuya gráfica no corta al eje X.

Ejemplo. Determinar el máximo o mínimo de la función cuadrática

$$6 + x - x^2, \tag{3}$$

y los valores de x para los cuales esta función es positiva, negativa y cero. Ilustrar los resultados gráficamente.

Solución. La función (3) está representada gráficamente por la parábola

$$y = 6 + x - x^2,$$

que reducida a la forma ordinaria queda

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\left(y - \frac{25}{4}\right),$$

de modo que la parábola se abre hacia abajo y su vértice es el punto máximo $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$ como se ve en la figura 82.

Luego la función (3) tiene el valor máximo $\frac{25}{4}$ cuando $x = \frac{1}{2}$.

Para determinar los valores de x para los cuales la función (3) es positiva, necesitamos simplemente determinar, como en Algebra, los valores de x para los cuales la desigualdad

$$-x^2 + x + 6 > 0$$

es verdadera. Esta desigualdad puede escribirse en la forma

$$(-x - 2)(x - 3) > 0.$$

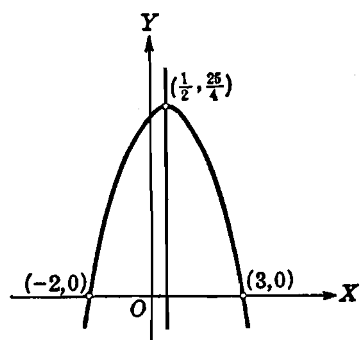


Fig. 82

Considerando los signos de los dos factores del primer miembro de esta desigualdad, vemos que es verdadera para todos los valores de x comprendidos en el intervalo $-2 < x < 3$.

Análogamente, considerando la desigualdad

$$(-x - 2)(x - 3) < 0,$$

vemos que la función (3) es negativa para todos los valores de x tales que $x < -2$ y $x > 3$.

Finalmente, considerando la igualdad

$$(-x - 2)(x - 3) = 0,$$

vemos que la función (3) se anula cuando $x = -2$ y $x = 3$.

59. Algunas aplicaciones de la parábola. La parábola se presenta frecuentemente en la práctica. El propósito de este artículo es estudiar brevemente algunas aplicaciones de esta curva.

a) *Arco parabólico.* De las diversas formas de arcos usadas en construcción, una tiene la forma de un arco parabólico. Tal forma, llamada *arco parabólico*, es la indicada en la figura 83 (*a*). La longitud $\overline{AC}$ en la base se llama *claro* o *luz*; la altura máxima $\overline{OB}$ sobre la base se llama *altura* del arco. Si el arco parabólico se coloca de tal manera que su vértice esté en el origen y su eje coincida con el eje Y,

y si la longitud del claro es $2s$ y la altura es h, entonces podemos demostrar fácilmente que la ecuación de la parábola toma la forma

$$x^2 = -\frac{s^2}{h}y.$$

En un puente colgante, cada cable cuelga de sus soportes A y C en la forma del arco de una curva, como se indica en la figura 83 (b).

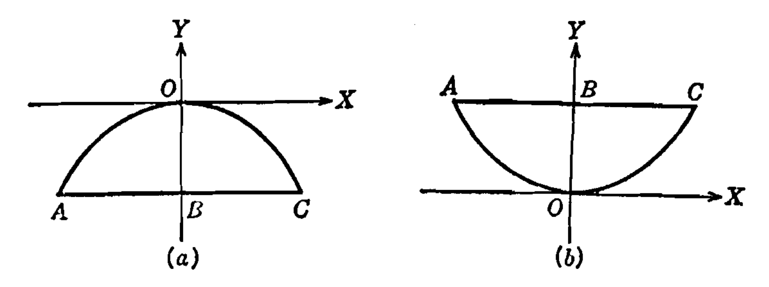


Fig. 83

La distancia $\overline{AC}$ comprendida entre los soportes del cable es la *luz*; la distancia $\overline{BO}$, altura vertical de los soportes del cable sobre el punto más bajo, se llama *depresión* del cable. Si los pesos de los cables son pequeños comparados con el de la carga, y si la distribución del peso de la carga es uniforme en la dirección horizontal, se demuestra en Mecánica que cada cable toma muy aproximadamente la forma de un arco parabólico.

b) *Propiedad focal de la parábola.* La parábola tiene una importante propiedad focal basada en el siguiente teorema.

Teorema 7. *La normal a la parábola en un punto* $P_1(x_1, y_1)$ *cualquiera de la parábola forma ángulos iguales con el radio vector de* P_1 *y la recta que pasa por* P_1 *y es paralela al eje de la parábola.*

Demostración. El teorema no se particulariza si tomamos como ecuación de la parábola la forma canónica

$$y^2 = 4px. \qquad (1)$$

Designemos por n la normal a la parábola en P_1, por l la recta que pasa por P_1 paralela al eje, y por r el radio vector FP_1, tal como se indica en la figura 84. Sea α el ángulo formado por n y r, y β el formado por n y l. Vamos a demostrar que $\alpha = \beta$.

La pendiente de la parábola en $P_1(x_1, y_1)$ es $\frac{2p}{y_1}$, según el teorema 4 del Artículo 57. Por tanto, la pendiente de n es $-\frac{y_1}{2p}$. También la pendiente de r es $\frac{y_1}{x_1 - p}$. Por tanto, por el teorema 5 del Artículo 10,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{y_1}{2p} - \frac{y_1}{x_1 - p}}{1 - \frac{y_1^2}{2p(x_1 - p)}} = \frac{-x_1 y_1 + p y_1 - 2p y_1}{2p x_1 - 2p^2 - y_1^2} = \frac{-x_1 y_1 - p y_1}{2p x_1 - 2p^2 - y_1^2}.$$

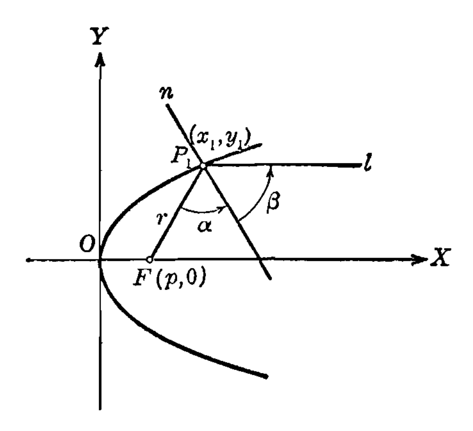


Fig. 84

Como $P_1(x_1, y_1)$ está sobre la parábola (1), sus coordenadas satisfacen la ecuación (1), y $y_1^2 = 4px_1$. Sustituyendo este valor de y_1^2 en la última igualdad, tenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-x_1 y_1 - p y_1}{2p x_1 - 2p^2 - 4p x_1} = \frac{-y_1(x_1 + p)}{-2p(x_1 + p)} = \frac{y_1}{2p}. \qquad (2)$$

Y como la pendiente de l es 0, resulta:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{0 - \left(-\frac{y_1}{2p}\right)}{1 + 0\left(-\frac{y_1}{2p}\right)} = \frac{y_1}{2p}. \qquad (3)$$

Por tanto, de (2) y (3), $\alpha = \beta$, y el teorema queda demostrado.

Si un rayo de luz l_1 toca a una superficie pulida m en el punto P, es reflejado a lo largo de otra recta, digamos l_2, tal como se indica en la figura 85 (a). Sea n la normal a m en P. El ángulo α formado por el rayo incidente l_1 y n se llama *ángulo de incidencia;* el ángulo β formado por el rayo reflejado l_2 y n se llama *ángulo de reflexión*. En Física se demuestra que la ley de la reflexión establece: 1) que l_1, n y l_2 son coplanares, y 2) que $\alpha = \beta$. Por esta ley y por el teorema 7, vemos que si un foco luminoso se coloca en el foco F de una parábola, los rayos inciden sobre la parábola, y se reflejan según rectas paralelas al eje de la parábola, tal como se indica en la figura 85 (b). Este es el principio del reflector parabólico usado en las locomotoras y automóviles y en los faros buscadores.

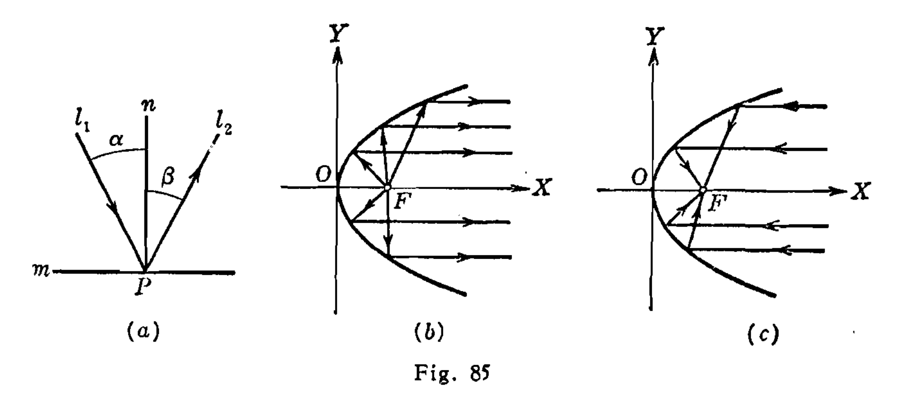


Fig. 85

Como el Sol está tan distante de la Tierra, sus rayos, en la superficie terrestre, son, prácticamente, paralelos entre sí. Si un reflector parabólico se coloca de tal manera que su eje sea paralelo a los rayos del Sol, los rayos incidentes sobre el reflector se reflejan de manera que todos pasan por el foco, tal como se ve en la figura 85 (c). Esta concentración de los rayos solares en el foco es el principio en que se basa el hacer fuego con una lente; también es el origen de la palabra foco, que es el término latino (focus) empleado para designar el hogar o chimenea. Esta propiedad también se emplea en el telescopio de reflexión en el cual los rayos paralelos de luz procedentes de las estrellas se concentran en el foco.

EJERCICIOS. Grupo 26

Dibujar una figura para cada ejercicio.

En cada uno de los ejercicios 1-4, hallar el valor máximo o mínimo de la función dada, y comprobar el resultado gráficamente.

1. $4x^2 + 16x + 19.$

2. $24x - 3x^2 - 47.$

3. $x^2 - 6x + 9.$

4. $4x - 2x^2 - 5.$

En cada uno de los ejercicios 5-8, hallar los valores de x, si los hay, para los cuales es verdadera la desigualdad dada. Comprobar el resultado gráficamente.

5. $4x^2 + 11x - 3 > 0.$

6. $8x - x^2 - 16 < 0.$

7. $12x - x^2 - 37 > 0.$

8. $x^2 + 14x + 49 > 0.$

En cada uno de los ejercicios 9-12, hallar los valores de x para los cuales la función dada es positiva, negativa y cero, y tiene un máximo o un mínimo, Comprobar los resultados gráficamente.

9. $x^2 - 5x + 4.$

10. $3 - 5x - 2x^2.$

11. $x^2 - 4x + 4.$

12. $4x^2 - 7x + 53.$

En cada uno de los ejercicios 13-15, sea $y = ax^2 + bx + c$ una función cuadrática tal que las raíces de $y = 0$ sean r_1 y r_2.

13. Si r_1 y r_2 son reales y desiguales, y $r_1 > r_2$, demostrar que y tiene el mismo signo que a cuando $x > r_1$ y $x < r_2$, y es de signo contrario a a cuando $r_1 > x > r_2$.

14. Si r_1 y r_2 son reales e iguales, demuéstrese que y tiene el mismo signo que a cuando $x \neq r_1$.

15. Si r_1 y r_2 son números complejos conjugados, demuéstrese que y tiene el mismo signo que a para todos los valores de x.

16. Hallar la expresión para la familia de funciones cuadráticas de x que tienen un valor máximo igual a 4 para $x = -2$.

17. Hallar la expresión para la familia de funciones cuadráticas de x que tienen un valor mínimo igual a 5 para $x = 3$.

Los problemas enunciados en los ejercicios 18-23 deben comprobarse gráficamente.

18. La suma de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es constante e igual a 14 cm. Hallar las longitudes de los catetos si el área del triángulo debe ser máxima.

19. La suma de dos números es 8. Hallar estos números si la suma de sus cuadrados debe ser mínima.

20. El perímetro de un rectángulo es 20 cm. Hallar sus dimensiones si su área debe ser máxima.

21. Hallar el número que excede a su cuadrado en un número máximo.

22. Demostrar que de todos los rectángulos que tienen un perímetro fijo el cuadrado es el de área máxima.

23. Una viga simplemente apoyada de longitud l pies está uniformemente cargada con w libras por pie. En Mecánica se demuestra que a una distancia de x pies de un soporte, el momento flexionante M en pies-libras está dado por la fórmula $M = \frac{1}{2} wlx - \frac{1}{2} wx^2$. Demostrar que el momento flexionante es máximo en el centro de la viga.

24. Determinar la ecuación del arco parabólico cuyo claro o luz es de 12 m y cuya altura es de 6 m.

25. Determinar la ecuación del arco parabólico formado por los cables que soportan un puente colgante cuando el claro es de 150 m y la depresión de 20 metros.

CAPITULO VII

LA ELIPSE

60. Definiciones. Una *elipse* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

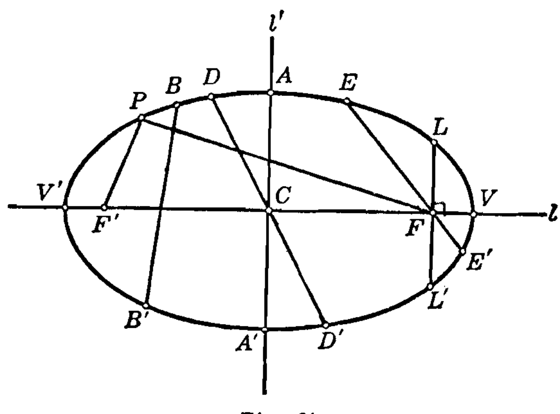


Fig. 86

Los dos puntos fijos se llaman *focos* de la elipse. La definición de una elipse excluye el caso en que el punto móvil esté sobre el segmento que une los focos.

Designemos por F y F' (fig. 86) los focos de una elipse. La recta l que pasa por los focos tiene varios nombres; veremos que es conveniente introducir el término de *eje focal* para designar esta recta. El eje focal corta a la elipse en dos puntos, V y V', llamados *vértices*. La porción del eje focal comprendida entre los vértices, el segmento VV', se llama *eje mayor*. El punto C del eje focal, punto medio del segmento que une los focos, se llama *centro*. La recta l' que pasa por

C y es perpendicular al eje focal l tiene varios nombres; encontraremos conveniente introducir el término *eje normal* para designarla. El eje normal l' corta a la elipse en dos puntos, A y A', y el segmento AA' se llama *eje menor*. Un segmento tal como BB', que une dos puntos diferentes cualesquiera de la elipse, se llama *cuerda*. En particular, una cuerda que pasa por uno de los focos, tal como EE', se llama *cuerda focal*. Una cuerda focal, tal como LL', perpendicular al eje focal l se llama *lado recto*. Evidentemente como la elipse tiene dos focos, tiene también dos lados rectos. Una cuerda que pasa por C, tal como DD', se llama un *diámetro*. Si P es un punto cualquiera de la elipse, los segmentos FP y $F'P$ que unen los focos con el punto P se llaman *radios vectores* de P.

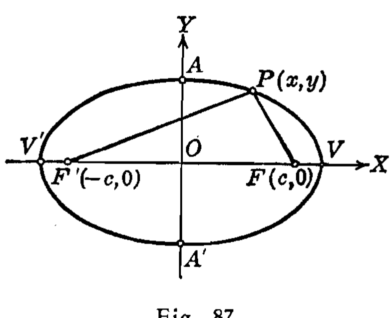


Fig. 87

61. Ecuación de la elipse de centro en el origen y ejes de coordenadas los ejes de la elipse. Consideremos la elipse de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje X (fig. 87). Los focos F y F' están sobre el eje X. Como el centro O es el punto medio del segmento FF', las coordenadas de F y F' serán, por ejemplo, $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente, siendo c una constante positiva. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la elipse. Por la definición de la curva, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a, \qquad (1)$$

en donde a es una constante positiva *mayor* que c.

Por el teorema 2, Artículo 6, tenemos

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

de manera que la condición geométrica (1) está expresada analíticamente por la ecuación

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (2)$$

Para simplificar la ecuación (2), pasamos el segundo radical al segundo miembro, elevamos al cuadrado, simplificamos y agrupamos los términos semejantes. Esto nos da

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Elevando al cuadrado nuevamente, obtenemos

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2,$$

de donde,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (3)$$

Como $2a > 2c$ es $a^2 > c^2$ y $a^2 - c^2$ es un número positivo que puede ser reemplazado por el número positivo b^2, es decir,

$$b^2 = a^2 - c^2. \qquad (4)$$

Si en (3) reemplazamos $a^2 - c^2$ por b^2, obtenemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

y dividiendo por a^2b^2, se obtiene, finalmente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (5)$$

Recíprocamente, sea $P_1(x_1, x_1)$ un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (5), de manera que

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \qquad (6)$$

Invirtiendo el orden de las operaciones efectuadas para pasar de la ecuación (2) a la (5), y dando la debida interpretación a los signos de los radicales, podemos demostrar que la ecuación (6) conduce a la relación

$$\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} = 2a,$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (1) aplicada al punto P_1. Por tanto, P_1 está sobre la elipse cuya ecuación está dada por (5).

Ahora discutiremos la ecuación (5) de acuerdo con el Artículo 19. Por ser a y $-a$ las intersecciones con el eje X, las coordenadas de los vértices V y V' son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, respectivamente, y la longitud del eje mayor es igual a $2a$, la constante que se menciona en la definición de la elipse. Las intersecciones con el eje Y son b y $-b$. Por tanto, las coordenadas de los extremos A y A' del eje menor son $(0, b)$ y $(0, -b)$, respectivamente, y la longitud del eje menor es igual a $2b$.

Por la ecuación (5) vemos que la elipse es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y al origen.

Si de la ecuación (5) despejamos y, obtenemos

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \tag{7}$$

Luego, se obtienen valores reales de y solamente para valores de x del intervalo

$$-a \leq x \leq a. \tag{8}$$

Si de la ecuación (5) despejamos x, obtenemos

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2},$$

de manera que se obtienen valores reales de x, solamente para valores de y dentro del intervalo

$$-b \leq y \leq b. \tag{9}$$

De (8) y (9) se deduce que la elipse está limitada por el rectángulo cuyos lados son las rectas $x = \pm a$, $y = \pm b$. Por tanto, la elipse es una curva cerrada.

Evidentemente, la elipse no tiene asíntotas verticales ni horizontales.

La abscisa del foco F es c. Si en (7) sustituímos x por este valor se obtienen las ordenadas correspondientes que son

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2},$$

de donde, por la relación (4),

$$y = \pm \frac{b^2}{a}.$$

Por tanto, la longitud del lado recto para el foco F es $\frac{2b^2}{a}$. Análogamente, la longitud del lado recto para el foco F' es $\frac{2b^2}{a}$.

Un elemento importante de una elipse es su *excentricidad* que se define como la razón $\frac{c}{a}$ y se representa usualmente por la letra e. De (4) tenemos

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \tag{10}$$

Como $c < a$, *la excentricidad de una elipse es menor que la unidad.*

Consideremos ahora el caso en que el centro de la elipse está en el origen, pero su eje focal coincide con el eje Y. Las coordenadas de los focos son entonces $(0, c)$ y $(0, -c)$. En este caso, por el mismo procedimiento empleado para deducir la ecuación (5), hallamos que la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \tag{11}$$

en donde a es la longitud del semieje mayor, b la longitud del semieje menor, y $a^2 = b^2 + c^2$. La discusión completa de la ecuación (11) se deja al estudiante como ejercicio.

Las ecuaciones (5) y (11) se llaman, generalmente, *primera ecuación ordinaria de la elipse*. Son las ecuaciones más simples de la elipse y, por tanto, nos referiremos a ellas como a las formas canónicas.

Los resultados anteriores se pueden resumir en el siguiente

TEOREMA 1. *La ecuación de una elipse de centro en el origen, eje focal el eje* X, *distancia focal igual a* 2c *y cantidad constante igual a* 2a *es*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje focal de la elipse coincide con el eje Y, *de manera que las coordenadas de los focos sean* (0, c) *y* (0, − c), *la ecuación de la elipse es*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Para cada elipse, a *es la longitud del semieje mayor,* b *la del semieje menor, y* a, b *y* c *están ligados por la relación*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

También, para cada elipse, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$ *y la excentricidad* e *está dada por la fórmula*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

NOTA. Si reducimos la ecuación de una elipse a su forma canónica, podemos determinar fácilmente su posición relativa a los ejes coordenados comparando los denominadores de los términos en x^2 y y^2. El denominador mayor está asociado a la variable correspondiente al eje coordenado con el cual coincide el eje mayor de la elipse.

Ejemplo. Una elipse tiene su centro en el origen, y su eje mayor coincide con el eje Y. Si uno de los focos es el punto (0, 3) y la excentricidad es igual a ½, hallar las coordenadas de otro foco, las longitudes de los ejes mayor y menor, la ecuación de la elipse y la longitud de cada uno de sus lados rectos.

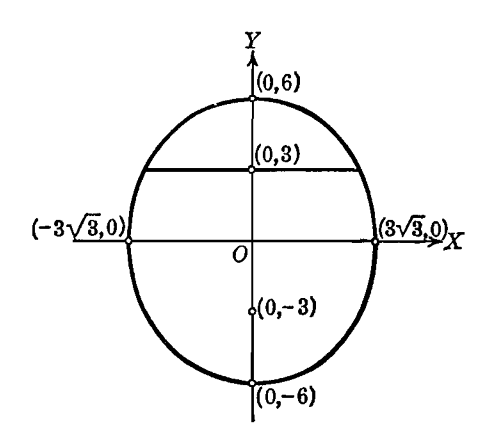


Fig. 88

Solución. Como uno de los focos es el punto (0, 3), tenemos $c = 3$, y las coordenadas del otro foco son (0, -3). Como la excentricidad es ½, tenemos

$$e = \frac{1}{2} = \frac{c}{a} = \frac{3}{a},$$

de donde, $a = 6$. Tenemos, también,

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}.$$

Por tanto, las longitudes de los ejes mayor y menor son $2a = 12$ y $2b = 6\sqrt{3}$, respectivamente.

Por el teorema 1, la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

La longitud de cada lado recto es $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2 \cdot 27}{6} = 9.$

El lugar geométrico es el representado en la figura 88.

EJERCICIOS. Grupo 27

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Deducir la ecuación ordinaria $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ a partir de la definición de la elipse.

2. Desarrollar una discusión completa de la ecuación ordinaria

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

3. Dados los focos y la longitud de su eje mayot, demostrar un procedimiento para obtener puntos de una elipse usando escuadras y compás.

4. Demostrar un procedimiento para obtener puntos de una elipse usando escuadra y compás si se conocen sus ejes mayor y menor.

5. Demostrar que la circunferencia es un caso particular de la elipse cuya excentricidad vale cero.

En cada uno de los ejercicios 6-9, hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada uno de sus lados rectos de la elipse correspondiente. Trazar y discutir el lugar geométrico.

6. $9x^2 + 4y^2 = 36$.

7. $4x^2 + 9y^2 = 36$.

8. $16x^2 + 25y^2 = 400$.

9. $x^2 + 3y^2 = 6$.

10. Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $(4, 0)$, $(-4, 0)$, y cuyos focos son los puntos $(3, 0)$, $(-3, 0)$.

11. Los vértices de una elipse son los puntos $(0, 6)$, $(0, -6)$, y sus focos son los puntos $(0, 4)$, $(0, -4)$. Hallar su ecuación,

12. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $(2, 0)$, $(-2, 0)$, y su excentricidad es igual a $\frac{2}{3}$.

13. Los focos de una elipse son los puntos $(3, 0)$, $(-3, 0)$, y la longitud de uno cualquiera de sus lados rectos es igual a 9. Hallar la ecuación de la elipse.

14. Hallar la ecuación y la excentricidad de la elipse que tiene su centro en el origen, uno de sus vértices en el punto $(0, -7)$ y pasa por el punto $\left(\sqrt{5}, \frac{14}{3}\right)$.

15. Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje X. Hallar su ecuación sabiendo que pasa por los puntos $(\sqrt{6}, -1)$ y $(2, \sqrt{2})$.

16. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3\right)$, tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje X y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

17. Demostrar que la longitud del eje menor de una elipse es media proporcional entre las longitudes de su eje mayor y su lado recto.

18. Demostrar que la longitud del semieje menor de una elipse es media proporcional entre los dos segmentos del eje mayor determinados por uno de los focos.

19. Demostrar que si dos elipses tienen la misma excentricidad, las longitudes de sus semiejes mayor y menor son proporcionales.

20. Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto cualquiera de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, demuéstrese que sus radios vectores son $a + ex_1$ y $a - ex_1$. Establecer el significado de la suma de estas longitudes.

21. Hallar los radios vectores del punto $(3, \frac{7}{4})$ que está sobre la elipse $7x^2 + 16y^2 = 112$.

las longitudes.

22. Los puntos extremos de un diámetro de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ son P_1 y P_2. Si F es uno de los focos de la elipse, demostrar que la suma de los radios vectores FP_1 y FP_2 es igual a la longitud del eje mayor.

23. Si k es un número positivo, demostrar que la ecuación $3x^2 + 4y^2 = k$ representa una familia de elipses cada una de las cuales tiene de excentricidad $\frac{1}{2}$.

En cada uno de los ejercicios 24-26, usando la definición de elipse, hallar la ecuación de la elipse a partir de los datos dados. Redúzcase la ecuación a la primera forma ordinaria por transformación de coordenadas.

24. Focos (3, 8) y (3, 2); longitud del eje mayor = 10.
25. Vértices (− 3, − 1) y (5, − 1); excentricidad = $\frac{3}{4}$.
26. Vértices (2, 6) y (2, − 2); longitud del lado recto = 2.

27. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $y = -8$ es siempre igual al doble de su distancia del punto (0, − 2).

28. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

29. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que dividen a las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ en la razón 1 : 4. (Dos soluciones.)

30. Un segmento AB de longitud fija se mueve de tal manera que su extremo A permanece siempre sobre el eje X y su extremo B siempre sobre el eje Y. Si P es un punto cualquiera, distinto de A y B, y que no esté sobre el segmento AB o en su prolongación, demuéstrese que el lugar geométrico de P es una elipse. Un instrumento basado sobre este principio se usa para construir elipses teniendo como datos los ejes mayor y menor.

62. Ecuación de la elipse de centro (h, k) y ejes paralelos a los coordenados. Ahora consideraremos la determinación de la ecuación de una elipse cuyo centro no está en el origen y cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados. Según esto, consideremos la elipse cuyo centro está en el punto (h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje X tal como se indica en la figura 89. Sean $2a$ y $2b$ las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse, respectivamente. Si los ejes coordenados son trasladados de manera que el nuevo origen O' coincida con el centro (h, k) de la elipse, se sigue, del teorema 1, Artículo 61, que la ecuación de la elipse con referencia a los nuevos ejes X' y Y' está dada por

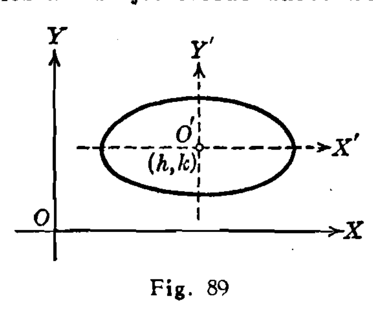


Fig. 89

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

De la ecuación (1) puede deducirse la ecuación de la elipse referida a los ejes originales X y Y usando las ecuaciones de transformación del teorema 1, Artículo 50, a saber:

$$x = x' + h, \quad y = y' + k,$$

de donde:

$$x' = x - h, \quad y' = y - k.$$

Si sustituímos estos valores de x' y y' en la ecuación (1), obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

que es la ecuación de la elipse referida a los ejes originales X y Y.

Análogamente, podemos demostrar que la elipse cuyo centro es el punto (h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje Y tiene por ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1. \tag{3}$$

Las ecuaciones (2) y (3) se llaman, generalmente, la *segunda ecuación ordinaria de la elipse*. Los resultados precedentes, juntos con el teorema 1 del Artículo 61, nos dan el siguiente

TEOREMA 2. *La ecuación de la elipse de centro el punto* (h, k) *y eje focal paralelo al eje* X, *está dada por la segunda forma ordinaria,*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, *su ecuación está dada por la segunda forma ordinaria*

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

Para cada elipse, a *es la longitud del semieje mayor,* b *es la del semieje menor,* c *es la distancia del centro a cada foco, y* a, b *y* c *están ligadas por la relación*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

También, para cada elipse, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $\frac{2b^2}{a}$, *y la excentricidad* e *está dada por la relación*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

Ejemplo 1. Los vértices de una elipse tienen por coordenadas $(-3, 7)$ y $(-3, -1)$, y la longitud de cada lado recto es 2. Hallar la ecuación de la elipse, las longitudes de sus ejes mayor y menor, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

Solución. Como los vértices V y V' están sobre el eje focal y sus abscisas son ambas -3, se sigue (fig. 90) que el eje focal es paralelo al eje Y. Por tanto, por el teorema 2, la ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

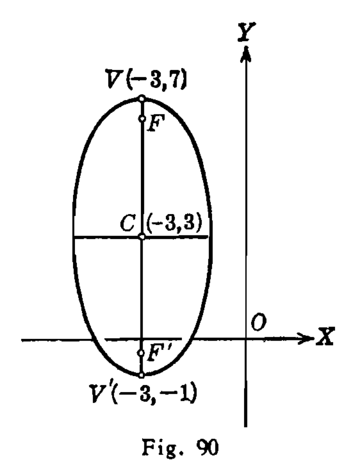


Fig. 90

El centro C es el punto medio del eje mayor VV', y sus coordenadas son, por lo tanto, $(-3, 3)$. La longitud del eje mayor VV' es 8, como se puede ver fácilmente. Por tanto, $2a = 8$ y $a = 4$. La longitud del lado recto es $\frac{2b^2}{a} = 2$. Como $a = 4$, se sigue que $2b^2 = 8$, de donde $b = 2$, y la longitud del eje menor es 4. Luego la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1.$$

También, $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$, de donde $c = 2\sqrt{3}$. Por tanto, las coordenadas de los focos son $F(-3, 3 + 2\sqrt{3})$ y $F'(-3, 3 - 2\sqrt{3})$, y la excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Consideremos ahora la ecuación de la elipse en la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \qquad (2)$$

Si quitamos denominadores, desarrollamos, trasponemos y ordenamos términos, obtenemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0, \qquad (4)$$

la cual puede escribirse en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (5)$$

en donde, $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = -2a^2k$ y $F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$. Evidentemente, los coeficientes A y C deben ser del mismo signo.

Recíprocamente, consideremos una ecuación de la forma (5) y reduzcámosla a la forma ordinaria (2) completando cuadrados. Obtenemos

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{C}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{A}=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2} \qquad (6)$$

Sea $M=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2}$. Si $M\neq 0$, la ecuación (6) puede escribirse en la forma

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{MC}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{MA}=1, \qquad (7)$$

que es la ecuación ordinaria de la elipse.

Como A y C deben concordar en signo, podemos suponer, sin perder generalidad, que son ambos positivos. Por lo tanto, si (5) debe representar una elipse, la ecuación (7) demuestra que M debe ser positivo. El denominador $4A^2C^2$ de M es positivo; por tanto, el signo de M depende del signo de su numerador CD^2+AE^2-4ACF, al que designaremos por N. De acuerdo con esto, comparando las ecuaciones (6) y (7), vemos que, si $N>0$, (5) representa una elipse; de (6), si $N=0$, (5) representa el punto único

$$\left(-\frac{D}{2A},\ -\frac{E}{2C}\right),$$

llamado usualmente una elipse punto, y si $N<0$, la ecuación (6) muestra que (5) no representa ningún lugar geométrico real.

Una discusión semejante se aplica a la otra forma de la segunda ecuación ordinaria de la elipse. Por tanto, tenemos el siguiente

TEOREMA 3. *Si los coeficientes* A *y* C *son del mismo signo, la ecuación*

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

representa una elipse de ejes paralelos a los coordenados, o bien un punto, o no representa ningún lugar geométrico real.

Ejemplo 2. La ecuación de una elipse es $x^2+4y^2+2x-12y+6=0$. Reducir esta ecuación a la forma ordinaria y determinar las coordenadas del centro, de los vértices y de los focos; calcular las longitudes del eje mayor, del eje menor, de cada lado recto y la excentricidad.

Solución. Vamos a reducir la ecuación dada a la forma ordinaria, completando los cuadrados. Resulta:

$$(x^2+2x)+4(y^2-3y)=-6$$

y

$$(x^2+2x+1)+4(y^2-3y+\tfrac{9}{4})=-6+1+9,$$

de donde, $$(x+1)^2+4(y-\tfrac{3}{2})^2=4,$$

de manera que la forma ordinaria es

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-\frac{3}{2})^2}{1}=1.$$

Las coordenadas del centro C son, evidentemente, $(-1,\ \frac{3}{2})$, y el eje focal es paralelo al eje X. Como $a^2=4$, $a=2$, y las coordenadas de los vértices V y V'

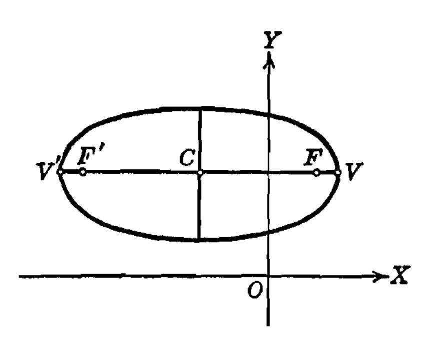


Fig. 91

son $(-1+2,\ \frac{3}{2})$ y $(-1-2,\ \frac{3}{2})$, o sea, $(1,\ \frac{3}{2})$ y $(-3,\ \frac{3}{2})$, respectivamente. Como $c^2=a^2-b^2$, resulta, $c=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$, y las coordenadas de los focos F y F' son $(-1+\sqrt{3},\ \frac{3}{2})$ y $(-1-\sqrt{3},\ \frac{3}{2})$, respectivamente. La longitud del eje mayor es $2a=4$, la del eje menor es $2b=2$, y la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot 1}{2}=1$. La excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. El lugar geométrico está representado en la figura 91.

EJERCICIOS. Grupo 28

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Deducir y discutir la ecuación ordinaria $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$.

2. Por transformación de coordenadas, reducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria a las dos formas correspondientes de la primera ecuación ordinaria de la elipse.

3. Si la ecuación de una elipse viene dada en la forma

$$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2,$$

demostrar que las coordenadas de sus vértices son $(h+a,\ k)$, $(h-a\ \ k)$, y que las coordenadas de sus focos son $(h+c,\ k)$, $(h-c,\ k)$, en donde, $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

4. Usar la primera ecuación de la elipse para deducir la siguiente propiedad geométrica intrínseca de la elipse: Si O es el centro de una elipse cuyos semiejes

mayor y menor son de longitudes a y b, respectivamente, y Q es el pie de la perpendicular trazada desde cualquier punto P de la elipse a su eje focal, entonces

$$\frac{\overline{OQ}^2}{a^2} + \frac{\overline{PQ}^2}{b^2} = 1.$$

5. Aplicando la propiedad intrínseca de la elipse, establecida en el ejercicio 4, deducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria de la elipse.

6. Los vértices de una elipse son los puntos $(1, 1)$ y $(7, 1)$ y su excentricidad es $\frac{1}{3}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y las longitudes de sus ejes mayor y menor y de cada lado recto.

7. Los focos de una elipse son los puntos $(-4, -2)$ y $(-4, -6)$, y la longitud de cada lado recto es 6. Hállese la ecuación de la elipse y su excentricidad.

8. Los vértices de una elipse son los puntos $(1, -6)$ y $(9, -6)$ y la longitud de cada lado recto es $\frac{9}{2}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

9. Los focos de una elipse son los puntos $(3, 8)$ y $(3, 2)$, y la longitud de su eje menor es 8. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus vértices y su excentricidad.

10. El centro de una elipse es el punto $(-2, -1)$ y uno de sus vértices es el punto $(3, -1)$. Si la longitud de cada lado recto es 4, hállese la ecuación de la elipse, su excentricidad y las coordenadas de sus focos.

11. El centro de una elipse es el punto $(2, -4)$ y el vértice y el foco de un mismo lado del centro son los puntos $(-2, -4)$ y $(-1, -4)$, respectivamente. Hallar la ecuación de la elipse, su excentricidad, la longitud de su eje menor y la de cada lado recto.

12. Discutir la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando A y C son ambos positivos y $D = E = 0$.

En cada uno de los ejercicios 13-16, reducir la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de una elipse, y determínense las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, y la de cada lado recto y la excentricidad.

13. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0.$
14. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0.$
15. $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0.$
16. $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0.$

17. Resolver el ejemplo 2 del Artículo 62 trasladando los ejes coordenados.

18. Resolver el ejercicio 16 por traslación de los ejes coordenados.

19. Si el centro de una elipse no está en el origen, y sus ejes son paralelos a los coordenados, demuéstrese que la ecuación de la elipse puede estar completamente determinada siempre que se conozcan las coordenadas de cuatro de sus puntos.

20. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los cuatro puntos $(1, 3)$, $(-1, 4)$, $\left(0, 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $(-3, 3)$ y tiene sus ejes paralelos a los coordenados.

21. Hallar la ecuación de la familia de elipses que tienen un centro común $(2, 3)$, un eje focal común paralelo al eje X, y la misma excentricidad igual

a $\frac{1}{2}$. Dibujar tres elementos de la familia asignando tres valores diferentes al parámetro.

22. La ecuación de una familia de elipses es $4x^2 + 9y^2 + ax + by - 11 = 0$. Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(5, 1)$.

23. La ecuación de una familia de elipses es $kx^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$. Hallar las ecuaciones de aquellos elementos de la familia que tienen una excentricidad igual a $\frac{1}{2}$.

24. Hallar las longitudes de los radios vectores del punto $(2, 1)$ de la elipse $9x^2 + y^2 - 18x - 2y + 1 = 0$.

25. El punto medio de una cuerda de la elipse $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$ es el punto $(5, 2)$. Hallar la ecuación de la cuerda.

26. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual al doble de su distancia del punto $(3, 2)$.

27. Desde cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje X. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares. Trazar el lugar geométrico.

28. Desde cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje Y. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares. Trazar el lugar geométrico.

29. La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus extremos los puntos $(0, 0)$ y $(6, 0)$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto que se mueve de manera que el producto de las tangentes de los ángulos de las bases es siempre igual a 4.

30. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia que se mantiene tangente a las circunferencias $x^2+y^2-4y-12=0$ y $x^2 + y^2 = 1$. (Dos soluciones.)

63. Propiedades de la elipse. Muchas de las propiedades más importantes de la elipse están asociadas con sus tangentes. Como la ecuación de una elipse es de segundo grado, sus tangentes pueden determinarse empleando la condición para la tangencia estudiada en el Artículo 44. El procedimiento para la resolución de problemas relativos a tangentes a la elipse es, por lo tanto, idéntico al usado para la circunferencia (Art. 45) y la parábola (Art. 57). Por esto, se deja como ejercicio el demostrar los teoremas 4 y 5 que enunciamos a continuación:

TEOREMA 4. *La tangente a la elipse* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *en cualquier punto* $P_1(x_1, y_1)$ *de la curva tiene por ecuación*

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2.$$

TEOREMA 5. *Las ecuaciones de las tangentes de pendiente* m *a la elipse* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *son*

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Una importante propiedad focal de la elipse está basada en el siguiente teorema :

TEOREMA 6. *La normal a una elipse en uno cualquiera de sus puntos es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de ese punto.*

DEMOSTRACIÓN. El teorema no pierde generalidad tomando la ecuación de la elipse en su forma canónica

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \qquad (1)$$

En este caso, sea n (fig. 92) la normal a la elipse en un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ de la curva. Sea α el ángulo formado por n y el radio vector FP_1, y β el formado por n y el radio vector $F'P_1$. Vamos a demostrar que $\alpha = \beta$.

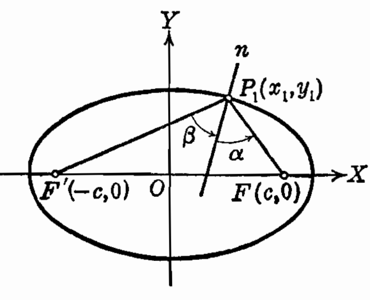


Fig. 92

Por el teorema 4 anterior, la pendiente de la elipse en $P_1(x_1, y_1)$ es $-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$, de manera que la pendiente de la normal n es $\dfrac{a^2y_1}{b^2x_1}$. Las pendientes de los radios vectores FP_1 y $F'P_1$ son $\dfrac{y_1}{x_1 - c}$ y $\dfrac{y_1}{x_1 + c}$, respectivamente. Entonces, por el teorema 5, Artículo 10, resulta :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dfrac{y_1}{x_1 - c} - \dfrac{a^2y_1}{b^2x_1}}{1 + \left(\dfrac{y_1}{x_1 - c}\right)\left(\dfrac{a^2y_1}{b^2x_1}\right)} = \frac{b^2x_1y_1 - a^2x_1y_1 + a^2cy_1}{b^2x_1^2 - b^2cx_1 + a^2y_1^2}.$$

Como el punto P_1 está sobre la elipse, sus coordenadas (x_1, y_1) satisfacen la ecuación (1), es decir,

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2.$$

Usando esta relación y la relación $c^2 = a^2 - b^2$, tenemos :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_1y_1(b^2 - a^2) + a^2cy_1}{a^2b^2 - b^2cx_1} = \frac{-c^2x_1y_1 + a^2cy_1}{b^2(a^2 - cx_1)}$$

$$= \frac{cy_1(-cx_1 + a^2)}{b^2(-cx_1 + a^2)} = \frac{cy_1}{b^2}.$$

Análogamente, tenemos

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\dfrac{a^2 y_1}{b^2 x_1} - \dfrac{y_1}{x_1 + c}}{1 + \left(\dfrac{a^2 y_1}{b^2 x_1}\right)\left(\dfrac{y_1}{x_1 + c}\right)} = \frac{a^2 x_1 y_1 + a^2 c y_1 - b^2 x_1 y_1}{b^2 x_1{}^2 + b^2 c x_1 + a^2 y_1{}^2}$$

$$= \frac{x_1 y_1 (a^2 - b^2) + a^2 c y_1}{a^2 b^2 + b^2 c x_1} = \frac{c^2 x_1 y_1 + a^2 c y_1}{b^2 (a^2 + c x_1)}$$

$$= \frac{c y_1 (c x_1 + a^2)}{b^2 (c x_1 + a^2)} = \frac{c y_1}{b^2}.$$

Por tanto, como $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, $\alpha = \beta$.

Aplicando la ley de la reflexión (Art. 59), el teorema 6 es evidente. En efecto, consideremos una superficie de reflexión que tenga como sección recta una elipse; supongamos que se coloca un foco luminoso en el foco F de la elipse, y que un rayo incide sobre la elipse en el punto P_1. Entonces este rayo será reflejado de tal manera que el ángulo de reflexión β sea igual al ángulo de incidencia α. Pero, por el teorema 6, tal rayo reflejado pasará por el otro foco F'. Luego los rayos de un foco luminoso colocado en un foco de la elipse al incidir sobre la curva se reflejan de manera que pasan por el otro foco. Como las ondas sonoras se reflejan como las luminosas. los sonidos originados en uno de los focos pueden ser oídos claramente en el otro foco y ser inaudibles en los puntos intermedios. Este es el principio en que se basa la construcción de las cámaras secretas.

Vamos a mencionar brevemente algunas otras aplicaciones de la elipse. Los arcos usados en la construcción tienen, frecuentemente, la forma de arcos elípticos. En ciertos tipos de máquinas se usan engranes elípticos. Algunas partes estructurales de metal se construyen de sección recta elíptica. Es también interesante notar que los planetas en su recorrido alrededor del Sol se mueven en órbitas elípticas en las cuales el Sol ocupa uno de los focos.

EJERCICIOS. Grupo 29

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar el teorema 4 del Artículo 63.

2. Demostrar el teorema 5 del Artículo 63.

3. Demostrar el siguiente teorema como corolario al teorema 4 del Artículo 63: La ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ es $x_1 x + y_1 y = a^2$. (Véase el ejercicio 10 del grupo 18, Artículo 45.)

4. Demostrar el siguiente teorema como corolario al teorema 5 del Artículo 63: Las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ son } y = mx \pm a\sqrt{m^2+1}.$$

(Véase el ejercicio 16 del grupo 18, Art. 45.)

5. Demostrar que la ecuación de la tangente a la elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$, en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ es $a^2x_1x + b^2y_1y = a^2b^2$.

En cada uno de los ejercicios 6 y 7 hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para la elipse y punto de contacto dados.

6. $2x^2 + 3y^2 = 5$; $(1, -1)$.

7. $4x^2 + 2y^2 - 7x + y - 5 = 0$; $(2, 1)$.

8. Hallar las ecuaciones de las tangentes de pendiente 2 a la elipse $4x^2 + 5y^2 = 8$.

9. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse $3x^2+y^2+4x-2y-3=0$ que son perpendiculares a la recta $x + y - 5 = 0$.

10. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(3, -1)$ a la elipse $2x^2 + 3y^2 + x - y - 5 = 0$.

11. Con referencia a la elipse $x^2 + 3y^2 + 3x - 4y - 3 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $5x + 2y + k = 0$:

a) cortan a la elipse en dos puntos diferentes;

b) son tangentes a la elipse;

c) no cortan a la elipse.

12. Hallar el ángulo agudo de intersección de las elipses $3x^2 + 4y^2 = 43$ y $4x^2 + y^2 - 32x + 56 = 0$ en uno de sus dos puntos de intersección.

13. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la elipse $b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$ son $y - k = m(x-h) \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$.

14. Demostrar que la ecuación de la normal a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$ es $a^2y_1x - b^2x_1y - a^2x_1y_1 + b^2x_1y_1 = 0$.

15. Se tienen como datos una elipse y sus focos. Por medio del teorema 6 (Art. 63) demostrar un procedimiento para construir la tangente y la normal en cualquier punto de la elipse.

16. Demostrar que si cualquier normal a la elipse, excepto sus ejes, pasa por su centro, la elipse es una circunferencia.

17. Demostrar que las tangentes a una elipse trazadas en los extremos de un diámetro son paralelas entre sí.

18. Demostrar que la pendiente de una elipse en cualquiera de los puntos extremos de uno de sus lados rectos es numéricamente igual a su excentricidad.

19. Demostrar que el producto de las distancias de los focos de una elipse a cualquier tangente es constante e igual al cuadrado de la longitud del semieje menor.

20. Por el punto $(2, 7)$ se trazan tangentes a la elipse

$$2x^2 + y^2 + 2x - 3y - 2 = 0.$$

Hallar las coordenadas de los puntos de contacto.

21. Si desde un punto exterior P_1 se trazan tangentes a una elipse, el segmento de recta que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto* de P_1 para esa elipse. (Véase el ejercicio 27 del grupo 25, Art. 57.) Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto exterior a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, demuéstrese que la ecuación de la cuerda de contacto de P_1 es $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$. (Véase el teorema 4 del Art. 63.)

22. Hallar la ecuación de la cuerda de contacto del punto (3, 1) para la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$.

23. Demostrar que la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de cualquier sistema de cuerdas paralelas de pendiente m de la elipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ es } y = -\frac{b^2}{a^2m}x, \quad m \neq 0.$$

Obsérvese que el lugar geométrico es una recta que pasa por el centro y, por tanto, es un *diámetro* de la elipse. (Véase el ejercicio 29 del grupo 25, Art. 57.)

24. Establecer y demostrar un teorema para la circunferencia que sea análogo al teorema dado en el ejercicio 23 para la elipse.

25. Demostrar que si un diámetro de una elipse biseca todas las cuerdas paralelas a otro diámetro, el segundo diámetro biseca a todas las cuerdas paralelas al primero. Tales diámetros se llaman *diámetros conjugados* de la elipse.

CAPITULO VIII

LA HIPERBOLA

64. Definiciones. Una *hipérbola* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados *focos*, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

La definición de la hipérbola excluye el caso en que el punto móvil se mueva sobre la recta que pasa por los focos a excepción del segmento

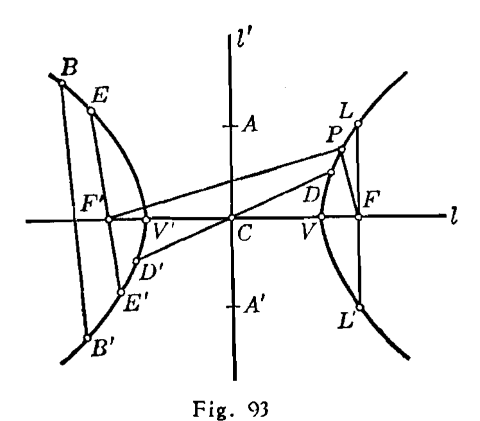


Fig. 93

comprendido entre ellos. Los focos y el punto medio de este segmento no pueden pertenecer al lugar geométrico.

El lector debe observar la estrecha analogía que existe entre las definiciones de la hipérbola y elipse. La analogía entre estas dos curvas se encontrará frecuentemente a medida que avancemos en nuestro estudio de la hipérbola.

En el artículo siguiente veremos que la hipérbola consta de dos ramas diferentes, cada una de longitud infinita. En la figura 93 se ha

dibujado una porción de cada una de estas ramas; los focos están designados por F y F'. La recta l que pasa por los focos tiene varios nombres; como para la elipse creemos conveniente introducir el término *eje focal* para designar esta recta. El eje focal corta a la hipérbola en dos puntos, V y V', llamados *vértices*. La porción del eje focal comprendido entre los vértices, el segmento VV', se llama *eje transverso*. El punto medio C del eje transverso se llama *centro*. La recta l' que pasa por C y es perpendicular al eje focal l tiene varios nombres; nosotros, como lo hicimos para la elipse, consideramos conveniente introducir el término *eje normal* para esta recta. El eje normal l' no corta a la hipérbola; sin embargo, una porción definida de este eje, el segmento AA' en la figura 93, que tiene C por punto medio, se llama *eje conjugado*. La longitud del eje conjugado se dará en el siguiente artículo. El segmento que une dos puntos diferentes cualesquiera de la hipérbola se llama *cuerda;* estos puntos pueden ser ambos de la misma rama, como para la cuerda BB', o uno de una rama y el otro de la otra, como para el eje transverso VV'. En particular, una cuerda que pasa por un foco, tal como EE' se llama *cuerda focal* Una cuerda focal, tal como LL', perpendicular al eje focal l se llama *lado recto;* evidentemente, por tener dos focos, la hipérbola tiene dos lados rectos. Una cuerda que pasa por C, tal como DD', se llama *diámetro*. Si P es un punto cualquiera de la hipérbola, los segmentos FP y $F'P$ que unen los focos con el punto P se llaman *radios vectores* de P.

65. Primera ecuación ordinaria de la hipérbola. Consideremos la hipérbola de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje X (fig. 94). Los focos F y F' están entonces sobre el eje X. Como el centro O es el punto medio del segmento FF', las coordenadas de F y F' serán $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente, siendo c una constante positiva. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola. Entonces, por la definición de la hipérbola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica siguiente, que expresa que el valor absoluto de la diferencia de las distancias del punto a los focos es una cantidad constante,

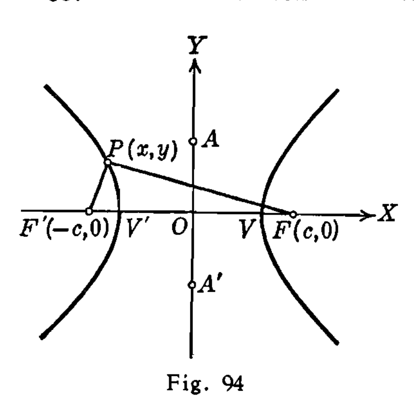


Fig. 94

$$\left| |\overline{FP}| - |\overline{F'P}| \right| = 2a, \qquad (1)$$

en donde a es una constante positiva y $2a < 2c$. La condición geométrica (1) es equivalente a las dos relaciones,

$$|\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = 2a, \qquad (2)$$

$$|\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = -2a. \qquad (3)$$

La relación (2) es verdadera cuando P está sobre la rama izquierda de la hipérbola; la relación (3) se verifica cuando P está sobre la rama derecha.

Por el teorema 2, Artículo 6, tenemos

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

de manera que la condición geométrica (1) está expresada analíticamente por

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a, \qquad (4)$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -2a, \qquad (5)$$

correspondiendo las ecuaciones (4) y (5) a las relaciones (2) y (3), respectivamente.

Por el mismo procedimiento usado al transformar y simplificar la ecuación (2) del Artículo 61 para la elipse, podemos demostrar que las ecuaciones (4) y (5) se reducen cada una a

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \qquad (6)$$

Por ser $c > a$, $c^2 - a^2$ es un número positivo que podemos designar por b^2. Por tanto, sustituyendo en la ecuación (6) la relación

$$b^2 = c^2 - a^2, \qquad (7)$$

obtenemos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

que puede escribirse en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (8)$$

Podemos demostrar recíprocamente, que si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (8), entonces P_1 satisface la condición geométrica (1) y, por lo tanto, está sobre la hipérbola. Luego la ecuación (8) es la ecuación de la hipérbola.

Estudiemos ahora la ecuación (8) de acuerdo con el Artículo 19. Las intersecciones con el eje X son a y $-a$. Por tanto, las coordenadas de los vértices V y V son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, respectiva-

mente, y la longitud del eje transverso es igual a $2a$, que es la constante que interviene en la definición. Aunque no hay intersecciones con el eje Y, dos puntos, $A(0, b)$ y $A'(0, -b)$, se toman como extremos del eje conjugado. Por tanto, la longitud del eje conjugado es igual a $2b$.

La ecuación (8) muestra que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y al origen.

Despejando y de la ecuación (8), resulta:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (9)$$

Por tanto, para que los valores de y sean reales, x está restringida a variar dentro de los intervalos $x \geq a$ y $x \leq -a$. De aquí que ninguna porción del lugar geométrico aparece en la región comprendida entre las rectas $x = a$ y $x = -a$.

Despejando x de la ecuación (8) se obtiene

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}, \qquad (10)$$

de la cual vemos que x es real para todos los valores reales de y.

Según esto, las ecuaciones (9) y (10), juntas, con la simetría del lugar geométrico, muestran que la hipérbola no es una curva cerrada sino que consta de dos ramas diferentes, una de las cuales se extiende indefinidamente hacia la derecha, arriba y abajo del eje X, y la otra se extiende indefinidamente hacia la izquierda y por arriba y abajo del eje X.

La hipérbola (8) no tiene asíntotas verticales ni horizontales. En el siguiente artículo demostraremos, sin embargo, que la curva tiene dos asíntotas oblicuas.

De la ecuación (9) y de la relación (7), hallamos que la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$.

Como para la elipse, la excentricidad e de una hipérbola está definida por la razón $\frac{c}{a}$. Por tanto, de (7), tenemos

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \qquad (11)$$

Como $c > a$, *la excentricidad de una hipérbola es mayor que la unidad*.

Si el centro de la hipérbola está en el origen pero su eje focal coincide con el eje Y, hallamos, análogamente, que la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \qquad (12)$$

La discusión completa de la ecuación (12) se deja al estudiante.

Las ecuaciones (8) y (12) las llamaremos *primera ecuación ordinaria de la hipérbola*. Son las más simples de esta curva por lo que nos referiremos a ellas como formas canónicas.

Los resultados precedentes se resumen en el siguiente

TEOREMA 1. *La ecuación de la hipérbola de centro en el origen, eje focal coincidente con el eje* X, *y focos los puntos* (c, 0) *y* (− c, 0), *es*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje focal coincide con el eje Y, *de manera que las coordenadas de los focos sean* (0, c) *y* (0, − c), *entonces la ecuación es*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Para cada hipérbola, a *es la longitud del semieje transverso*, b *la del semieje conjugado*, c *la distancia del centro a cada foco*, *y* a, b, c *están ligadas por la relación*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $\frac{2b^2}{a}$, *y la excentricidad* e *está dada por la relación*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

NOTA. La posición de una elipse con relación a los ejes coordenados puede determinarse como se indicó en la nota del teorema 1 del Artículo 61. Este método no es aplicable a la hipérbola, ya que podemos tener $a > b$, $a < b$ o $a = b$. La posición de la hipérbola se determina por los *signos* de los coeficientes de las variables en la forma canónica de su ecuación. La variable de coeficiente positivo corresponde al eje coordenado que contiene al eje transverso de la hipérbola.

Ejemplo. Los vértices de una hipérbola son los puntos $V(0, 3)$ y $V'(0, -3)$, y sus focos los puntos $F(0, 5)$ y $F'(0, -5)$. Hallar la ecuación de la hipérbola, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, su excentricidad y la longitud de cada lado recto.

Solución. Como los vértices y los focos están sobre el eje Y, el eje focal coincide con el eje Y. Además, el punto medio del eje transverso está, evidentemente, en el origen. Por tanto, por el teorema 1, la ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

La distancia entre los vértices es $2a = 6$, longitud del eje transverso. La distancia entre los focos es $2c = 10$. Por tanto, $a = 3$ y $c = 5$, de donde

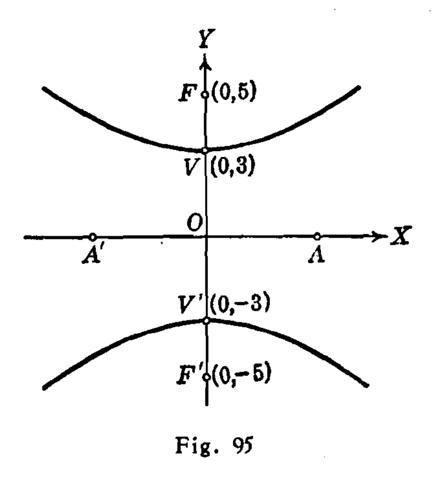


Fig. 95

$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$. Por lo tanto, $b = 4$, y la longitud del eje conjugado es $2b = 8$. La ecuación de la hipérbola es entonces

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$, y la longitud de cada lado recto e $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 16}{3} = \frac{32}{3}$.

El lugar geométrico está representado en la figura 95, en donde el eje conjugado está indicado por el segmento AA' del eje X.

EJERCICIOS. Grupo 30

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar que las ecuaciones (4) y (5) del Artículo 65 se reducen cada una a la ecuación (6).

2. Demostrar que si P_1 es un punto cualquiera cuyas coordenadas (x_1, y_1) satisfacen la ecuación $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, entonces P_1 está sobre la hipérbola representada por esta ecuación.

3. Deducir la ecuación ordinaria $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ a partir de la definición de hipérbola.

4. Desarrollar una discusión completa de la ecuación ordinaria

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

5. Demostrar un procedimiento para obtener, con escuadras y compás, puntos de una hipérbola, dados los focos y la longitud de su eje transverso.

En cada uno de los ejercicios 6-9, para la ecuación dada de la hipérbola, hállense las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, la excentricidad y la longitud de cada lado recto. Trácese y discútase el lugar geométrico.

6. $9x^2 - 4y^2 = 36$.

7. $4x^2 - 9y^2 = 36$.

8. $9y^2 - 4x^2 = 36$.

9. $x^2 - 4y^2 = 4$.

10. Los vértices de una hiperbola son los puntos $V(2, 0)$, $V'(-2, 0)$, y sus focos son los puntos $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$. Hallar su ecuación y su excentricidad.

11. El centro de una hipérbola está en el origen, y su eje transverso está sobre el eje Y. Si un foco es el punto $(0, 5)$ y la excentricidad es igual a 3, hállese la ecuación de la hipérbola y la longitud de cada lado recto.

12. Los extremos del eje conjugado de una hipérbola son los puntos $(0, 3)$ y $(0, -3)$, y la longitud de cada lado recto es 6. Hallar la ecuación de la hipérbola y su excentricidad.

13. Los vértices de una hipérbola son $(0, 4)$, $(0, -4)$, y su excentricidad es igual a $\frac{3}{2}$. Hallar la ecuación de la hipérbola y las coordenadas de sus focos.

14. Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje transverso sobre el eje X. Hallar su ecuación sabiendo que su excentricidad es $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ y que la curva pasa por el punto $(2, 1)$.

15. Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje conjugado está sobre el eje X. La longitud de cada lado recto es $\frac{2}{3}$, y la hipérbola pasa por el punto $(-1, 2)$. Hallar su ecuación.

16. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(7, 6)$, tiene su centro en el origen y el eje transverso coincide con el eje X.

En cada uno de los ejercicios 17-19, usando la definición de hipérbola, hallar la ecuación de dicha curva a partir de los datos dados. Mediante un cambio de coordenadas, poner la ecuación en la primera forma ordinaria.

17. Focos $(-7, 3)$, $(-1, 3)$; longitud del eje transverso $= 4$.

18. Vértices $(1, 4)$, $(5, 4)$: longitud del lado recto $= 5$.

19. Vértices $(3, 4)$, $(3, -2)$; excentricidad $= 2$.

20. Demostrar que la longitud del eje conjugado de una hipérbola es media proporcional entre las longitudes de su eje transverso y su lado recto.

21. Si k es un número cualquiera diferente de cero, demostrar que la ecuación $3x^2 - 3y^2 = k$ representa una familia de hipérbolas de excentricidad igual a $\sqrt{2}$.

22. Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto cualquiera de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que las longitudes de sus radios vectores son $|ex_1 + a|$ y $|ex_1 - a|$.

23. Hallar las longitudes de los radios vectores del punto (6, 5) de la hipérbola $5x^2 - 4y^2 = 80$.

24. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto (6, 0) es siempre igual al doble de su distancia de la recta $2x - 3 = 0$.

25. La base de un triángulo es de longitud fija siendo sus puntos extremos (3, 0) y (− 3, 0). Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto si el producto de las pendientes de los lados variables es siempre igual a 4. Trazar el lugar geométrico.

66. Asíntotas de la hipérbola. Si de la forma canónica de la ecuación de la hipérbola

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \qquad (1)$$

despejamos y, obtenemos

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

que puede escribirse en la forma

$$y = \pm \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}. \qquad (2)$$

Frecuentemente se desea investigar lo que ocurre en una ecuación cuando una de las variables aumenta numéricamente sin límite. (Ver nota 3, Art. 18.) Si un punto de la hipérbola (1) se mueve a lo largo de la curva, de manera que su abscisa x aumenta numéricamente sin límite, el radical del segundo miembro de (2) se aproxima más y más a la unidad, y la ecuación tiende a la forma

$$y = \pm \frac{b}{a}x. \qquad (3)$$

Como la ecuación (3) representa las rectas $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$, esto nos conduce a inferir, de la definición de asíntota (Art. 18), que la hipérbola es asíntota a estas dos rectas. Ahora demostraremos que esta deducción es correcta.

Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera de la parte superior de la rama derecha de la hipérbola (1), como se indica en la figura 96. La ecuación de la recta $y = \frac{b}{a}x$ puede escribirse en la forma

$$bx - ay = 0. \qquad (4)$$

Por el teorema 9 del Artículo 33, la distancia d de la recta (4) al punto $P_1(x_1, y_1)$ está dada por

$$d = \frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{b^2 + a^2}}. \qquad (5)$$

Si multiplicamos numerador y denominador del segundo miembro de (5) por $|bx_1 + ay_1|$, obtenemos

$$d = \frac{|b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2|}{\sqrt{b^2 + a^2}\,|bx_1 + ay_1|}. \qquad (6)$$

Pero como P_1 está sobre la hipérbola (1), $b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2$, de manera que la ecuación (6) puede escribirse en la forma

$$d = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}\,|bx_1 + ay_1|}. \qquad (7)$$

Si P_1 se mueve hacia la derecha a lo largo de la curva y se aleja indefinidamente del origen, sus coordenadas, x_1 y y_1, aumentan ambas

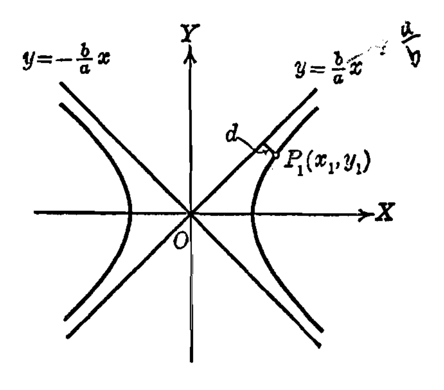


Fig. 96

de valor sin límite, de manera que, por la ecuación (7), d decrece continuamente y se aproxima a cero. Se sigue, de acuerdo con esto, por la definición de asíntota (Art. 18), que la recta (4) es una asíntota de la rama derecha de la hipérbola (1).

Si P_1 está sobre la parte inferior de la rama izquierda de la hipérbola (1) y se mueve hacia la izquierda a lo largo de la curva alejándose indefinidamente del origen, entonces sus coordenadas x_1 y y_1 aumentan de valor ambas sin límite en la dirección negativa. La ecuación (7) muestra entonces que d decrece continuamente y tiende a cero, de donde se sigue que la recta (4) es también una asíntota de la rama izquierda de la hipérbola (1).

Quedan dos casos por considerar que son, cuando P_1 está sobre la parte inferior de la rama derecha y cuando está sobre la parte superior de la rama izquierda. Empleando el mismo razonamiento que en los dos párrafos anteriores, podemos demostrar que la recta $bx + ay = 0$ es una asíntota de ambas ramas de la hipérbola (1).

Estos resultados se resumen en el siguiente:

TEOREMA 2. *La hipérbola* $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, *tiene por asíntotas las rectas* $bx - ay = 0$ y $bx + ay = 0$.

NOTAS. 1. Si la ecuación de una hipérbola está en su forma canónica, las ecuaciones de sus asíntotas pueden obtenerse reemplazando el término constante por cero y factorizando el primer miembro. Así, para la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$, tenemos $9x^2 - 4y^2 = 0$, de donde, $(3x + 2y)(3x - 2y) = 0$, y las ecuaciones de las asíntotas son $3x + 2y = 0$ y $3x - 2y = 0$.

2. La gráfica de una hipérbola puede esbozarse muy fácilmente trazando sus vértices y sus asíntotas. Las asíntotas actúan en la gráfica como *líneas guía* (ver nota 4, Art. 18).

Ejemplo. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (6, 2) tiene su centro en el origen, su eje transverso está sobre el eje X, y una de sus asíntotas es la recta $2x - 5y = 0$.

Solución. Por el teorema 2 anterior, la otra asíntota es la recta $2x + 5y = 0$. Las ecuaciones de ambas asíntotas pueden obtenerse haciendo k igual a cero en la ecuación

$$(2x - 5y)(2x + 5y) = k,$$

o sea,

$$4x^2 - 25y^2 = k.$$

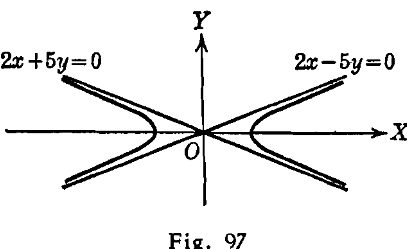


Fig. 97

Como la hipérbola buscada debe pasar por el punto (6, 2), las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación de la hipérbola. Por tanto, si hacemos $x = 6$ y $y = 2$ en la última ecuación, hallamos $k = 44$, y la ecuación de la hipérbola que se busca es

$$4x^2 - 25y^2 = 44.$$

La gráfica es la figura 97.

67. Hipérbola equilátera o rectangular. Consideremos la hipérbola especial cuyos ejes transverso y conjugado son de igual longitud. Entonces $a = b$, y la ecuación $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ toma la forma más sencilla

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (1)$$

Debido a la igualdad de sus ejes, la hipérbola (1) se llama *hipérbola equilátera*.

Por el teorema 2 del Artículo 66, las asíntotas de la hipérbola equilátera (1) son las rectas $x - y = 0$ y $x + y = 0$. Como estas rectas son perpendiculares, resulta que las asíntotas de una hipérbola equilátera son perpendiculares entre sí. Por esta razón la hipérbola equilátera se llama también *hipérbola rectangular*. Es un ejercicio fácil demostrar que, recíprocamente, una hipérbola rectangular es también equilátera.

Una forma particularmente simple y útil de la ecuación de la hipérbola equilátera es

$$xy = k, \tag{2}$$

en donde k es una constante cualquiera diferente de cero. Aplicando los métodos del Artículo 18, podemos demostrar que la curva (2) tiene por asíntotas a los ejes coordenados, y que, si k es positivo la gráfica es como se ve en la figura 98. El estudiante debe demostrar que si se giran los ejes coordenados un ángulo de 45°, la ecuación (2) se transforma en $x'^2 - y'^2 = 2k$, que es la ecuación de una hipérbola equilátera.

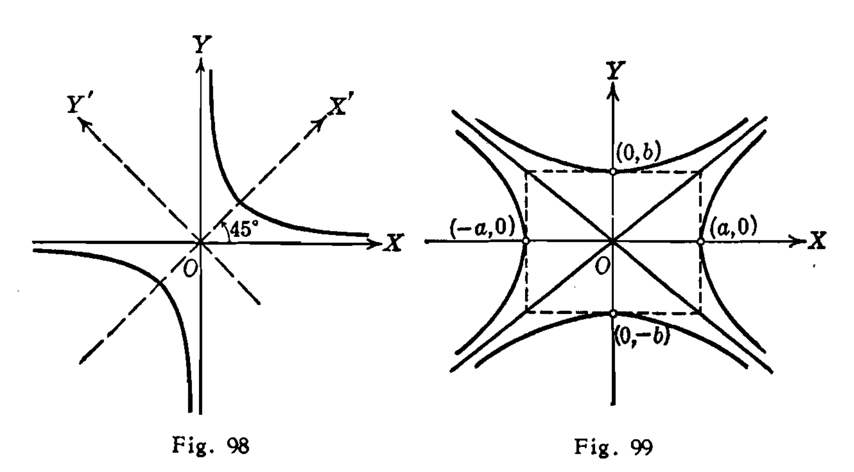


Fig. 98 Fig. 99

68. Hipérbolas conjugadas. Si dos hipérbolas son tales que el eje transverso de cada una es idéntico al eje conjugado de la otra, se llaman *hipérbolas conjugadas*. Cada hipérbola es entonces la *hipérbola conjugada* de la otra, y también se dice que cada hipérbola es *conjugada* con respecto a la otra.

Si la ecuación de una hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

entonces, de acuerdo con la definición, la hipérbola conjugada de (1) tiene por ecuación

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \qquad (2)$$

Evidentemente, la ecuación (2) puede obtenerse de la ecuación (1) cambiando simplemente el signo de uno de los miembros de (1). Así, si la ecuación de una hipérbola es $2x^2 - 7y^2 = 18$, entonces la ecuación de su hipérbola conjugada es $7y^2 - 2x^2 = 18$.

El par de hipérbolas conjugadas (1) y (2), junto con sus asíntotas, se han trazado en la figura 99. Es un ejercicio sencillo demostrar que un par de hipérbolas conjugadas tienen un centro común, un par común de asíntotas, y todos sus focos equidistan del centro.

El estudiante debe observar el rectángulo dibujado en la figura 99. Un bosquejo aproximado de un par de hipérbolas conjugadas pueden obtenerse fácilmente construyendo primero este rectángulo, ya que sus diagonales son las asíntotas.

EJERCICIOS. Grupo 31

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Si el punto $P_1(x_1, y_1)$ está sobre la parte inferior de la rama derecha de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que la recta $bx + ay = 0$ es una asíntota de la rama derecha.

2. Si el punto $P_1(x_1, y_1)$ está sobre la parte superior de la rama izquierda de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que la recta $bx + ay = 0$ es una asíntota de la rama izquierda.

3. Demostrar que la hipérbola $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$ tiene por asíntotas las rectas $by - ax = 0$ y $by + ax = 0$.

4. Hallar y trazar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola

$$4x^2 - 5y^2 = 7.$$

5. Hallar los puntos de intersección de la recta $2x - 9y + 12 = 0$ con las asíntotas de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 11$.

6. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(3, -1)$, su centro está en el origen, su eje transverso está sobre el eje X, y una de sus asíntotas es la recta

$$2x + 3\sqrt{2}y = 0.$$

7. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(2, 3)$, tiene su centro en el origen, su eje transverso está sobre el eje Y, y una de sus asíntotas es la recta $2y - \sqrt{7}x = 0$.

8. Hallar la distancia del foco de la derecha de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$ a una cualquiera de sus dos asíntotas.

9. Demostrar que si las asíntotas de una hipérbola son perpendiculares entre sí, la hipérbola es equilátera.

10. Discutir y trazar la gráfica de la ecuación $xy = -8$.

11. Demostrar que la excentricidad de toda hipérbola equilátera es igual a $\sqrt{2}$.

12. Demostrar que el producto de las distancias de cualquier punto de una hipérbola equilátera a sus asíntotas es una constante.

13. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el producto de sus distancias a dos rectas perpendiculares es siempre igual a una constante.

14. Hallar la ecuación de la hipérbola equilátera que pasa por el punto $(-1, -5)$ y tiene por asíntotas a los ejes coordenados.

15. Demostrar que la distancia de cualquier punto de una hipérbola equilátera a su centro es media proporcional entre las longitudes de los radios vectores del punto. *Sugestión*: Véase el ejercicio 22 del grupo 30, Artículo 65, y el ejercicio 11 de este grupo.

16. Hallar las coordenadas de los vértices y focos, y la excentricidad de la hipérbola que es conjugada a la que tiene por ecuación

$$9x^2 - 4y^2 = 36.$$

17. Demostrar que dos hipérbolas conjugadas tienen las mismas asíntotas.

18. Demostrar que los focos de un par de hipérbolas conjugadas están sobre una circunferencia.

19. Demostrar que si una hipérbola es equilátera, su hipérbola conjugada es también equilátera.

20. La excentricidad de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ es e_1. Si la excentricidad de su hipérbola conjugada es e_2 demostrar que $e_1 : e_2 = b : a$.

21. Si las excentricidades de dos hipérbolas conjugadas son e_1 y e_2, demostrar que $e_1^2 + e_2^2 = e_1^2 e_2^2$.

22. Demostrar que la distancia de un foco a una cualquiera de las asíntotas de una hipérbola es igual a la longitud de su semieje conjugado.

23. Si α es el ángulo agudo de inclinación de una asíntota de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que su excentricidad es igual a $\sec \alpha$.

24. Demostrar que si una recta es paralela a una asíntota de una hipérbola, corta a la curva solamente en un punto.

25. Demostrar que el producto de las distancias de cualquier punto de una hipérbola a sus asíntotas es constante.

69. Segunda ecuación ordinaria de la hipérbola. Si el centro de una hipérbola no está en el origen, pero sus ejes son paralelos a los ejes coordenados, sus ecuaciones pueden obtenerse tal como se determinaron ambas formas de la segunda ecuación ordinaria de la elipse (Art. 62). Por esto, se deja al estudiante, como ejercicio, el demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA 3. *La ecuación de una hipérbola de centro el punto* (h, k) *y eje focal paralelo al eje* X, *es de la forma*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, *su ecuación es*

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Para cada hipérbola, a *es la longitud del semieje transverso*, b *la del semieje conjugado*, c *la distancia del centro a cada uno de los focos*, *y* a, b, c *están ligadas por la relación*

$$c^2=a^2+b^2.$$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$, *y la excentricidad* e *está dada por la relación*

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1.$$

Una discusión de la segunda forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola, análoga a la discusión que para la elipse nos condujo al teorema 3 del Artículo 62, nos da el siguiente

TEOREMA 4. *Si los coeficientes* A *y* C *difieren en el signo*, *la ecuación*

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

representa una hipérbola de ejes paralelos a los coordenados, *o un par de rectas que se cortan*.

Ejemplo. Discutir el lugar geométrico de la ecuación

$$9x^2-4y^2-54x+8y+113=0. \qquad (1)$$

Solución. Vamos a reducir la ecuación (1) a la forma ordinaria completando los cuadrados. Entonces,

$$9(x^2-6x)-4(y^2-2y)=-113$$

y

$$9(x^2-6x+9)-4(y^2-2y+1)=-113+81-4,$$

de donde,

$$9(x-3)^2-4(y-1)^2=-36,$$

de manera que la forma ordinaria es

$$\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{4}=1, \qquad (2)$$

que es la ecuación de una hipérbola cuyo centro C es el punto (3, 1) y cuyo eje focal es paralelo al eje Y (fig. 100).

Como $a^2=9$, $a=3$, y las coordenadas de los vértices V y V' son $(3,\ 1+3)$ y $(3,\ 1-3)$, o sea, (3, 4) y (3, −2), respectivamente. Como $c^2=a^2+b^2$, $c=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$, y las coordenadas de los focos F y F' son

$(3,\ 1+\sqrt{13})$ y $(3,\ 1-\sqrt{13})$, respectivamente. La longitud del eje transverso es $2a = 6$, la del eje conjugado es $2b = 4$, y la de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a} = \frac{8}{3}$. La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Para obtener las ecuaciones de las asíntotas, aplicaremos el teorema 2 del Artículo 66, teniendo en cuenta que el centro de la hipérbola es el punto $(3,\ 1)$

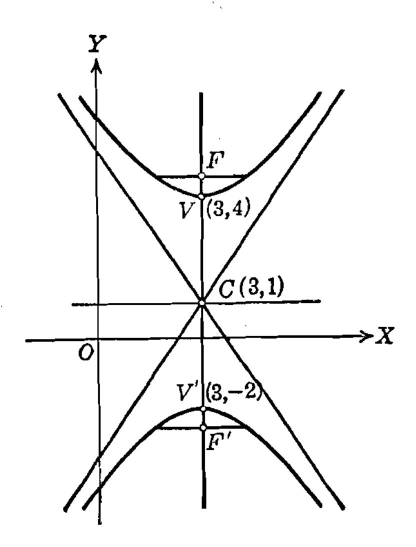


Fig. 100

y no el origen. Si los ejes coordenados son trasladados de manera que el nuevo origen sea el centro $C(3,\ 1)$, la ecuación (2) se reduce a la forma canónica

$$\frac{y'^2}{9} - \frac{x'^2}{4} = 1,$$

de modo que las ecuaciones de las asíntotas referidas a los nuevos ejes se obtienen de la relación

$$\frac{y'^2}{9} - \frac{x'^2}{4} = 0.$$

Pero esta última relación al ser referida a los ejes originales X y Y, toma la forma

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 0, \qquad (3)$$

de donde,

$$\left(\frac{y-1}{3} + \frac{x-3}{2}\right)\left(\frac{y-1}{3} - \frac{x-3}{2}\right) = 0,$$

de manera que las ecuaciones de las asíntotas referidas a los ejes originales X y Y son

$$\frac{y-1}{3} + \frac{x-3}{2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{y-1}{3} - \frac{x-3}{2} = 0$$

o sea, $$3x + 2y - 11 = 0, \quad y \quad 3x - 2y - 7 = 0.$$

El estudiante debe observar que la relación (3) puede obtenerse inmediatamente reemplazando el término constante por cero en el segundo miembro de la ecuación ordinaria (2). (Ver el ejercicio 13 del grupo 32, siguiente.)

EJERCICIOS. Grupo 32

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar el teorema 3 del Artículo 69.

2. Por transformación de coordenadas, reducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria a las dos formas correspondientes de la primera ecuación ordinaria de la hipérbola.

3. Si la ecuación de una hipérbola está dada en la forma

$$b^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2b^2,$$

demuéstrese que las coordenadas de sus vértices son $(h + a, k)$, $(h - a, k)$, y que las coordenadas de sus focos son $(h + c, k)$, $(h - c, k)$, siendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

4. Emplear la primera ecuación ordinaria de la hipérbola para deducir la siguiente propiedad geométrica intrínseca de la hipérbola: Si el punto O es el centro de una hipérbola cuyos semiejes transverso y conjugado son de longitudes a y b, respectivamente, y Q es el pie de la perpendicular trazada desde cualquier punto P de la hipérbola a su eje focal, se verifica que

$$\frac{\overline{OQ}^2}{a^2} - \frac{\overline{PQ}^2}{b^2} = 1.$$

5. Por medio de la propiedad intrínseca de la hipérbola, establecida en el ejercicio 4, deducir ambas formas de la segunda ecuación ordinaria de la hipérbola.

6. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-1, 3)$ y $(3, 3)$, y su excentricidad es $\frac{3}{2}$. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos, y las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, y de cada lado recto.

7. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-2, 2)$ y $(-2, -4)$, y la longitud de su lado recto es 2. Hallar la ecuación de la curva, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

8. El centro de una hipérbola es el punto $(2, -2)$ y uno de sus vértices el punto $(0, -2)$. Si la longitud de su lado recto es 8, hallar la ecuación de la curva, la longitud de su eje conjugado y su excentricidad.

9. Los focos de una hipérbola son los puntos $(4, -2)$ y $(4, -8)$, y la longitud de su eje transverso es 4. Hallar la ecuación de la hipérbola, la longitud de su lado recto y su excentricidad.

10. El centro de una hipérbola es el punto $(4, 5)$ y uno de sus focos es $(8, 5)$. Si la excentricidad de la hipérbola es 2, hallar su ecuación y las longitudes de sus ejes transverso y conjugado.

11. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-3, 2)$ y $(-3, -2)$, y la longitud de su eje conjugado es 6. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

12. Demostrar el teorema 4 del Artículo 69.

13. Demostrar que las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$

son $bx + ay - ak - bh = 0$ y $bx - ay + ak - bh = 0$.

En cada uno de los ejercicios 14-18, reducir la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola y determinar las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, y del lado recto, la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas.

14. $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$.

15. $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$.

16. $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$.

17. $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 29 = 0$.

18. $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0$.

19. Resolver el ejercicio 14 por traslación de los ejes coordenados.

20. Hallar el ángulo agudo de intersección de las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0$.

21. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (4, 6), tiene el eje focal paralelo al eje X, y sus asíntotas son las rectas $2x + y - 3 = 0$ y $2x - y - 1 = 0$.

22. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto (3, 2) es siempre igual al triple de su distancia a la recta $y + 1 = 0$.

23. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto (2, − 1) es siempre igual al doble de su distancia de la recta $x + 2 = 0$.

24. La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus extremos los puntos (0, 0) y (4, 0). Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto si uno de los ángulos de la base es siempre igual al doble del otro.

25. Un observador estacionado en el punto P oye el estampido de un rifle y el golpe de la bala sobre el objetivo en el mismo instante. Demostrar que el lugar geométrico de P es una hipérbola.

70. Propiedades de la hipérbola. Muchas propiedades de la hipérbola están asociadas con sus tangentes. Como la ecuación de una hipérbola es de segundo grado, sus tangentes pueden obtenerse empleando la condición para tangencia discutida en el Artículo 44. Las demostraciones de los teoremas 5 y 6, enunciados a continuación, se dejan como ejercicios al estudiante. Debe comparar estos teoremas con los análogos establecidos para la elipse (Art. 63, teoremas 4 y 5).

TEOREMA 5. *La ecuación de la tangente a la hipérbola*

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ *de la curva es*

$$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2.$$

("como" la elipse, pag 186)

TEOREMA 6. *Las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola*

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

de pendiente m *son*

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}, \quad |m| > \frac{b}{a}.$$

La hipérbola tiene una propiedad focal análoga a la de la elipse. Esta propiedad está basada en el siguiente teorema 7. La demostración es semejante a la del teorema análogo para la elipse (teorema 6, Art. 63) y, por tanto, se deja al estudiante como ejercicio.

TEOREMA 7. *La tangente a una hipérbola en cualquier punto de la curva es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de ese punto.*

Para algunos de los teoremas que figuran en el siguiente grupo de ejercicios, hay teoremas análogos sobre la elipse; esto se hace notar en cada caso recomendando al lector que compare el teorema particular con su análogo en el grupo 29 del Artículo 63. También debe observarse que si en una ecuación relativa a una elipse se sustituye la cantidad b^2 por $-b^2$, la relación análoga se verifica entonces para la hipérbola.

EJERCICIOS. Grupo 33

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar el teorema 5 del Artículo 70.
2. Demostrar el teorema 6 del Artículo 70.
3. En el teorema 6 del Artículo 70, ¿por qué la pendiente m está restringida a los valores comprendidos en el intervalo $|m| > \frac{b}{a}$? Interpretar el resultado cuando $|m| = \frac{b}{a}$.
4. Demostrar el teorema 7 del Artículo 70.

En cada uno de los ejercicios 6-8, hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para la hipérbola dada, en el punto de contacto indicado.

5. $3x^2 - y^2 = 2;\quad (1, 1).$
6. $2x^2 - 3y^2 - 6x - 4y + 12 = 0;\quad (4, 2).$
7. $3x^2 - 2y^2 + 3x - 4y - 12 = 0;\quad (2, 1).$

8. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola

$$x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$$

que son paralelas a la recta $4x - 4y + 11 = 0$.

9. Hallar el ángulo formado por las tangentes trazadas del punto (3, 6) a la hipérbola $x^2 - y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$.

10. Hallar los valores de m para los cuales las rectas de la familia $y = mx - 1$ son tangentes a la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$.

11. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la hipérbola $b^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2b^2$ son

$$y - k = m(x - h) \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}, \quad |m| > \frac{b}{a}.$$

(Ver el ejercicio 13 del grupo 29, Art. 63.)

12. Se dan una hipérbola y sus focos. Aplicando el teorema 7 del Artículo 70, demostrar un procedimiento para construir la tangente y la normal en cualquier punto de la curva.

13. Demostrar que la ecuación de la normal a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$ es $a^2y_1x + b^2x_1y - a^2x_1y_1 - b^2x_1y_1 = 0$. (Ver el ejercicio 14 del grupo 29, Art. 63.)

14. Demostrar que la elipse $2x^2 + y^2 = 10$ y la hipérbola $4y^2 - x^2 = 4$ son ortogonales entre sí en sus puntos de intersección.

15. Demostrar que la elipse $x^2 + 3y^2 = 6$ y la hipérbola $x^2 - 3y^2 = 3$ tienen los mismos focos. Tales curvas se llaman *cónicas homofocales*. Demostrar que la elipse y la hipérbola del ejercicio 14 son también homofocales.

16. Demostrar que el producto de las distancias de los focos de una hipérbola a cualquier tangente es constante e igual al cuadrado de la longitud del semieje conjugado. (Ver el ejercicio 19 del grupo 29, Art. 63.)

17. Demostrar que la pendiente de una hipérbola en cualquier extremo de cualquiera de sus lados rectos es numéricamente igual a su excentricidad. (Ver el ejercicio 18 del grupo 29, Art. 63.)

18. Demostrar que el punto de contacto de cualquier tangente a una hipérbola es el punto medio del segmento de tangente comprendido entre las asíntotas.

19. En un punto cualquiera P, excepto el vértice, de una hipérbola equilátera, se traza una normal que corta al eje focal en el punto Q. Si O es el centro de la hipérbola, demuéstrese que $|\overline{OP}| = |\overline{PQ}|$.

20. Demostrar que el triángulo formado por una tangente cualquiera a una hipérbola y sus asíntotas tiene un área constante.

21. Las tangentes en los vértices de una hipérbola cortan a otra tangente cualquiera en los puntos P y Q. Demostrar que los puntos P y Q y los focos de la hipérbola están sobre una circunferencia.

22. Si desde un punto exterior P_1, se trazan tangentes a una hipérbola, el segmento que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto* de P_1 para esa hipérbola. Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto exterior a la hipérbola

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

demuéstrese que la ecuación de la cuerda de contacto de P_1 es

$$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2.$$

(Ver el ejercicio 21 del grupo 29, Art. 63.)

23. Hallar la ecuación de la cuerda de contacto del punto $(-2, 4)$ de la hipérbola $3x^2 - 2y^2 = 3$.

24. Demostrar que la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de cualquier sistema de cuerdas paralelas de pendiente m de la hipérbola

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \text{ es } y = \frac{b^2}{a^2m}x;\quad m \neq 0,\quad m \neq \pm\frac{b}{a}.$$

Obsérvese que el lugar geométrico es una línea recta que pasa por el centro; su ecuación es, por lo tanto, la ecuación de un *diámetro* de la hipérbola. (Ver el ejercicio 23 del grupo 29, Art. 63.)

25. Demostrar que si un diámetro de una hipérbola biseca a todas las cuerdas paralelas a otro diámetro, el segundo diámetro biseca a todas las cuerdas paralelas al primero. Tales diámetros se llaman *diámetros conjugados* de la hipérbola. (Ver el ejercicio 25 del grupo 29, Art. 63.)

71. Primer resumen relativo a las secciones cónicas. La parábola, elipse e hipérbola se llaman *secciones cónicas* o, simplemente, *cónicas*. Hemos visto que si la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa un lugar geométrico real, éste debe ser una sección cónica con uno de sus ejes paralelo (o coincidente) con uno de los ejes coordenados, o bien uno de los casos excepcionales de un punto, dos rectas coincidentes, dos rectas paralelas o dos rectas que se cortan. Estos casos excepcionales se llaman también *formas límite de las cónicas* o *cónicas degeneradas*.

En el cuadro que se da a continuación, hemos indicado los resultados principales obtenidos hasta aquí. Por conveniencia nos referimos al eje único de la parábola como a su eje focal. Además, para que el cuadro quede completo, hemos indicado que la parábola tiene una excentricidad igual a la unidad; esto será establecido en el capítulo siguiente. Como la elipse y la hipérpola tienen cada una un centro, se llaman *cónicas centrales*. La parábola, no teniendo centro, se llama *cónica no central*. La circunferencia puede considerarse como un caso especial de la elipse.

En la formación del cuadro, ha sido necesario, debido al tamaño limitado de la página, restringir algunos de los datos a referencias para otras partes del libro. El estudiante debe, por lo tanto, reproducir la tabla completa en una hoja de papel suficientemente grande e incluir todos los datos dados en las referencias. Puede añadir también otros datos, como, por ejemplo, las ecuaciones de las tangentes a las cónicas.

PRIMER RESUMEN RELATIVO A LAS CÓNICAS

Curva		Parábola	Elipse	Hipérbola
Definición		Art. 54	Art. 60	Art. 64
Constantes		p = distancia del vértice al foco = distancia del vértice a la directriz Foco sobre el eje	$2a$ = longitud del eje mayor $2b$ = longitud del eje menor $2c$ = distancia entre los focos $c^2 = a^2 - b^2$ Focos sobre el eje mayor	$2a$ = longitud del eje transverso $2b$ = longitud del eje conjugado $2c$ = distancia entre los focos $c^2 = a^2 + b^2$ Focos sobre el eje transverso
Primera ecuación ordinaria Vértice de la parábola y centros de la elipse e hipérbola en el origen	Eje focal coincidente con el eje X	$y^2 = 4px$ Directriz: $x = -p$: foco $(p, 0)$ (Art. 55, teorema 1)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Focos $(c, 0)$, $(-c, 0)$ (Art. 61, teorema 1)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Focos $(c, 0)$, $(-c, 0)$ (Art. 65, teorema 1)
	Eje focal coincidente con el eje Y	$x^2 = 4py$ Directriz: $y = -p$; foco $(0, p)$ (Art. 55, teorema 1)	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ Focos $(0, c)$, $(0, -c)$ (Art. 61, teorema 1)	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ Focos $(0, c)$, $(0, -c)$ (Art. 65, teorema 1)
Segunda ecuación ordinaria Vértice de la parábola y centros de la elipse e hipérbola en el punto (h, k)	Eje focal paralelo al eje X	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ (Art. 56, teorema 2)	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (Art. 62, teorema 2)	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (Art. 69, teorema 3)
	Eje focal paralelo al eje Y	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ (Art. 56, teorema 2)	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ (Art. 62, teorema 2)	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ (Art. 69, teorema 3)
Longitud del lado recto		$4p$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
Excentricidad		$e = 1$	$e = \frac{c}{a} < 1$ (Para la circunferencia, $e = 0$)	$e = \frac{c}{a} > 1$
Ecuación general de la cónica careciendo del término en xy: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$		Ya sea $A = 0$ ó $C = 0$ (Art. 56, teorema 3)	A y C del mismo signo (Art. 62, teorema 3) Para la circunferencia, $A = C$ (Art. 40, teorema 2)	A y C de signo distinto (Art. 69, teorema 4)
Casos excepcionales		Dos rectas coincidentes; dos rectas paralelas (Ningún lugar geométrico) (Art. 56, teorema 3)	Punto (Ningún lugar geométrico) (Art. 62, teorema 3)	Dos rectas que se cortan (Art. 69, teorema 4)

CAPITULO IX

ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO

72. Introducción. En este capítulo haremos un estudio de la ecuación general de segundo grado,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (1)$$

En particular, consideraremos el caso en que la ecuación (1) contiene un término en xy, es decir, el caso en que $B \neq 0$. Demostraremos que por medio de una rotación de los ejes coordenados siempre es posible transformar la ecuación (1) en otra de la forma

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \qquad (2)$$

en la que uno de los coeficientes A' y C', por lo menos, es diferente de cero, y no aparece el término en $x'y'$.

Hemos visto (Art. 71) que si la ecuación (2) representa un lugar geométrico real, representa o bien una cónica o uno de los casos excepcionales de un punto o un par de rectas. Como la naturaleza de un lugar geométrico no se altera por transformación de coordenadas, se sigue que, si la ecuación (1) tiene lugar geométrico, este lugar geométrico debe ser también o una sección cónica o uno de los casos excepcionales de un punto o un par de rectas. Por lo tanto, la ecuación (1) se toma, generalmente, como la *definición analítica de cónica*. De esto podemos inferir la existencia de una *definición geométrica* que incluya a todas las cónicas. Veremos más adelante (Art. 75) que tal definición general existe para la parábola, la elipse e hipérbola.

73. Transformación de la ecuación general por rotación de los ejes coordenados. Apliquemos a la ecuación general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

en donde $B \neq 0$, las ecuaciones de transformación por rotación

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta, \quad y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta,$$

dadas en el teorema 2 del Artículo 51. Tenemos :

$$A(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)^2 + B(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta)$$
$$+ C(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta)^2 + D(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)$$
$$+ E(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta) + F = 0.$$

Si desarrollamos y agrupamos los términos, obtenemos

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \qquad (2)$$

en donde,

$$\left.\begin{aligned} A' &= A \cos^2\theta + B \operatorname{sen}\theta \cos\theta + C \operatorname{sen}^2\theta, \\ B' &= 2(C - A) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta), \\ C' &= A \operatorname{sen}^2\theta - B \operatorname{sen}\theta \cos\theta + C \cos^2\theta, \\ D' &= D \cos\theta + E \operatorname{sen}\theta, \\ E' &= E \cos\theta - D \operatorname{sen}\theta, \\ F' &= F. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Si la ecuación transformada (2) va a carecer del término en $x'y'$, el coeficiente de B' debe anularse. Por tanto, debemos tener

$$2(C - A) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 0.$$

Por medio de las fórmulas trigonométricas del ángulo doble (Apéndice IC, 7), esta última ecuación puede escribirse en la forma

$$(C - A) \operatorname{sen} 2\theta + B \cos 2\theta = 0. \qquad (4)$$

Si $A \neq C$, de la ecuación (4) tenemos la relación

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C}.$$

Si $A = C$, entonces la ecuación (4) se reduce a la forma

$$B \cos 2\theta = 0.$$

Como $B \neq 0$, por hipótesis, se sigue (Apéndice IB, 2) que

$$\cos 2\theta = 0. \qquad (5)$$

El ángulo de rotación θ queda restringido al intervalo $0° \leq \theta < 90°$ (nota, teorema 2, Art. 51), de manera que el intervalo de variación para 2θ es $0° \leq 2\theta < 180°$. Por tanto, de la ecuación (5), tenemos

$$2\theta = 90° \quad \text{y} \quad \theta = 45°.$$

Resumiendo:

TEOREMA 1. *La ecuación general de segundo grado*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

en donde $B \neq 0$, *puede transformarse siempre en otra de la forma*

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \qquad (6)$$

sin término en $x'y'$, *haciendo girar los ejes coordenados un ángulo positivo agudo* θ *tal que*

$$tg\ 2\theta = \frac{B}{A - C}, \quad si\ A \neq C,$$

y

$$\theta = 45°, \quad si\ A = C.$$

NOTA. Por medio del teorema 1, es posible determinar el ángulo θ y por tanto, los valores de sen θ y cos θ para usarlos en las ecuaciones de transformación por rotación. De aquí que las ecuaciones de transformación pueden obtenerse *antes* de hacer la sustitución en la ecuación original. Esto nos conduce a reducir considerablemente la cantidad de operaciones en los problemas del tipo del ejemplo 2 del Artículo 51.

Del teorema 1 podemos deducir una conclusión muy importante. El ángulo de rotación θ es de 45°, si $A = C$, o bien tal que

$$\text{tg}\ 2\theta = \frac{B}{A - C}, \quad \text{si}\ A \neq C.$$

Como $B \neq 0$, tg $2\theta \neq 0$, y, por tanto, θ es diferente de cero en todos los casos. De acuerdo con esto, la ecuación general (1) puede transformarse en la forma (6) girando los ejes coordenados un ángulo diferente de cero. Pero hemos visto que, si la ecuación (6) representa una sección cónica, el eje focal es paralelo a (o coincidente con) uno de los ejes coordenados, y recíprocamente. Por tanto, si la ecuación (1) representa una cónica, el eje focal debe ser oblicuo con respecto a los ejes coordenados y recíprocamente. Este resultado lo enunciamos en el siguiente teorema:

TEOREMA 2. *Si la ecuación general de segundo grado,*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

en donde $B \neq 0$, *representa una sección cónica, el eje focal es oblicuo con respecto a los ejes coordenados, y recíprocamente.*

74. El indicador $I = B^2 - 4AC$. En el Artículo 73 vimos que, si los ejes coordenados giran un ángulo θ, la ecuación general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad B \neq 0, \qquad (1)$$

se transforma en la ecuación

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \qquad (2)$$

en donde,

$$\left.\begin{aligned} A' &= A \cos^2\theta + B \operatorname{sen}\theta \cos\theta + C \operatorname{sen}^2\theta, \\ B' &= 2(C - A)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta), \\ C' &= A \operatorname{sen}^2\theta - B \operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta, \\ D' &= D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta, \\ E' &= E\cos\theta - D\operatorname{sen}\theta, \\ F' &= F. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Más aún, si se selecciona el ángulo de rotación θ como lo especifica el teorema 1 del Artículo 73, la ecuación (2) toma la forma

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0. \qquad (4)$$

En el Artículo 71 presentamos un resumen de la naturaleza del lugar geométrico de la ecuación (4). Por ejemplo, si A' o C' son iguales a cero, uno u otro, la ecuación (4) representa una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincidente con) uno de los ejes coordenados, o constituye uno de los casos excepcionales de dos rectas diferentes o coincidentes, paralelas a uno de los ejes coordenados, o ningún lugar geométrico. Ahora diremos, con el fin de una mayor brevedad de expresión, que la ecuación (4) representa una *cónica género parábola*. Para los demás casos se usarán términos semejantes al anterior según las siguientes definiciones:

DEFINICIONES. 1. Si uno de los dos coeficientes A' o C' es igual a cero, la ecuación (4) representa una cónica *género parábola*, es decir, uno cualquiera de los casos especificados en el teorema 3 del Artículo 56.

2. Si A' y C' son del mismo signo, se dice que la ecuación (4) representa una cónica del *género elipse*, es decir, uno cualquiera de los casos especificados en el teorema 3 del Artículo 62.

3. Si A' y C' son de signo contrario, se dice que la ecuación (4) representa una cónica del *género hipérbola*, es decir, uno cualquiera de los casos especificados en el teorema 4 del Artículo 69.

Usando las tres primeras relaciones de (3) y la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, podemos demostrar fácilmente que

$$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC. \qquad (5)$$

El lector debe notar particularmente que la relación (5) es independiente de θ, el ángulo de rotación. Como la cantidad $B^2 - 4AC$ *no cambia* de valor para *ninguna* rotación de los ejes coordenados, se llama *invariante* y se dice que es *invariante por rotación*.

Cuando la ecuación (1) es transformada en la ecuación (4), $B' = 0$, y la relación (5) se reduce a

$$B^2 - 4AC = -4A'C'. \tag{6}$$

Si uno cualquiera de los coeficientes A' o C' es igual a cero, la ecuación (4) y, por tanto, la (1), es del género parábola. En este caso, la relación (6) muestra que $B^2 - 4AC = 0$.

Si A' y C' son del mismo signo, la ecuación (4) y, en consecuencia, la (1), es del género elipse. En este caso, la relación (6) muestra que $B^2 - 4AC < 0$.

Si A' y C' difieren en el signo, la ecuación (4) y, en consecuencia la (1), es del género hipérbola. En este caso, la relación (6) muestra que $B^2 - 4AC > 0$.

Como la expresión $B^2 - 4AC$ *indica* la naturaleza del lugar geométrico de la ecuación (1), llamaremos *indicador** a este invariante. Denotaremos el indicador por la letra mayúscula I, es decir,

$$I = B^2 - 4AC.$$

Los resultados precedentes se pueden resumir en el siguiente teorema:

TEOREMA 3. *La ecuación general de segundo grado,*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

representa una cónica del género parábola, elipse o hipérbola, según que el indicador, $I = B^2 - 4AC$, *sea cero, negativo o positivo.*

Ejemplo. Determinar la naturaleza del lugar geométrico de la ecuación

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 29 = 0. \tag{7}$$

Reducir la ecuación a su forma canónica por transformación de coordenadas. Trazar el lugar geométrico y todos los sistemas de coordenadas que hayan sido necesarios.

Solución. Para la ecuación (7), el indicador es

$$I = B^2 - 4AC = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -24.$$

Como $I < 0$, la ecuación (7) es del género elipse.

---

* N DEL T. Muchos autores llaman *discriminante* a esta expresión.

Para suprimir el término en xy, hacemos girar los ejes coordenados un ángulo θ tal que

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3}.$$

De tg 2θ podemos obtener cos 2θ ya sea por medio de un triángulo rectángulo o por la relación

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\sec 2\theta} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 2\theta + 1}},$$

de donde,

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{(4/3)^2 + 1}} = \frac{3}{5}.$$

Obsérvese que por ser θ agudo, 2θ está en el primero o en el segundo cuadrantes en donde el coseno y la tangente de un ángulo son *del mismo* signo. De este valor de cos 2θ podemos obtener los valores de sen θ y cos θ por medio de las fórmulas trigonométricas del ángulo mitad (apéndice IC, 8). Así,

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (3/5)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

y

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (3/5)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Las ecuaciones de transformación por rotación son entonces

$$x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta = \frac{2x' - y'}{\sqrt{5}},$$

$$y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}.$$

Sustituyendo estos valores de x y y en la ecuación (7), obtenemos

$$5\left(\frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(\frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right) + 2\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$- 24\left(\frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}\right) - 12\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right) + 29 = 0,$$

la cual, por simplificación, toma la forma

$$6x'^2 + y'^2 - 12\sqrt{5}x' + 29 = 0. \tag{8}$$

La ecuación (8) puede simplificarse, bien por una traslación de los ejes X' y Y' o completando los cuadrados. El estudiante debe verificar el resultado, que es la elipse (fig. 101)

$$6x''^2 + y''^2 = 1.$$

En los problemas del tipo considerado en este artículo, la gráfica se construye, generalmente, a partir de la ecuación más simple obtenida finalmente por transformación de coordenadas. Se puede hacer una comprobación parcial de la exactitud de esta gráfica comparando sus intersecciones con los ejes originales, cuando existen dichas inter-

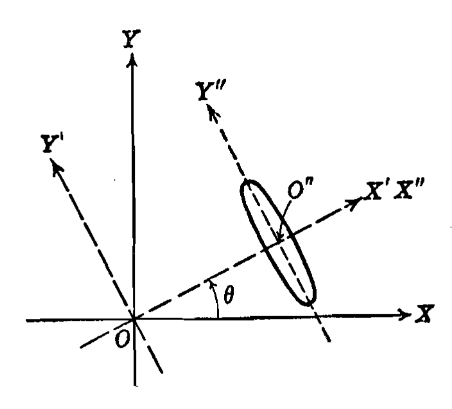


Fig. 101

secciones, con los valores de estas mismas intersecciones obtenidas a partir de la ecuación original.

El teorema 3 del Artículo 52 establece que el orden en que se efectúen la traslación y la rotación no tiene importancia. Fué anotado, sin embargo, en la nota 2 de este teorema que, si los términos de segundo grado forman un cuadrado perfecto, se debe hacer la rotación de los ejes antes de la traslación. En seguida demostraremos la razón de esto. Si reemplazamos x y y en la ecuación general (1) por sus valores dados en las ecuaciones de transformación para traslación

$$x = x' + h, \quad y = y' + k,$$

obtenemos

$$A(x' + h)^2 + B(x' + h)(y' + k) + C(y' + k)^2 + D(x' + h) + E(y' + k) + F = 0,$$

la cual, por desarrollo y agrupación de términos, toma la forma

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (2Ah + Bk + D)x' + (Bh + 2Ck + E)y' + (Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F) = 0. \quad (9)$$

Para eliminar los términos de primer grado de la ecuación (9) basta determinar los valores de h y k que satisfacen a las ecuaciones

$$2Ah + Bk + D = 0, \qquad Bh + 2Ck + E = 0.$$

Este sistema tiene una solución única para h y k, dada por la regla de Cramer (Apéndice IB, 6), solamente si el determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix} = 4AC - B^2 \neq 0.$$

Por tanto, si la ecuación (1) es del género parábola, en donde

$$I = B^2 - 4AC = 0,$$

no podemos eliminar los términos de primer grado comenzando por una traslación. En general, por lo tanto, simplificaremos la ecuación (1) girando primero los ejes.

EJERCICIOS. Grupo 34

Los ejercicios 1-5 se refieren a las ecuaciones (1) y (2) del Artículo 74.

1. Demostrar que la cantidad $B^2 - 4AC$ es invariante por rotación, demostrando que $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$. (Relación [5], Art. 74.)

2. Demostrar que la cantidad $A + C$ es invariante por rotación, haciendo ver que $A' + C' = A + C$. *Sugestión.* Usense la primera y tercera relaciones de (3), Art. 74.

3. Si $B \neq 0$ pero uno cualquiera de los coeficientes A o C es cero, o ambos A y C son cero, demuéstrese que la ecuación (1) es del género hipérbola.

4. Si A y C difieren en el signo, demuéstrese que la ecuación (1) es del género hipérbola ya sea que B sea positivo, negativo o nulo.

5. Demostrar que la ecuación (1) es del género parábola si los términos de segundo grado forman un cuadrado perfecto.

En los ejercicios 6-16, determinar la naturaleza de la cónica que representa la ecuación dada, y reducir la ecuación a su forma canónica por transformación de coordenadas. Trazar el lugar geométrico, cuando exista, y todos los sistemas de ejes coordenados.

6. $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0.$

7. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}x - 14\sqrt{13}y + 117 = 0.$

8. $3x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 16y - 12 = 0.$

9. $5x^2 + 2xy + 10y^2 - 12x - 22y + 17 = 0.$

10. $x^2 + 8xy + 16y^2 - 4x - 16y + 7 = 0.$

11. $12x^2 + 12xy + 7y^2 - 4x + 6y - 1 = 0.$

12. $2x^2 - 12xy + 18y^2 + x - 3y - 6 = 0.$

13. $8x^2 - 24xy + 15y^2 + 4y - 4 = 0.$

14. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 2 = 0.$

15. $4x^2 - 20xy + 25y^2 + 4x - 10y + 1 = 0.$

16. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0.$

17. Resolver el ejemplo 2 del Artículo 51 por el método del Artículo 74.

18. Resolver el ejemplo del Artículo 52 por el método del Artículo 74.

19. Elevando al cuadrado dos veces, elimínense los radicales de la ecuación $x^{1/2} + y^{1/2} = 1$. Demostrar que el lugar geométrico de la ecuación resultante es una parábola, y determinar qué porción de esta curva representa el lugar geométrico de la ecuación original.

20. Si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen sea el punto (h, k), demostrar que la ecuación general

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se transforma en otra ecuación cuyo término constante es igual a $f(h, k)$.

75. Definición general de cónica. Veamos ahora una definición geométrica de cónica que incluye a la parábola, la elipse y la hipérbola.

Definición. Dada una recta fija l y un punto fijo F no contenido en esa recta, se llama *cónica* al lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de l y F de tal manera que la razón de su distancia de F a su distancia de l es siempre igual a una constante positiva.

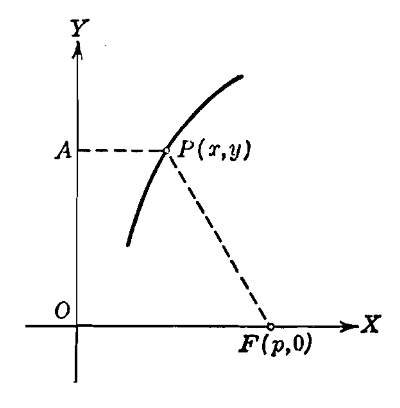


Fig. 102

La recta fija l se llama *directriz*, el punto fijo F, *foco*, y la constante positiva, a la que designaremos por e, *excentricidad* de la cónica. Cuando $e = 1$, la definición anterior es la de la parábola (Art. 54).

Sin ninguna pérdida de generalidad, podemos tomar el eje Y como directriz del punto $F(p, 0)$, $p \neq 0$, como foco (fig. 102). Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Desde P tracemos el segmento PA perpendicular al eje Y. Entonces, por la definición anterior, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$\frac{|\overline{PF}|}{|\overline{PA}|} = e, \tag{1}$$

lo cual puede expresarse analíticamente por la ecuación

$$\frac{\sqrt{(x-p)^2 + y^2}}{|x|} = e.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación, quitando denominadores y trasponiendo, resulta

$$(1 - e^2)\,x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0. \qquad (2)$$

Podemos demostrar, recíprocamente, que cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2) es un punto que satisface la condición geométrica (1) y, por tanto, está sobre el lugar geométrico. De acuerdo con esto, la ecuación (2) es la ecuación buscada.

Por lo anteriormente estudiado, reconocemos a primera vista que el lugar geométrico de la ecuación (2) es una cónica, pero su naturaleza depende, evidentemente, del valor de la excentricidad e. Hay entonces dos casos generales por considerar: I. $e = 1$; II. $e \neq 1$.

I. $e = 1$. En este caso, la ecuación (2) toma la forma

$$-\,2px + y^2 + p^2 = 0.$$

Esta ecuación puede escribirse

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

que representa una parábola cuyo vértice es el punto $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ y cuyo eje coincide con el eje X.

II. $e \neq 1$. En este caso, $1 - e^2 \neq 0$. Dividiendo la ecuación (2) por $1 - e^2$, obtenemos

$$x^2 - \frac{2p}{1 - e^2}\,x + \frac{y^2}{1 - e^2} = -\,\frac{p^2}{1 - e^2}.$$

Completando el cuadrado en x, podemos reducir esta ecuación a la segunda forma ordinaria de la ecuación de una cónica central,

$$\frac{\left(x - \dfrac{p}{1 - e^2}\right)^2}{\dfrac{p^2 e^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{p^2 e^2}{1 - e^2}} = 1. \qquad (3)$$

El que la ecuación (3) represente una elipse o una hipérbola depende del valor de e. Tenemos entonces dos subcasos:

$$a)\ \ e < 1; \qquad b)\ \ e > 1.$$

a) $e < 1$. En este caso, $1 - e^2 < 0$, y ambos denominadores en el primer miembro de (3) son positivos. Por tanto, el lugar

geométrico de la ecuación (3) es una elipse. Vamos ahora a demostrar que el valor de e dado por la ecuación (3) es idéntico al valor previamente definido de $\frac{c}{a}$ (Art. 61).

En efecto: Por ser

$$a^2 = \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} \quad \text{y} \quad b^2 = \frac{p^2 e^2}{1-e^2},$$

tenemos:

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2 e^2}{1-e^2}$$
$$= \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2 e^2 (1-e^2)}{(1-e^2)^2} = \frac{p^2 e^4}{(1-e^2)^2}.$$

Entonces

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{p^2 e^4}{(1-e^2)^2} \cdot \frac{(1-e^2)^2}{p^2 e^2} = e^2,$$

de donde, $\frac{c}{a} = e$, que es lo que se quería demostrar.

b) $e > 1$. En este caso, $1 - e^2 < 0$. Por tanto, con el fin de tener ambos denominadores positivos, escribimos la ecuación (3) en la forma

$$\frac{\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2}{\frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2}} - \frac{y^2}{\frac{p^2 e^2}{e^2 - 1}} = 1. \qquad (4)$$

Evidentemente, el lugar geométrico de la ecuación (4) es una hipérbola. Análogamente a como hicimos para la elipse podemos demostrar que el valor de e dado por la ecuación (3) es idéntico con su valor previamente definido de $\frac{c}{a}$ (Art. 65).

Podemos ahora establecer el siguiente teorema:

TEOREMA 4. *Una cónica es una parábola, una elipse o una hipérbola, según que su excentricidad sea igual a, menor que, o mayor que la unidad.*

NOTA. El lector debe observar el paralelismo entre los valores del indicador $I = B^2 - 4AC$ y de la excentricidad e de las diversas cónicas, como aparece en el siguiente cuadro.

	PARABOLA	ELIPSE	HIPERBOLA
Indicador $I = B^2 - 4AC$	$I = 0$	$I < 0$	$I > 0$
Excentricidad e	$e = 1$	$e < 1$	$e > 1$

Ejemplo 1. Determinar la ecuación de la cónica que tiene por foco el punto $F(-1, -2)$, directriz la recta $l : x - y + 1 = 0$ y excentricidad $e = \frac{1}{2}$.

Solución. Por la definición general, el lugar geométrico es una elipse, y su ecuación puede obtenerse a partir de la relación

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}}{\dfrac{|x - y + 1|}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}.$$

Si elevamos al cuadrado, quitamos denominadores, trasponemos y agrupamos términos, obtenemos la ecuación buscada,

$$7x^2 + 2xy + 7y^2 + 14x + 34y + 39 = 0.$$

Esta ecuación representa la elipse de la figura 103.

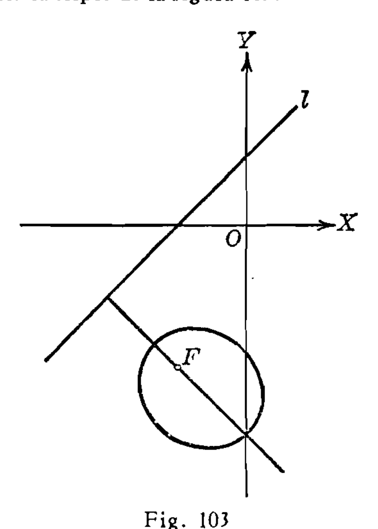


Fig. 103

La determinación de la ecuación de la directriz de una parábola ya ha sido considerada en el Capítulo VI. Ahora determinaremos las ecuaciones de las directrices de las cónicas centrales. Estas cónicas tienen cada una dos focos y, por tanto, dos directrices, *correspondiendo* una a cada foco.

De la simetría de las cónicas, se sigue, por la ecuación (2), que el eje focal es perpendicular a la directriz. Por tanto, si tomamos la ecuación de la elipse en su forma canónica,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (5)$$

las ecuaciones de sus directrices son de las formas $x = k$ y $x = l$, correspondiendo a los focos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente, tal

como se indica en la figura 104. Para el foco $(c, 0)$ y su directriz correspondiente $x = k$, tenemos, de la definición general de las cónicas,

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x-k|} = e. \qquad (6)$$

Se deja al lector, como ejercicio, la demostración de que la ecuación (6) se reduce a la forma ordinaria

$$\frac{\left(x + \frac{e^2 k - c}{1 - e^2}\right)^2}{\frac{e^2 (k-c)^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{e^2 (k-c)^2}{1-e^2}} = 1. \qquad (7)$$

Como las ecuaciones (5) y (7) representan un mismo lugar geométrico, una elipse cuyo centro está en el origen, de la ecuación (7) se sigue que

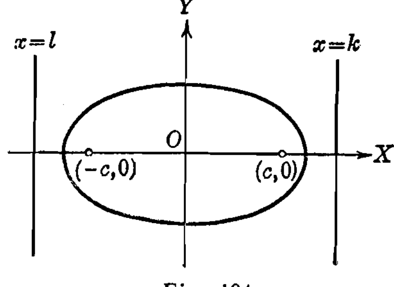


Fig 104

$$e^2 k - c = 0,$$

de donde,

$$k = \frac{c}{e^2} = \frac{ae}{e^2} = \frac{a}{e}.$$

Por tanto, para el foco $(c, 0)$, de la elipse (5), la ecuación de la directriz es $x = \frac{a}{e}$. Análogamente, para el foco $(-c, 0)$ y la directriz correspondiente $x = l$, hallamos $x = -\frac{a}{e}$.

Exactamente por el mismo procedimiento, hallamos, para la hipérbola, $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$, que sus focos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ tienen por directrices correspondientes a las rectas cuyas ecuaciones son, respectivamente, $x = \frac{a}{e}$ y $x = -\frac{a}{e}$.

Los resultados precedentes están comprendidos en el siguiente

TEOREMA 5. *Para la elipse* $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ *y la hipérbola* $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$, *cada una de excentricidad* e, *los focos* $(ae, 0)$ *y* $(-ae, 0)$ *tienen como directrices correspondientes las rectas cuyas ecuaciones son* $x = \frac{a}{e}$ *y* $x = -\frac{a}{e}$, *respectivamente.*

Ejemplo 2. Hallar las coordenadas de los focos y las ecuaciones de las directrices correspondientes de la hipérbola $3x^2 - y^2 = 12$.

Solución. Escribiendo la ecuación en la forma ordinaria,

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1,$$

vemos que $a^2 = 4$ y $b^2 = 12$. Por tanto, $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, y la excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$. Entonces, por el teorema 5 anterior, la ecuación de la

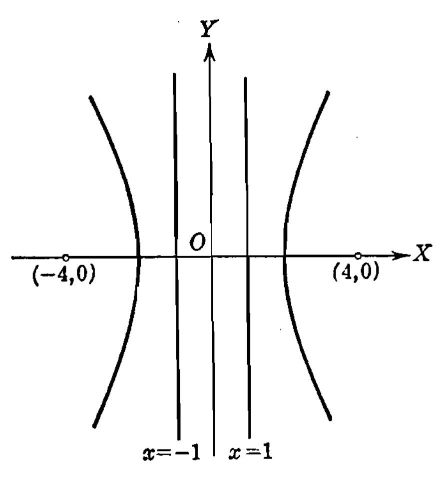


Fig. 105

directriz correspondiente al foco (4, 0) es $x = \frac{a}{e}$, o sea, $x = 1$, y la ecuación de la directriz correspondiente al otro foco $(-4, 0)$ es $x = -\frac{a}{e}$, o sea, $x = -1$ (fig. 105).

EJERCICIOS. Grupo 35

En cada uno de los ejercicios 1-5, hallar la ecuación de la cónica respectiva a partir de los datos dados.

1. Foco (0, 0); directriz: $x + 2y + 2 = 0$; excentricidad = 1.
2. Foco (1, −2); directriz: $x - 2y = 0$; excentricidad $= \frac{\sqrt{5}}{3}$.
3. Foco (−1, −1); directriz: $4x + 3y = 12$; excentricidad = 5.
4. Foco (3, 3); directriz: $x + 3y = 3$; excentricidad = 2.
5. Foco (1, −3); directriz: $3x + y - 3 = 0$; excentricidad $= \frac{\sqrt{10}}{4}$.

6. Demostrar que cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2) es un punto que satisface la condición geométrica (1) del Artículo 75.

7. Hallar las coordenadas del vértice de la parábola del ejercicio 1.

8. Hallar las coordenadas del centro de la elipse del ejemplo 1, Artículo 75.

9. Demostrar que la ecuación (7) del Artículo 75 se deduce de la ecuación (6) del mismo artículo.

10. En la ecuación (7) del Artículo 75, demostrar que si $k = \frac{a}{e}$ el denominador $\frac{e^2(k-c)^2}{(1-e^2)^2}$ es igual a a^2 y el denominador $\frac{e^2(k-c)^2}{1-e^2}$ es igual a b^2.

11. Demostrar que el punto $(-ae, 0)$ y la recta $x = -\frac{a}{e}$ son un foco y una directriz correspondientes de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

En cada uno de los ejercicios 12-16, hallar las coordenadas de los focos y las ecuaciones de las directrices correspondientes de la cónica cuya ecuación se da. Dibujar una figura para cada ejercicio.

12. $5x^2 + 9y^2 = 45$.

13. $16x^2 - 9y^2 = 144$.

14. $5x^2 + y^2 = 5$.

15. $2y^2 - 7x^2 = 14$.

16. $9x^2 + 25y^2 - 18x - 50y - 191 = 0$.

17. Demostrar el teorema 5 del Artículo 75 para la hipérbola.

18. Por medio del teorema 5, Artículo 75, resolver el ejercicio 20 del grupo 27, Artículo 61, y el ejercicio 22 del grupo 30, Artículo 65.

19. Para la elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$, demostrar el teorema correspondiente al teorema 5 del Artículo 75.

20. Para la hipérbola $a^2x^2 - b^2y^2 = a^2b^2$, demostrar el teorema correspondiente al teorema 5 del Artículo 75.

76. Tangente a la cónica general. La determinación de las ecuaciones de las tangentes a las cónicas se facilita considerablemente por el uso de la ecuación de la tangente a la cónica general,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en un punto de contacto dado, tal como lo establece el teorema 6. La demostración de este teorema se apoya en la aplicación de la condición para tangencia (Art. 44) y, por tanto, se deja al estudiante como ejercicio.

TEOREMA 6. *La ecuación de la tangente a la cónica general*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

en cualquier punto de contacto dado $P_1(x_1, y_1)$, *es*

$$Ax_1x + \frac{B}{2}(x_1y + y_1x) + Cy_1y + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = 0. \qquad (2)$$

NOTAS. 1. Si las variables en la ecuación (1) se escriben en la forma:

$$x^2 = xx, \quad xy = \frac{xy + yx}{2}, \quad y^2 = yy, \quad x = \frac{x + x}{2}, \quad y = \frac{y + y}{2},$$

y el subíndice 1 es colocado a una variable en cada término, se obtiene inmediatamente la ecuación (2). Este método para recordar la ecuación de la tangente es muy útil, pero el estudiante debe observar que, según todo lo demostrado, se aplica solamente a las ecuaciones de segundo grado con dos variables.

2. El teorema 6 puede usarse aún cuando no se conozca el punto de contacto. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto (4, 1) a la cónica

$$2x^2 - xy + y^2 + x - 3y + 2 = 0. \qquad (3)$$

Solución. Sean (x_1, y_1) las coordenadas de uno de los dos puntos de contacto. Entonces, por la nota 1 del teorema 6 anterior, la ecuación de la tangente en este punto de contacto es

$$2x_1x - \tfrac{1}{2}(x_1y + y_1x) + y_1y + \tfrac{1}{2}(x + x_1) - \tfrac{3}{2}(y + y_1) + 2 = 0. \qquad (4)$$

Como el punto (4, 1) debe estar sobre esta tangente, sus coordenadas deben satisfacer esta última ecuación, y tenemos

$$8x_1 - \tfrac{1}{2}(x_1 + 4y_1) + y_1 + \tfrac{1}{2}(4 + x_1) - \tfrac{3}{2}(1 + y_1) + 2 = 0,$$

la cual se simplifica y se reduce a

$$16x_1 - 5y_1 + 5 = 0. \qquad (5)$$

Las coordenadas (x_1, y_1) del punto de contacto satisfacen la ecuación (3), y tenemos

$$2x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 + x_1 - 3y_1 + 2 = 0. \qquad (6)$$

Las soluciones comunes de las ecuaciones (5) y (6) son $x_1 = 0$, $y_1 = 1$, y $x_1 = \frac{40}{113}$, $y_1 = \frac{241}{113}$. Por tanto, los puntos de contacto son (0, 1) y $\left(\frac{40}{113}, \frac{241}{113}\right)$. Las ecuaciones de las tangentes que se buscan pueden obtenerse como ecuaciones de las rectas que pasan por dos puntos: el punto (4, 1) y cada punto de contacto, o también sustituyendo las coordenadas de cada uno de los puntos de contacto en la ecuación (4). Por cualquiera de los dos métodos obtenemos $y - 1 = 0$ y $32x + 103y - 231 = 0$ para las ecuaciones buscadas.

El estudiante debe trazar la figura correspondiente a este ejemplo.

77. Sistemas de cónicas. En la ecuación general de las cónicas,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

los coeficientes representan seis constantes arbitrarias que, sin embargo, no son independientes, porque uno cuando menos de los tres coeficientes A, B y C es diferente de cero, y, si dividimos la ecuación (1) por uno de estos coeficientes diferentes de cero vemos que

solamente hay cinco constantes arbitrarias o parámetros independientes. Por tanto, la ecuación de una cónica está perfectamente determinada por cinco condiciones independientes, como máximo. Por ejemplo, una cónica está determinada si se conocen las coordenadas de cinco cualesquiera de sus puntos. Para una parábola, sin embargo, sólo se requieren cuatro condiciones, pues en este caso los coeficientes de la ecuación (1) satisfacen la relación $B^2 - 4AC = 0$. Para determinar la ecuación de una cónica que pasa por un grupo de cinco puntos dados, basta sustituir las coordenadas de cada uno de estos puntos en la ecuación (1) y resolver el sistema resultante de cinco ecuaciones, para cinco cualesquiera de los coeficientes, en términos del sexto coeficiente, siempre que este último coeficiente sea diferente de cero.

Si una ecuación algebraica de segundo grado con dos variables contiene una o más constantes arbitrarias o parámetros independientes, representa, en general, una *familia* o *sistema de cónicas*. Hemos discutido anteriormente los sistemas de rectas (Art. 36) y los sistemas de circunferencias (Art. 42); por tanto, los principios básicos de los sistemas de curvas son ya familiares al lector. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - 2xy + ky^2 + 2x - y + 1 = 0 \qquad (2)$$

representa una *familia de curvas de un parámetro*. La ecuación de cualquier elemento de esta familia puede obtenerse especificando o determinando un valor particular para k. Así, la ecuación (2) representa una parábola si $k = 1$, elipses si $k > 1$ e hipérbolas si $k < 1$.

Una familia de cónicas interesante es el sistema formado por las cónicas que pasan por las intersecciones de dos cónicas dadas. Si u y v son las funciones de segundo grado en las dos variables x y y, entonces las dos cónicas dadas pueden representarse por las ecuaciones

$$u = 0, \qquad (3)$$

$$v = 0. \qquad (4)$$

Si las cónicas (3) y (4) se cortan, las coordenadas de cualquiera de los puntos de intersección satisfacen ambas ecuaciones (3) y (4) y, por tanto, satisfacen también a la ecuación

$$u + kv = 0 \qquad (5)$$

para todos los valores del parámetro k (ver el Artículo 42). En consecuencia, la ecuación (5) representa una familia de curvas que pasan por las intersecciones de las cónicas (3) y (4). Como k es una constante, el grado de la ecuación (5) no puede ser mayor que 2, y, en general, la ecuación representará, por lo tanto, un sistema de cónicas.

Pero, para algún valor de k, el elemento correspondiente de la familia (5) puede ser una recta; ya vimos un ejemplo de esto al estudiar el eje radical (Art. 43).

Ejemplo. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por el punto $(2, -1)$ y los puntos de intersección de las cónicas $x^2 + 2xy - 2y^2 + 2x + y + 1 = 0$ y $2x^2 + xy + y^2 - 5x + 3y - 4 = 0$.

Solución. La ecuación de la familia de curvas que pasan por los puntos de intersección de las cónicas dadas son

$$x^2 + 2xy - 2y^2 + 2x + y + 1 + k(2x^2 + xy + y^2 - 5x + 3y - 4) = 0. \qquad (6)$$

Si una de las curvas de la familia (6) pasa por el punto $(2, -1)$, las coordenadas de ese punto deben satisfacer la ecuación (6), y tenemos

$$4 - 4 - 2 + 4 - 1 + 1 + k(8 - 2 + 1 - 10 - 3 - 4) = 0,$$

de donde, $2 + k(-10) = 0$ y $k = \frac{1}{5}$. Sustituyendo este valor de k en (6), obtenemos

$$7x^2 + 11xy - 9y^2 + 5x + 8y + 1 = 0$$

como ecuación de la cónica buscada.

El estudiante debe dibujar una figura para este ejemplo.

Consideraremos ahora el caso importante de las *cónicas homofocales*, es decir, aquellas que tienen el *mismo foco*. Un sistema tal, para cónicas centrales, se representa convenientemente por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2 + k} + \frac{y^2}{b^2 + k} = 1, \qquad (7)$$

en donde k es el parámetro. En la discusión que sigue, consideraremos $a > b$. Evidentemente, k no puede tomar ninguno de los valores $-a^2$ o $-b^2$ o cualquier otro valor menor que $-a^2$.

Para todos los valores de $k > -b^2$, la ecuación (7) representa elipses. Para cada elipse, la distancia del centro a uno de sus focos está dada por

$$c = \sqrt{(a^2 + k) - (b^2 + k)} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Como c es una constante independiente del valor de k, todas las elipses tienen los mismos focos $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$.

Para todos los valores de k tales que $-a^2 < k < -b^2$, la ecuación (7) representa hipérbolas. En este caso, el primer denominador en el primer miembro de (7) es positivo y el segundo denominador es negativo; por tanto, la ecuación puede escribirse en la forma

$$\frac{x^2}{a^2 + k} - \frac{y^2}{-b^2 - k} = 1.$$

Entonces, para cada hipérbola, la distancia del centro a uno de sus focos está dada por

$$c = \sqrt{(a^2 + k) + (-b^2 - k)} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Luego todas las hipérbolas tienen los mismos focos, y estos focos son idénticos a los de las elipses. Hemos demostrado entonces que, para todos los valores admisibles de k la ecuación (7) representa un sistema de elipses e hipérbolas homofocales. En la figura 106 aparecen varios elementos de este sistema, siendo los focos los puntos F y F'. Como todas estas cónicas tienen un eje focal común y un eje normal común, se dice que son *coaxiales*.

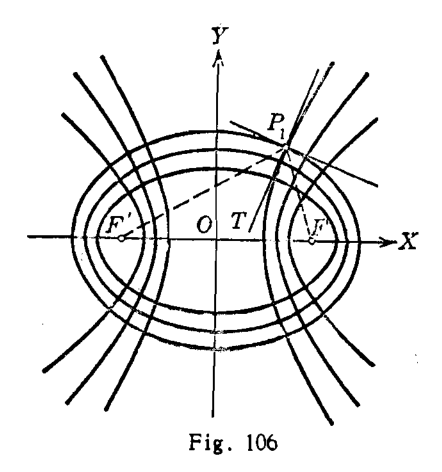


Fig. 106

Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera no contenido en ninguno de los ejes coordenados. Si una cónica del sistema (7) pasa por P_1, sus coordenadas (x_1, y_1) deben satisfacer a la ecuación (7), y tenemos

$$\frac{x_1^2}{a^2 + k} + \frac{y_1^2}{b^2 + k} = 1,$$

que puede escribirse en la forma

$$k^2 + (a^2 + b^2 - x_1^2 - y_1^2)k + a^2b^2 - b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = 0. \quad (8)$$

Para $a > b$, puede demostrarse que las raíces de esta ecuación cuadrática en k son reales y desiguales, estando comprendida una entre $-a^2$ y $-b^2$, y siendo la otra mayor que $-b^2$. (Ver los ejercicios 23–25 del grupo 36 siguiente.) Pero para la primera raíz el sistema (7) produce una hipérbola, y para la segunda raíz, una elipse. Por tanto, tenemos el siguiente resultado:

Por un punto cualquiera, no contenido en uno de los ejes coordenados, pasan una hipérbola y una elipse del sistema (7) *de cónicas homofocales.*

Tracemos los radios vectores de P_1; son los mismos para ambas, la hipérbola y la elipse, ya que estas cónicas son homofocales. Sea P_1T la bisectriz del ángulo FP_1F' formado por los radios vectores de P_1. Entonces, por el teorema 6 del Artículo 63, P_1T es normal a la elipse en P_1. y por el teorema 7 del Artículo 70, P_1T es tangente a la hipérbola en P_1. Por tanto, la elipse y la hipérbola se cortan ortogonalmente en P_1. Como P_1 representa un punto *cualquiera* no contenido en un eje coordenado, tenemos el siguiente resultado:

La familia de elipses y la familia de hipérbolas del sistema (7) *de cónicas homofocales son trayectorias ortogonales entre sí.*

Debido a esta propiedad, se dice que una familia de cónicas centrales homofocales es *auto-ortogonal*. Un ejemplo de una familia auto-ortogonal de parábolas es el sistema de dichas curvas que tienen un foco común y un eje común. Tal sistema puede representarse convenientemente por la ecuación

$$y^2 = 4k(x + k), \tag{9}$$

en la que el parámetro k puede tomar todos los valores reales excepto cero. Las parábolas del sistema (9) tienen un foco común en el origen, y el eje X como eje común; se abren hacia la derecha o hacia la izquierda según que $k > 0$ o $k < 0$. Las parábolas que se abren en direcciones opuestas se cortan ortogonalmente. (Ver los ejercicios 28-30 del grupo 36 siguiente.)

EJERCICIOS. Grupo 36

Los ejercicios 1-6 deben resolverse usando el teorema 6 del Artículo 76. Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la cónica

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x - y - 3 = 0$$

en el punto (1, 2).

2. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la cónica

$$x^2 - xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0,$$

de pendiente 3.

3. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la cónica

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6 = 0,$$

trazadas por el punto $(-3, -7)$.

4. Para el punto (1, 1) de la cónica $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$, hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal, y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal.

5. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la cónica $3xy - 2x + y - 1 = 0$ que son perpendiculares a la recta $2x - 2y + 7 = 0$.

6. Hallar el ángulo agudo de intersección de la recta $2x - y - 1 = 0$ y la cónica $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2y - 2x - 1 = 0$ en cada uno de sus puntos de intersección.

7. Demostrar el teorema 6 del Artículo 76.

8. Demostrar que los resultados del ejercicio 10 del grupo 18 (Art. 45), teorema 4, Artículo 57; teorema 4, Artículo 63, y teorema 5, Artículo 70, pueden obtenerse como corolarios del teorema 6, Artículo 76.

9. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en el punto de contacto $P_1(x_1, y_1)$.

10. Por tres métodos diferentes, hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ en el punto $(5, 7)$.

11. Suponiendo que k es una constante diferente de cero, demostrar que el triángulo formado por los ejes coordenados y cualquier tangente a la hipérbola equilátera $xy = k$ tiene un área constante. (Ver el ejercicio 20 del grupo 33, Artículo 70.)

12. Si a es una constante diferente de cero, demostrar que la suma algebraica de los segmentos que una tangente cualquiera a la cónica

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

determina sobre los ejes coordenados es igual a a.

13. La ecuación de una familia de cónicas es

$$x^2 + xy - y^2 + ax + by + 5 = 0.$$

Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los dos puntos $(1, 2)$ y $\left(-\frac{7}{5}, -\frac{26}{5}\right)$.

14. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por los cinco puntos $(-1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 1)$ y $(-5, 4)$.

15. Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los cuatro puntos $(1, 0)$, $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right)$, $\left(\frac{4}{9}, -\frac{10}{9}\right)$ y $(-4, 10)$.

16. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por los cinco puntos $(1, 1)$, $(2, 0)$, $\left(-\frac{1}{7}, \frac{5}{7}\right)$, $(0, 0)$ y $(2, -1)$.

17. Sobre el mismo sistema de ejes coordenados, trácense cinco elementos de la familia de cónicas representada por la ecuación (2) del Artículo 77, asignando al parámetro k los valores $-1, 0, 1, 2, 3$.

18. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por el punto $(-2, 3)$ y por las intersecciones de las cónicas

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 3y + 1 = 0 \text{ y } 3xy + 2x - y - 2 = 0.$$

19. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por el punto $(4, -2)$ y por las intersecciones de las cónicas

$$x^2 + xy + y^2 + x - 3y - 1 = 0 \text{ y } 2x^2 - xy - 2x + y = 0.$$

20. Escribir la ecuación de la familia de curvas que pasan por las intersecciones de la circunferencia $2x^2 + 2y^2 = 5$ y la elipse $x^2 + 3y^2 = 5$. Demostrar que, cuando el parámetro es igual a -1, el elemento de esta familia consiste en dos rectas que se cortan.

21. Hallar las ecuaciones de las parábolas que pasan por las intersecciones de las cónicas $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ y $xy + 3x + 5y + 3 = 0$. *Sugestión.* Calcúlese el valor del parámetro usando la relación $B^2 - 4AC = 0$.

22. Hallar las ecuaciones de las parábolas que pasan por las intersecciones de las cónicas $2xy + 2y^2 + 3x - y - 1 = 0$ y $x^2 - xy + 2y^2 + x + y - 3 = 0$.

23. Demostrar que las raíces de la ecuación (8), Artículo 77, son reales y desiguales demostrando que su discriminante puede escribirse en la forma de la cantidad positiva

$$(a^2 - b^2 - x_1^2 + y_1^2)^2 + 4x_1^2 y_1^2.$$

24. Demostrar que una raíz de la ecuación (8), Artículo 77, está comprendida entre $-a^2$ y $-b^2$ demostrando que el primer miembro de la ecuación es igual a la cantidad positiva $(a^2 - b^2)x_1^2$, $a > b$, $x_1 \neq 0$, para $k = -a^2$, y que es igual a la cantidad negativa $(b^2 - a^2)y_1^2$, $a > b$, $y_1 \neq 0$, para k igual a $-b^2$.

25. Demostrar que si se toma suficientemente grande la cantidad positiva λ, entonces, para $k = -b^2 + \lambda$, el primer miembro de la ecuación (8), Artículo 77, tiene un valor positivo y, por tanto, que en vista del ejercicio 24, la ecuación (8) tiene una raíz comprendida entre $-b^2$ y $-b^2 + \lambda$.

26. Discutir el sistema de cónicas representado por la ecuación

$$\frac{x^2}{9+k} + \frac{y^2}{5+k} = 1.$$

Utilizando los mismos ejes coordenados, dibujar los seis elementos de este sistema correspondientes a los valores de $k = 0,\ 7,\ 16,\ -8,\ -7,\ -6$.

27. Hallar las ecuaciones de las dos cónicas del sistema del ejercicio 26 que pasan por el punto $(2, 3)$.

28. Discutir el sistema representado por la ecuación (9) del Artículo 77. Sobre unos mismos ejes coordenados, dibujar los seis elementos de este sistema correspondientes a los valores de $k = 1,\ 2,\ 3,\ -1,\ -2,\ -3$.

29. Demostrar que por cualquier punto no contenido en el eje X, pasan precisamente dos parábolas del sistema (9) del Artículo 77, abriéndose una de ellas hacia la derecha y la otra hacia la izquierda.

30. Demostrar que la familia de parábolas homofocales y coaxiales del sistema (9) del Artículo 77 es auto-ortogonal. *Sugestión.* Usese el teorema 7, Artículo 59.

78. Secciones planas de un cono circular recto. El nombre de secciones cónicas con que se designa a la parábola, elipse e hipérbola tienen su origen en el hecho de que estas curvas se obtuvieron por primera vez como secciones planas de un cono circular recto.

Consideremos un cono circular recto de vértice V, cortado por un plano π que no pase por V, tal como se indica en la figura 107. Sean S y S' dos esferas inscritas en el cono y tangentes a π en los puntos F y F', respectivamente. Sean π_1 y π_2 los planos respectivos de los círculos de contacto de las esferas S y S' y el cono; estos planos son perpendiculares al eje del cono. Sean l y l', respectivamente, las intersecciones de π con π_1 y π_2. Vamos a demostrar que C, curva de intersección de π y el cono, es una sección cónica que tiene a F y F' por focos y a l y l', respectivamente, como directrices correspondientes.

Sea P un punto *cualquiera* de C. Tracemos PA, perpendicular a l, y la generatriz VP del cono que toca a los círculos de contacto de S y S' en los puntos B y B', respectivamente. Como PF y PB son tangentes a S, tenemos

$$|\overline{PB}| = |\overline{PF}|. \qquad (1)$$

Sea α el ángulo formado por π y π_1. Este es también el ángulo que forma el plano π_1 y la recta PA y el *mismo ángulo* formado por π_1 y la recta trazada desde *cualquier punto* de C perpendicular

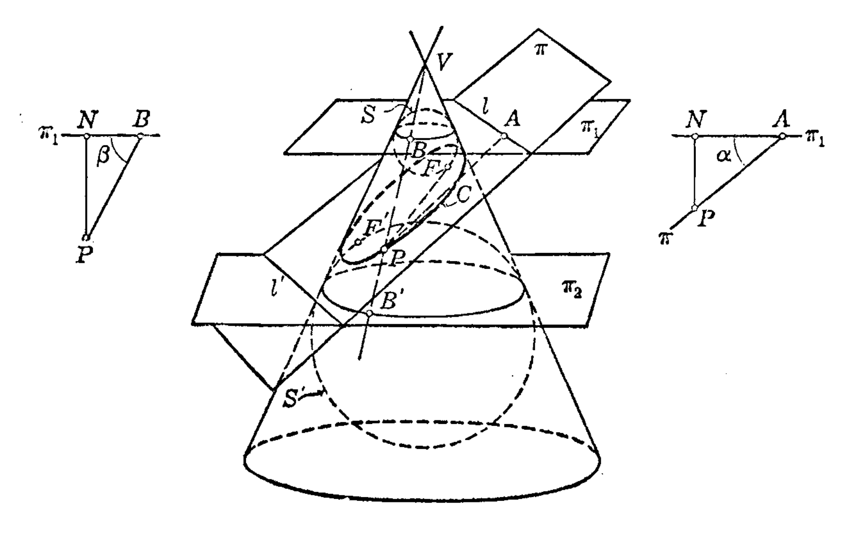


Fig. 107

a l. Por P tracemos una perpendicular PN a π_1. Tracemos también el segmento AN en π_1. Esto nos da el triángulo rectángulo PAN indicado en la sección vertical de la derecha en la figura 107. Por tanto,

$$|\overline{PN}| = |\overline{PA}| \operatorname{sen} \alpha. \qquad (2)$$

Sea β el ángulo formado por π_1 y *cualquier* generatriz del cono. Este ángulo es *constante* para un cono circular recto dado. Tracemos el segmento BN en π_1. Esto nos da el triángulo rectángulo PNB indicado en la sección vertical de la izquierda de la figura 107. Por tanto,

$$|\overline{PN}| = |\overline{PB}| \operatorname{sen} \beta. \qquad (3)$$

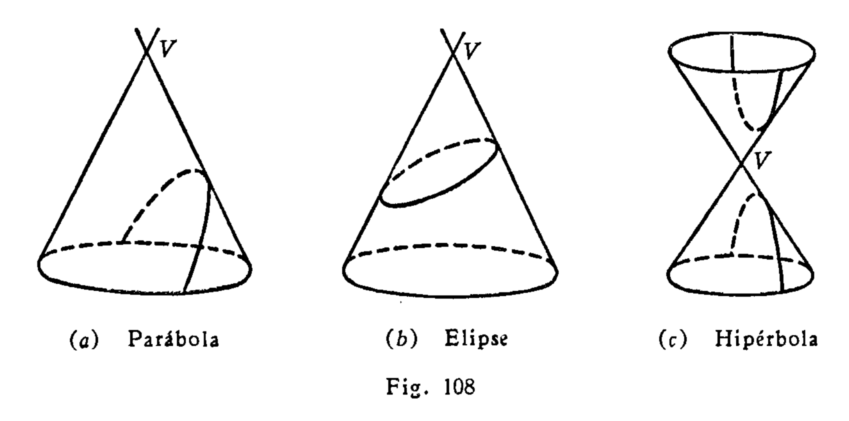
De (1), (2) y (3), tenemos

$$\frac{|\overline{PF}|}{|\overline{PA}|} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}. \qquad (4)$$

Para cada plano secante π, el ángulo α es constante; también el ángulo β, como acabamos de ver, es constante. Por tanto, el segundo miembro de (4) es una constante positiva que puede designarse por e, de manera que

$$\frac{|\overline{PF}|}{|\overline{PA}|} = e.$$

Pero esta relación es, precisamente, la condición geométrica (1) del Artículo 75 de la definición general de cónica. Por tanto, C es una



(*a*) Parábola (*b*) Elipse (*c*) Hipérbola

Fig. 108

cónica que tiene el foco F y la directriz correspondiente l. Análogamente, podemos demostrar que F' y l' son, respectivamente, un foco y una directriz correspondientes de C.

El ángulo β es una constante para un cono dado, pero el ángulo α varía a medida que el plano secante π toma diferentes posiciones. Si $\alpha = \beta$, la ecuación (4) muestra que $e = 1$, y la sección es una parábola; en este caso, el plano π es paralelo a una generatriz del cono y, por tanto, corta solamente una hoja de la superficie cónica, como se indica en la figura 108 (*a*). Si $\alpha < \beta$, la ecuación (4) indica que $e < 1$, y la sección es una elipse; en este caso, el plano π corta todas las generatrices de la superficie del cono, como se ve en la figura 108 (*b*). En particular, si $\alpha = 0$, el plano π es perpendicular al eje del cono, y la sección es una circunferencia. Finalmente, si $\alpha > \beta$, la ecuación (4) indica que $e > 1$, y la sección es una hipérbola; en

este caso, el plano π corta a las dos hojas o ramas de la superficie cónica, como se ve en la figura 108 (*c*).

Podemos anotar aquí también algunos de los casos límite de las secciones cónicas. Así, consideremos el caso en que el plano secante π pasa por el vértice V del cono. Si $\alpha < \beta$, el plano π no corta a ninguna generatriz del cono, y tenemos un solo punto, el vértice V. Si $\alpha = \beta$, el plano π es tangente a la superficie a lo largo de una generatriz del cono, y tenemos una sola recta. Si $\alpha > \beta$, el plano pasa por dos generatrices distintas del cono, y tenemos como sección un par de rectas que se cortan en el vértice.

CAPITULO X

COORDENADAS POLARES

79. Introducción. Hasta este punto, en nuestro estudio de propiedades geométricas por métodos analíticos, hemos utilizado un solo sistema de coordenadas. Ahora vamos a introducir y emplear otro sistema conocido como *sistema de coordenadas polares*. En vista de la utilidad demostrada del sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, el lector puede pensar que no hay necesidad de considerar otro sistema. Pero veremos, sin embargo, que para ciertas curvas y tipos de lugares geométricos el uso de coordenadas polares presenta algunas ventajas sobre las coordenadas rectangulares.

80. Sistema de coordenadas polares. Por medio de un sistema de coordenadas en un plano, es posible localizar cualquier punto del plano. En el sistema rectangular esto se efectúa refiriendo el punto a dos rectas fijas perpendiculares llamadas ejes de coordenadas (Art. 4). En el sistema polar, un punto se localiza especificando su posición relativa con respecto a una recta fija y a un punto fijo de esa recta. La recta fija se llama *eje polar;* el punto fijo se llama *polo*. Sea (figura 109) la recta horizontal OA el eje polar y el punto O el polo. Sea P un punto cualquiera en el plano coordenado. Tracemos el segmento OP y designemos su longitud por r. Llamemos θ al ángulo AOP. Evidentemente, la posición del punto P con relación al eje polar y al polo es determinada cuando se conocen r y θ. Estas dos cantidades se llaman las *coordenadas polares* del punto P; en particular, r se llama *radio vector* y θ *ángulo polar*,

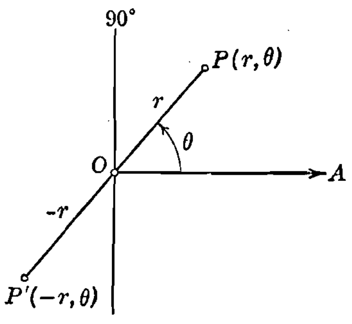


Fig. 109

ángulo vectorial o *argumento* de P. Las coordenadas polares de un punto se indican dentro de un paréntesis, escribiéndose primero el radio vector. Así, las coordenadas de P se escriben (r, θ). La línea recta que pasa por el polo y es perpendicular al eje polar se llama el *eje a 90°*.

El ángulo polar θ se mide como en Trigonometría considerando el eje polar como lado inicial y el radio vector como lado final del ángulo (Apéndice IC, 1), es decir, *partiendo del* eje polar hacia el radio vector; se considera positivo o negativo según que el sentido seguido sea opuesto al de las manecillas de un reloj o el mismo. Algunos autores, siguiendo los convenios hechos en Trigonometría, consideran que el radio vector nunca debe ser considerado como negativo; otros autores, en cambio, admiten que el radio vector puede tomar todos los valores reales. Nosotros seguiremos este último convenio. Según esto, si un punto tiene un radio vector negativo, se mide primero el ángulo polar de la manera ordinaria, y después se toma el radio vector en la prolongación del lado final. Así, un punto P', de coordenadas $(-r, \theta)$, se localiza como se indica en la figura 109.

Es evidente que un par de coordenadas polares (r, θ) determina uno y solamente un punto en el plano coordenado. El recíproco, en cambio, no es verdadero, porque un punto P determinado por las coordenadas (r, θ) está también determinada por cualquiera de los pares de coordenadas representadas por $(r, \theta + 2\pi n)$, en donde π está dado en radianes y n es un entero cualquiera. El punto P puede determinarse también por cualquiera de los pares de coordenadas representados por $(-r, \theta + \pi n)$, en donde n es un entero impar cualquiera. Mientras el sistema rectangular establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del plano y un par de números reales, esta correspondencia no es única en el sistema polar, porque un punto puede estar representado por uno cualquiera de un número infinito de pares de coordenadas polares. Es esta carencia de reciprocidad única en el sistema polar la que nos conduce, en algunos casos, a resultados que difieren de los obtenidos en el sistema rectangular.

Para la mayor parte de nuestros propósitos, un par de coordenadas polares es suficiente para cualquier punto en el plano. Como nuestra capacidad de selección en este respecto es ilimitada, convendremos, a menos que se especifique lo contrario, en tomar el radio vector r de un punto particular como positivo y su ángulo polar θ comprendido entre cero y el ángulo positivo más pequeño menor que 360°, de manera que la variación de los valores de θ está dada por

$$0° \leq \theta < 360°.$$

A tal par lo llamaremos *par principal* de coordenadas polares del punto.

El ángulo polar puede expresarse en grados o radianes, pero el lector debe observar que los ángulos expresados en radianes vienen dados por números abstractos (Apéndice IC; 4). Así, un ángulo polar de $\frac{\pi}{2}$ significa $\frac{\pi}{2}$ radianes, o sea, 90°; el ángulo polar 2 significa 2 radianes, que equivalen a 114° 35,5′ (aproximadamente).

El trazo de puntos en el sistema polar se facilita considerablemente usando papel coordenado polar, que consiste en una serie de circunfe-

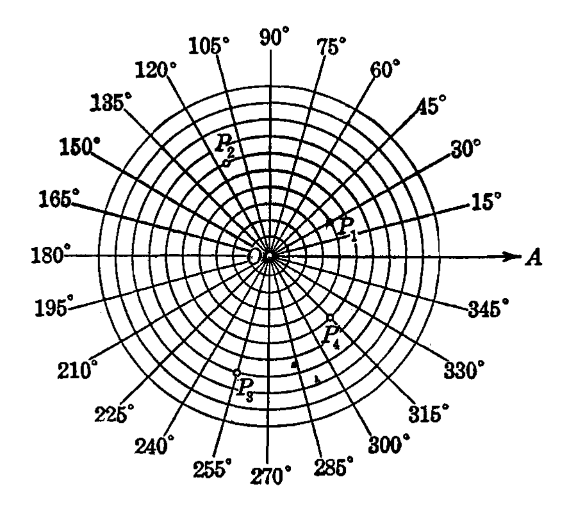


Fig. 110

rencias concéntricas y rectas concurrentes. Las circunferencias tienen su centro común en el polo, y sus radios son múltiplos enteros del radio más pequeño tomado como unidad de medida. Todas las rectas pasan por el polo, y los ángulos formados por cada par de rectas consecutivas son iguales. Un ejemplo de este papel está representado en la figura 110 en donde se han trazado los puntos

$$P_1\left(4,\ \frac{\pi}{6}\right),\quad P_2(6,\ 2),\quad P_3(-7,75^\circ)\ \text{ y }\ P_4\left(5,\ \frac{7\pi}{4}\right).$$

Las coordenadas del polo O pueden representarse por $(0,\ \theta)$, en donde θ es un ángulo cualquiera.

81. Paso de coordenadas polares a rectangulares y viceversa. Las coordenadas rectangulares $(x,\ y)$ de cualquier punto de un plano implican solamente dos variables, x y y. Por tanto, la ecuación de

cualquier lugar geométrico en un sistema de coordenadas rectangulares en un plano, contiene una o ambas de estas variables, pero no otras. Por esto es apropiado llamar a una ecuación de esta clase la *ecuación rectangular* del lugar geométrico.

Las coordenadas polares (r, θ) de cualquier punto de un plano implican solamente dos variables, r y θ, de manera que la ecuación de cualquier lugar geométrico en el plano coordenado polar contiene una o ambas variables, pero no otras. Tal ecuación se llama, de acuerdo con esto, la *ecuación polar* del lugar geométrico. Así, la ecuación $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $r = 4 \cos \theta$ son las ecuaciones polares de dos lugares geométricos planos.

Para un lugar geométrico determinado, conviene, frecuentemente, saber transformar la ecuación polar en la ecuación rectangular, y recíprocamente. Para efectuar tal transformación debemos conocer las relaciones que existen entre las coordenadas rectangulares y las coordenadas polares de cualquier punto del lugar geométrico. Se obtienen relaciones particularmente simples cuando el polo y el eje polar del sistema polar se hacen coincidir, respectivamente, con el origen y la parte positiva del eje X del sistema rectangular, tal como se indica en la figura 111. Sea P un punto cualquiera que tenga por coordenadas rectangulares (x, y) y por coordenadas polares (r, θ), Entonces, de la figura 111, se deducen inmediatamente las relaciones

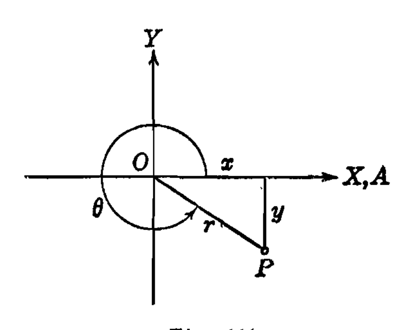


Fig. 111

$$x = r \cos \theta, \tag{1}$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta, \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{3}$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \tag{4}$$

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{5}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{6}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{7}$$

Consideremos primero el paso de una ecuación rectangular a su forma polar. La ecuación dada contiene como máximo las dos variables x y y. Por tanto, si sustituímos la x y la y por sus valores dados por las ecuaciones (1) y (2), respectivamente, obtenemos la ecuación polar directamente, aunque no siempre en su forma más simple. La ecuación (3) puede usarse algunas veces ventajosamente en esta transformación.

Veamos ahora la transformación de una ecuación polar a su forma rectangular. La ecuación dada contiene como máximo las dos variables r y θ. Podemos usar, además de las fórmulas (1), (2) y (3), las relaciones (4) y (5) que expresan a θ y a r, respectivamente, en función de x y y. También, si la ecuación polar contiene algunas funciones trigonométricas de θ, podemos expresar primero tales funciones en función de sen θ y cos θ, y entonces usar la fórmulas (6) y (7).

Un resumen de los resultados anteriores viene dado en el teorema siguiente:

TEOREMA 1. *Si el polo y el eje polar del sistema de coordenadas polares coinciden, respectivamente, con el origen y la parte positiva del eje* X *de un sistema de coordenadas rectangulares, el paso de uno a otro de estos dos sistemas puede efectuarse por medio de las siguientes fórmulas de transformación:*

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{sen} \theta = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \theta = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Ejemplo 1. Hallar las coordenadas rectangulares del punto P cuyas coordenadas polares son $(4, 120°)$.

Solución. En este caso, $r = 4$ y $\theta = 120°$. Por tanto, por el teorema 1,

$$x = r \cos \theta = 4 \cos 120° = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

y

$$y = r \operatorname{sen} \theta = 4 \operatorname{sen} 120° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

de manera que las coordenadas rectangulares de P son $(-2, 2\sqrt{3})$.

Ejemplo 2. Hallar un par de coordenadas polares del punto P cuyas coordenadas rectangulares son $(3, -5)$.

Solución. En este caso, $x = 3$ y $y = -5$. Por tanto, por el teorema 1,

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2} = \pm \sqrt{9 + 25} = \pm \sqrt{34}$$

y

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{5}{3}\right).$$

Ahora tenemos un número ilimitado de valores para θ de donde tenemos que escoger uno. De acuerdo con lo dicho en el Artículo 80 para el par principal de coordenadas polares, tomaremos r como positivo y para θ el ángulo positivo más pequeño, menor que 360°. Evidentemente, como se ve en la figura 112,

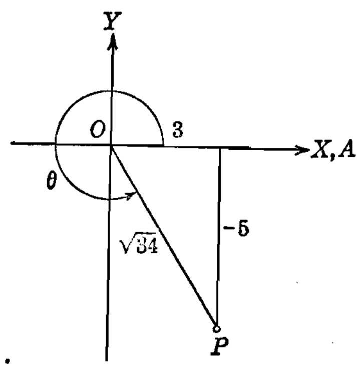


Fig. 112

θ está en el cuarto cuadrante; su valor es 300° 58′. Por tanto, el par principal de coordenadas polares de P es

$$(\sqrt{34},\ 300^\circ\, 58').$$

Ejemplo 3. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico cuya ecuación rectangular es

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

Solución. Por el teorema 1 podemos reemplazar $x^2 + y^2$ por r^2, x por $r \cos \theta$, y y por r sen θ. Por tanto, la ecuación polar buscada es

$$r^2 - 4r \cos \theta - 2r \operatorname{sen} \theta + 1 = 0.$$

Ejemplo 4. Hallar la ecuación rectangular del lugar geométrico cuya ecuación polar es

$$r = \frac{2}{1 - \cos \theta}.$$

Solución. Antes de sustituir en la ecuación dada, será conveniente quitar denominadores. Entonces tenemos

$$r - r \cos \theta = 2.$$

Sustituyendo r y $r \cos \theta$ por sus valores en función de x y y dados por el teorema 1, obtenemos

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} - x = 2.$$

Si trasponemos $-x$, elevamos al cuadrado y simplificamos, obtenemos la ecuación rectangular de la parábola

$$y^2 = 4x + 4.$$

EJERCICIOS. Grupo 37

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. En un sistema polar trazar los siguientes puntos:

$$P_1(1,\ 135°),\quad P_2\left(-2,\ \frac{\pi}{3}\right),\quad P_3(3,\ 75°),\quad P_4\left(-4,\ \frac{2\pi}{3}\right).$$

2. Trazar los siguientes puntos en coordenadas polares:

$$P_1\left(5,\ \frac{5\pi}{4}\right),\quad P_2(-2, 210°),\quad P_3\left(-3,\ \frac{5\pi}{6}\right),\quad P_4(3\sqrt{2},\ 135°).$$

3. Construir el triángulo cuyos vértices son

$$P_1(5, 60°),\quad P_2\left(-2,\ \frac{7\pi}{4}\right)\ \text{y}\ P_3(-4,\ 150°).$$

4. Para cada uno de los puntos P_1 y P_2 del ejercicio 1, hallar tres pares de coordenadas polares.

5. Un cuadrado de lado $2a$ tiene su centro en el polo y dos de sus lados son paralelos al eje polar. Hallar el par principal de coordenadas polares de cada uno de sus cuatro vértices.

6. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son $(0, 73°)$ y $(1,\ \pi)$. Hallar el par principal de coordenadas polares del tercer vértice. (Dos casos.)

7. Un hexágono regular tiene su centro en el polo y dos lados paralelos al eje polar. Si la longitud de un lado es igual a dos unidades, hallar el par principal de coordenadas polares de cada uno de sus seis vértices.

8. Un punto P se mueve de tal manera que para todos los valores de su ángulo polar, su radio vector permanece constante e igual a 2. Identificar y trazar el lugar geométrico de P.

9. Un punto P se mueve de tal manera que para todos los valores de sus radios vectores, su ángulo polar permanece constante e igual a $\frac{\pi}{4}$. Identificar y trazar el lugar geométrico de P.

10. Hallar las coordenadas rectangulares de los cuatro puntos del ejercicio 2.

11. Hallar el par principal de coordenadas polares de cada uno de los puntos cuyas coordenadas rectangulares son $(-2,\ 3)$ y $(3,\ -2)$.

En cada uno de los ejercicios 12-20, pasar la ecuación rectangular dada a su forma polar.

12. $x^2 + y^2 = 4.$
13. $5x - 4y + 3 = 0.$
14. $2x^2 + 2y^2 + 2x - 6y + 3 = 0.$
15. $2x - y = 0.$
16. $x^2 - y^2 = 4.$
17. $x^2 + y^2 - 2y = 0.$
18. $xy = 2.$
19. $x^2 - 4y - 4 = 0.$
20. $x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0.$

En cada uno de los ejercicios 21-30, pasar la ecuación polar dada a su forma rectangular.

21. $r \cos \theta - 2 = 0.$
22. $r = 4 \operatorname{sen} \theta.$
23. $r = 9 \cos \theta.$
24. $r - r \cos \theta = 4.$

25. $r = \frac{2}{2 - \cos\theta}$.

26. $r = \frac{4}{1 + 2\cos\theta}$.

27. $\operatorname{sen}^2\theta - 4r\cos^3\theta = 0$.

28. $r = 2\sec^2\frac{\theta}{2}$.

29. $r = 2(1 - \cos\theta)$.

30. $r^2 = 4\cos 2\theta$.

82. Trazado de curvas en coordenadas polares. Consideremos ahora el trazado de curvas dadas en ecuaciones polares, de la misma manera que lo hicimos para la construcción de gráficas de ecuaciones rectangulares (Art. 19). Para nuestros fines, la construcción de curvas en coordenadas polares constará de los seis pasos siguientes:

1. Determinación de las intersecciones con el eje polar y con el eje a 90°.
2. Determinación de la simetría de la curva con respecto al eje polar, al eje a 90° y al polo.
3. Determinación de la extensión del lugar geométrico.
4. Cálculo de las coordenadas de un número suficiente de puntos para obtener una gráfica adecuada.
5. Trazado de la gráfica.
6. Transformación de la ecuación polar a rectangular.

El lector debe observar, en particular, que la construcción de curvas en coordenadas polares requiere ciertas precauciones que no se necesitan para las coordenadas rectangulares. Por ejemplo, un punto, en un sistema de coordenadas rectangulares, tiene un único par de coordenadas, pero un punto, en coordenadas polares, tiene, como vimos (Art. 80), un número infinito de pares de coordenadas. Puede ocurrir, entonces, que mientras un par de coordenadas polares de un punto P de un lugar geométrico puede satisfacer su ecuación, otro par de coordenadas no la verifica. Esto tiene lugar, por ejemplo, en la ecuación $r = a\theta$, $a \neq 0$, que representa una curva llamada espiral de Arquímedes. Además, un lugar geométrico puede estar representado, algunas veces, por más de una ecuación polar. Así, la circunferencia cuyo centro está en el polo y cuyo radio es igual a a, puede representarse por una de las dos ecuaciones $r = a$ o $r = -a$. Las ecuaciones que representan el mismo lugar geométrico se llaman *ecuaciones equivalentes*.

1. *Intersecciones*. Las intersecciones con el eje polar, cuando existen, pueden obtenerse resolviendo la ecuación polar dada para r, cuando a θ se le asignan sucesivamente los valores 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, y, en general, el valor $n\pi$, en donde n es un entero cualquiera. Análogamente, si existen algunas intersecciones con el eje a 90°, pueden obtenerse asignando a θ los valores $\frac{n}{2}\pi$, en donde n es un número impar cualquiera. Si existe un valor de θ para el cual sea $r = 0$, la gráfica pasa por el polo.

2. *Simetría*. Si la curva es simétrica con respecto al eje polar, entonces (Art. 16) para cada punto P existe un punto P', también de la curva, tal que el segmento PP' es bisecado perpendicularmente por el eje polar, como se ve en la figura 113. Si M es el punto medio del segmento PP', de los triángulos rectángulos OPM y $OP'M$ se deduce que las coordenadas de P' son $(r, -\theta)$ y $(-r, \pi - \theta)$. Tenemos, pues, dos pruebas para simetría con respecto al eje polar, a saber, que la ecuación polar dada no varíe al reemplazar θ por $-\theta$, o al reemplazar θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$. Debemos, sin embargo, hacer una importante adición a este enunciado. Así, una circunferencia con centro en el polo y radio igual a a tiene por ecuación polar $r = a$. Esta ecuación no satisface la segunda prueba aunque su lugar geométrico es, evidentemente, simétrico con respecto al eje polar. Pero la segunda prueba cambia a la ecuación dada en $r = -a$, que, como hemos anotado antes, es una ecuación equivalente. Por tanto, diremos que la simetría con respecto al eje polar existe también si las sustituciones indicadas cambian a la ecuación dada en una ecuación equivalente.

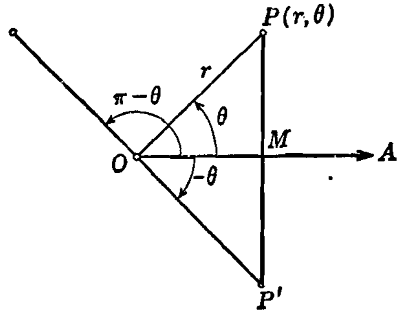


Fig. 113

Se deja al estudiante, como ejercicio, el obtener las pruebas para simetría con respecto al eje a 90° y respecto el polo, que establece el siguiente

Teorema 2. *Las pruebas para averiguar la simetría del lugar geométrico de una ecuación polar están dadas en la siguiente tabla.*

Simetría con respecto al	La ecuación polar no se altera, o se transforma en una ecuación equivalente cuando
Eje polar	a) se sustituye θ por $-\theta$, o b) se sustituye θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$.
Eje a 90°	a) se sustituye θ por $\pi - \theta$, o b) se sustituye θ por $-\theta$ y r por $-r$.
Polo	a) se sustituye θ por $\pi + \theta$, o b) se sustituye r por $-r$.

3. *Extensión del lugar geométrico.* Para determinar la extensión de la gráfica de un lugar geométrico dado en coordenadas polares, primero se despeja r en función de θ, de modo que tenemos

$$r = f(\theta). \qquad (1)$$

Si r es finito para todos los valores de θ, se trata de una curva cerrada. Si, en cambio, r se vuelve infinita para ciertos valores de θ la gráfica no puede ser una curva cerrada. Para valores de θ que hacen a r compleja no hay curva; tales valores de θ constituyen intervalos excluídos del lugar geométrico. Si la gráfica es una curva cerrada, es útil, frecuentemente, determinar los valores máximo y mínimo de r.

4. *Cálculo de las coordenadas de algunos puntos.* Asignando un valor particular a θ, podemos obtener el valor o valores reales correspondientes de r, cuando existen, de la ecuación (1) anterior. Para la mayoría de nuestros fines, será suficiente tomar valores de θ a intervalos de 30°.

5. *Construcción de la gráfica.* Los puntos del lugar geométrico pueden trazarse directamente a partir de los valores de las coordenadas obtenidas en el paso 4. Una curva continua que pase por los puntos localizados será, por lo general, la gráfica buscada. Es importante ver si la gráfica concuerda con los resultados obtenidos en los pasos 1, 2 y 3.

6. *Transformación de la ecuación polar a su forma rectangular.* Esta transformación puede efectuarse como se discutió en el Artículo 81. La forma rectangular se puede usar para comprobar la gráfica.

Ejemplo 1. Trazar la curva cuya ecuación es

$$r = 2(1 - \cos\theta). \qquad (2)$$

Solución. 1. *Intersecciones.* De la ecuación (2) se deduce que para $\theta = 0°$, es $r = 0$, y para $\theta = \pi$ es $r = 4$. Ningunos valores nuevos de r se obtienen para $\theta = -\pi$, $\pm 2\pi$, etc. Por tanto, el polo está sobre la curva, y la otra intersección con el eje polar está dada por el punto $(4, \pi)$.

Para $\theta = \frac{\pi}{2}$ es $r = 2$; para $\theta = -\frac{\pi}{2}$ es $r = 2$. Ningunos valores nuevos de r se obtienen para $\theta = \pm\frac{3}{2}\pi$, $\pm\frac{5}{2}\pi$, etc. Por tanto, las intersecciones con el eje a 90° son los puntos $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$.

2. *Simetría.* Si se sustituye θ por $-\theta$, la ecuación (2) no se altera, ya que $\cos(-\theta) = \cos\theta$. Por tanto, la curva dada por la ecuación (2) es simétrica con respecto al eje polar.

Aplicando las otras pruebas del teorema 2, el estudiante debe demostrar que el lugar geométrico no es simétrico ni con respecto al eje a 90° ni con respecto al polo.

3. *Extensión.* Como el valor absoluto de $\cos\theta$ no es nunca mayor que 1 para cualquier valor de θ, la ecuación (2) muestra que r es finito para todos los valores de θ y, por tanto, se trata de una cuva cerrada. El valor máximo de r se obtiene cuando $1 - \cos\theta$ es un máximo, y esto ocurre cuando $\theta = \pi$. Por tanto, el valor máximo de r es 4. Análogamente, se halla el valor mínimo de r, que resulta ser 0 para $\theta = 0°$.

4. *Cálculo de las coordenadas de algunos puntos.* Las coordenadas polares de algunos puntos de la curva pueden obtenerse, a partir de la ecuación (2), asignando valores a θ. Como la curva es simétrica con respecto al eje polar, no es necesario tomar valores de θ mayores de 180°. En la tabla que damos a continuación figuran algunos valores correspondientes de r y θ. La tabla del Apéndice IC, 5, es muy útil para estos cálculos.

θ	$\cos\theta$	$1-\cos\theta$	r
0°	1	0	0
30°	0,866	0,134	0,268
60°	0,5	0,5	1
90°	0	1	2
120°	− 0,5	1,5	3
150°	− 0,866	1,866	3,732
180°	− 1	2	4

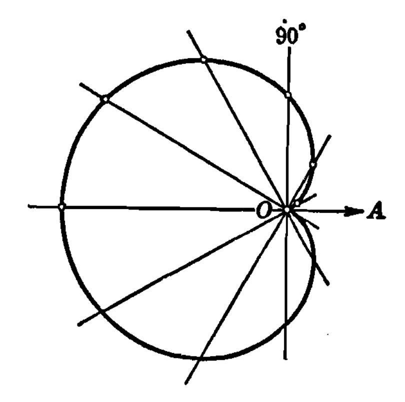


Fig. 114

5. *Trazado de la curva.* La curva que se busca es la representada en la figura 114, y se la conoce con el nombre de *cardioide*.

6. *Ecuación rectangular.* Si multiplicamos la ecuación (2) por r, obtenemos

$$r^2 = 2r - 2r\cos\theta,$$

la cual, por el teorema 1, Artículo 81, se convierte en

$$x^2 + y^2 = 2r - 2x.$$

Trasponiendo $-2x$ al primer miembro, y elevando al cuadrado, tenemos

$$(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4r^2,$$

de donde

$$(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2),$$

que es la ecuación rectangular buscada.

El lector puede observar las ventajas que a veces tienen las coordenadas polares, comparando el trabajo que requiere el trazado de la cardioide a partir de su ecuación polar y de su ecuación rectangular.

Ejemplo 2. Trazar la curva cuya ecuación es

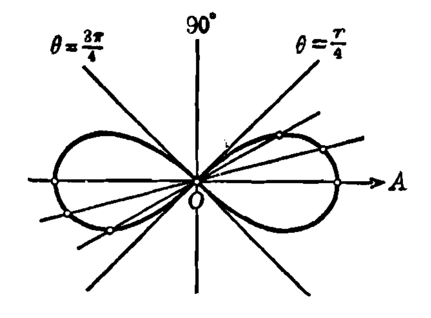
$$r^2 = 4\cos 2\theta. \qquad (3)$$

Solución. 1. *Intersecciones.* Las intersecciones con el eje polar son los dos puntos $(\pm 2,\ 0)$ y $(\pm 2,\ \pi)$. Para $\theta = \frac{n}{2}\pi$, en donde n es un número impar cualquiera, r es complejo, y, aparentemente, no hay intersecciones con el eje a 90°. Pero, para $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = 0$, de manera que el polo está sobre la curva.

2. *Simetría.* La ecuación (3) satisface todas las pruebas de simetría del teorema 2. Por tanto, la curva es simétrica con respecto al eje polar, al eje a 90° y el polo.

3. *Extensión.* El valor máximo de $\cos 2\theta$ es 1. Por tanto, de la ecuación (3), el valor máximo de r es 2, lo que nos dice que se trata de una curva cerrada. Cuando el ángulo 2θ está comprendido entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$, $\cos 2\theta$ es negativo y los valores de r son complejos. Luego, no hay curva entre las rectas $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$.

4. *Cálculo de coordenadas.* Las coordenadas de varios puntos pueden obtenerse, directamente, de la ecuación (3). Teniendo en cuenta la simetría del lugar geométrico y el intervalo de variación de los valores excluídos de θ, basta asignar a θ solamente valores de 0° a 45°. Las coordenadas de algunos puntos figuran en la tabla siguiente.



θ	$\cos 2\theta$	$r = \pm 2\sqrt{\cos 2\theta}$
0°	1	± 2
15°	0,866	$\pm 1,86$
30°	0,5	$\pm 1,41$
45°	0	0

Fig. 115

5. *Construcción de la curva.* La curva buscada, trazada en la figura 115, es conocida con el nombre de *lemniscata de Bernoulli*. El lector debe notar que, aunque en la ecuación (3), aparece el ángulo 2θ, se trazan siempre los valores del *ángulo sencillo* θ y los valores correspondientes de r.

6. *Ecuación rectangular.* Como las ecuaciones de transformación del teorema 1, Artículo 81, contienen funciones de un ángulo sencillo, escribimos la ecuación (3) en la forma (Apéndice IC, 7)

$$r^2 = 4(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta).$$

Multiplicando ambos miembros por r^2, obtenemos

$$r^4 = 4(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta),$$

de donde, por medio de las ecuaciones de transformación, obtenemos la ecuación rectangular buscada

$$(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2).$$

EJERCICIOS. Grupo 38

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar las pruebas (*a*) y (*b*) del teorema 2, Art. 82, para la simetría con respecto al eje a 90°.

2. Demostrar las pruebas (*a*) y (*b*) del teorema 2, Art. 82, para establecer la simetría de la curva con respecto al polo.

En cada uno de los ejercicios 3-30, trazar la curva cuya ecuación se da. Las cantidades a y b son constantes diferentes de cero a las que pueden asignárseles valores numéricos para la operación del trazado de la gráfica. Usese papel coordenado polar.

3. $r = 2 \sec \theta$.
4. $r = a \cos \theta$.
5. $4r \cos \theta - 3r \operatorname{sen} \theta = 12$.
6. $r = a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta$.
7. $r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 2$.
8. $r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$.
9. $r = \frac{4}{2 - \cos \theta}$.
10. $r = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$.
11. $r = a \csc^2 \frac{\theta}{2}$.
12. $r \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta = 4a$.
13. $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 4$.
14. $r^2(4 + 5 \operatorname{sen}^2 \theta) = 36$.
15. $r = a(1 + \operatorname{sen} \theta)$ (cardioide).
16. $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ (lemniscata).
17. $r = a \cos^2 \frac{\theta}{2}$.
18. $r^2 \cos^3 \theta = a^2 \operatorname{sen} \theta$.
19. $\operatorname{sen}^3 \theta - 4r \cos^3 \theta = 0$.
20. $r = a \operatorname{sen} 2\theta$ (rosa de 4 hojas).
21. $r = a \cos 5\theta$.
22. $r = a \operatorname{sen} 4\theta$.
23. $r = 2a \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \theta$ (cisoide).
24. $r\theta = a$ (espiral hiperbólica o recíproca).
25. $r^2 = a^2 \theta$ (espiral parabólica).
26. $\log r = a\theta$ (espiral logarítmica o equiangular).
27. $r^2\theta = a^2$ (lituus).
28. $r = a \csc \theta \pm b$ (concoide).
29. $r = a - b \cos \theta$ (caracol).
30. $r = a \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{3}$.

83. Intersecciones de curvas dadas en coordenadas polares. El método para obtener los puntos de intersección de dos curvas en coordenadas polares es semejante al empleado en coordenadas rectangulares (Art. 21). Las soluciones del sistema formado por las ecuaciones

de los lugares geométricos, representan las coordenadas r y θ de los puntos de intersección. Debemos hacer notar, sin embargo, que en coordenadas polares este problema puede presentar dificultades que no se presentan en coordenadas rectangulares, debido a que las coordenadas polares de un punto no son únicas. Por esta razón puede ocurrir que, para un punto particular P de intersección de dos curvas, las coordenadas polares de P que satisfacen la ecuación de una de las curvas no satisfagan la ecuación de la otra, pero satisfagan a una de sus ecuaciones equivalentes. Por esto, con el fin de evitar tales dificultades, es mejor, generalmente, dibujar ambos lugares geométricos con referencia al mismo polo y eje polar y considerar entonces cada punto de intersección individualmente, tal como indique la figura.

Ejemplo. Hallar, analítica y gráficamente, los puntos de intersección de las curvas cuyas ecuaciones son

$$r = a\theta, \quad a \neq 0, \tag{1}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}. \tag{2}$$

Solución. La ecuación (1) representa la *espiral de Arquímedes*, y la ecuación (2) una recta que pasa por el polo, como se ha representado en la figura 116. La porción punteada de la espiral corresponde a los valores negativos de θ en la ecuación (1). Ambas líneas son ilimitadas y, evidentemente, tienen un número infinito de puntos de intersección. Ahora, si sustituímos el valor de θ dado por la ecuación (2), en la ecuación (1) hallamos $r = \frac{\pi a}{4}$, es decir, obtenemos las coordenadas $\left(\frac{\pi a}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ de solamente un punto de intersección, el punto P_1. Pero la recta (2) puede estar representada también por su ecuación equivalente, $\theta = \frac{9\pi}{4}$, de la cual, junta con la ecuación (1), obtenemos las coordenadas $\left(\frac{9\pi a}{4}, \frac{9\pi}{4}\right)$ del punto de intersección P_2. De manera semejante, otra ecuación equivalente de la recta (2) es $\theta = -\frac{7\pi}{4}$, que da $P_3\left(-\frac{7\pi a}{4}, -\frac{7\pi}{4}\right)$. Evidentemente, hay un número infinitamente grande de ecuaciones equivalentes de la recta (2) por medio de las cuales podemos obtener las coordenadas de cualquier número de puntos de intersección. El lector debe hallar las coordenadas del polo y de los puntos P_4 y P_5 de la figura 116, todos los cuales son puntos de intersección.

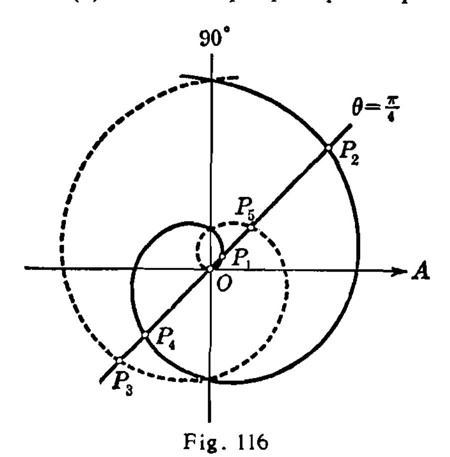


Fig. 116

84. Fórmula de la distancia entre dos puntos en coordenadas polares. Sean $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ (fig. 117) dos puntos dados cualesquiera. Se trata de hallar la distancia d entre P_1 y P_2, en donde $d = |\overline{P_1P_2}|$. Para ello emplearemos el par principal de coordenadas de P_1 y de P_2.

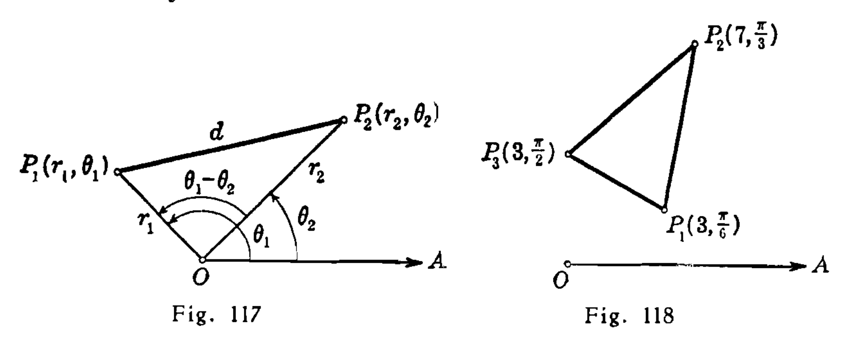


Fig. 117 Fig. 118

Tracemos los radios vectores de P_1 y P_2, formando así el triángulo OP_1P_2 en donde $|\overline{OP_1}| = r_1$, $|\overline{OP_2}| = r_2$, y el ángulo P_1OP_2 es igual a $\theta_1 - \theta_2$. Entonces, por la ley de los cosenos (Apéndice IC, 11). tenemos

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2),$$

de donde

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Este resultado nos dice:

TEOREMA 3. *La distancia* d *entre dos puntos cualesquiera* $P_1(r_1, \theta_1)$ *y* $P_2(r_2, \theta_2)$ *en coordenadas polares está dada por la fórmula*

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

NOTA. Esta fórmula para d puede obtenerse también por transformación en coordenadas polares de la fórmula de la distancia entre dos puntos dada en el teorema 2, Artículo 6, para coordenadas rectangulares.

Ejemplo. Demostrar que los puntos $P_1\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$, $P_2\left(7, \frac{\pi}{3}\right)$ y $P_3\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

Solución. El triángulo es el representado en la figura 118. Por el teorema 3, tenemos

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{58 - 21\sqrt{3}}$$

y $$|\overline{P_3P_2}| = \sqrt{3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{58 - 21\sqrt{3}}.$$

Por tanto, como $|\overline{P_1P_2}| = |\overline{P_3P_2}|$, el triángulo es isósceles.

EJERCICIOS. Grupo 39

En cada uno de los ejercicios 1-12, calcular, analítica y gráficamente, los puntos de intersección de las curvas dadas.

1. $r = 2 \operatorname{sen} \theta,$
   $r = 1.$

2. $r = 4 \cos \theta,$
   $r = 2.$

3. $\theta = \frac{\pi}{4},$
   $r = 3.$

4. $r \cos \theta = 4,$
   $r \operatorname{sen} \theta = 4.$

5. $r \cos \theta = 2,$
   $r = 3 \cos \theta.$

6. $r = \operatorname{sen} \theta,$
   $r = \cos \theta.$

7. $r^2 = 9 \cos 2\theta,$
   $r = 3\sqrt{2} \operatorname{sen} \theta.$

8. $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta,$
   $r = 2\sqrt{2} \cos \theta.$

9. $r = 1 + \cos \theta,$
   $r = \sqrt{3} \operatorname{sen} \theta.$

10. $r = \frac{3}{2 - \cos \theta},$
    $r \cos \theta = 1.$

11. $r = \csc^2 \frac{\theta}{2},$
    $3r = 8(1 + \cos \theta).$

12. $r - 2r \cos \theta = 1,$
    $r = \operatorname{sen} \theta.$

13. Hallar la distancia entre los puntos $P_1\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ y $P_2\left(5, \frac{7\pi}{4}\right)$.

14. Hallar la distancia entre los puntos $P_1\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ y $P_2\left(4, \frac{5\pi}{4}\right)$.

15. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son $(0, 19°)$, $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ y $(3, 0°)$.

16. Demostrar que los puntos $P_1\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$, $P_2\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ y $P_3(1, 0°)$ son los vértices de un triángulo equilátero.

17. Demostrar que $P\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ es el punto medio del segmento cuyos extremos son $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ y $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$.

18. Empleando las fórmulas de transformación de coordenadas rectangulares a polares (teorema 1, Art. 81), demuéstrese que la fórmula de la distancia polar del teorema 3 (Art. 84) puede obtenerse directamente a partir de la fórmula de la distancia en coordenadas rectangulares dadas en el teorema 2, Artículo 6.

19. Discutir la fórmula de la distancia dada en el teorema 3 (Art. 84) cuando los puntos P_1 y P_2 son colineales con el polo. Considerar los casos en que los puntos están del mismo lado y de lados opuestos del eje polar.

20. Discutir la fórmula de la distancia dada en el teorema 3 (Art. 84) cuando los puntos P_1 y P_2 están ambos sobre el eje polar. Considerar los casos en que los puntos están del mismo lado y de lados opuestos al polo.

21. Demostrar que la fórmula de la distancia dada en el teorema 3 (Art. 84) es verdadera cualesquiera que sean las posiciones de los puntos P_1 y P_2 en el plano coordenado polar.

[redacted]. Demostrar que el área K de un triángulo cuyos vértices son el polo y los puntos $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ está dada por la fórmula

$$K = \tfrac{1}{2} \,|\, r_1 r_2 \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2) \,|.$$

23. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el polo y los puntos $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ y $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$.

24. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos

$$P_1\left(2, \frac{2\pi}{3}\right), \quad P_2\left(3, \frac{\pi}{3}\right) \text{ y } P_3\left(1, \frac{\pi}{6}\right).$$

25. Hallar el área de un triángulo de vértices dados, cuando el polo está dentro del triángulo.

85. Ecuación de la recta en coordenadas polares. Si una recta pasa por el polo, su ecuación polar es, evidentemente, de la forma

$$\theta = k, \tag{1}$$

en donde k es una constante que representa el ángulo polar de cualquier punto de la recta. Para una recta particular, k puede tener un número infinito de valores. Por esto, convenimos en restringir k a valores no negativos menores de $180°$.

Consideremos ahora el caso en que la recta no pasa por el polo. Sea l (fig. 119) la recta. Desde el polo tracemos la normal ON a l, y sea (p, ω) el par principal de coordenadas polares de N, de manera que p sea positivo y que los valores de ω estén dados por

$$0° \leq \omega < 360° \tag{2}$$

Siguiendo el procedimiento usual de los problemas de lugares geométricos, sea $P(r, \theta)$ un punto cualquiera de la recta l. Entonces, del triángulo rectángulo OPN, tenemos

$$r \cos (\theta - \omega) = p, \tag{3}$$

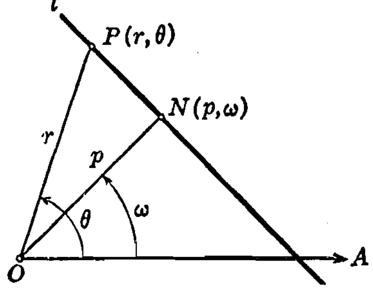


Fig. 119

que es la ecuación polar de la recta l. Evidentemente, por el significado de las cantidades p y ω y el intervalo de variación (2) para ω, la ecuación (3) es la ecuación polar equivalente a la ecuación normal de la recta en coordenadas rectangulares,

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0, \tag{4}$$

dada en el teorema 7 del Artículo 31. El lector debe verificar esto transformando la ecuación (4) en la ecuación (3). (Véase el ejercicio 20 del grupo 37, Art. 81.)

La consideración de los casos en que la recta l pasa por el polo, es perpendicular al eje polar, o es paralela a dicho eje, conduce a formas especiales de la ecuación (3) que son frecuentemente útiles. Estos resultados, combinados con los anteriores, están expresados en el siguiente

TEOREMA 4. *Si* (p, ω) *es el par principal de coordenadas polares del pie de la perpendicular trazada desde el polo a cualquier recta en el plano coordenado polar, la ecuación polar de la recta es*

$$r \cos(\theta - \omega) = p.$$

Si la recta pasa por el polo, su ecuación es de la forma

$$\theta = k,$$

siendo k *una constante que puede restringirse a valores no negativos menores de* 180°

Si la recta es perpendicular al eje polar y está a p *unidades del polo, su ecuación es de la forma*

$$r \cos \theta = \pm p, \quad p > 0,$$

debiendo tomar el signo positivo o negativo según que la recta esté a la derecha o a la izquierda del polo.

Si la recta es paralela al eje polar y está a p *unidades de él, su ecuación es de la forma*

$$r \operatorname{sen} \theta = \pm p, \quad p > 0,$$

debiéndose tomar el signo positivo o el negativo según que la recta esté arriba o abajo del eje polar.

86. Ecuación de una circunferencia en coordenadas polares. Sea $C(c, \alpha)$ el centro de una circunferencia cualquiera de radio a (figura 120). Sea $P(r, \theta)$ un punto cualquiera de la circunferencia. Tracemos el radio PC y los radios vectores de P y C, formando así el triángulo OPC. De este triángulo, por la ley de los cosenos (Apéndice IC, 11), resulta:

$$a^2 = r^2 + c^2 - 2cr \cos(\theta - \alpha)$$

o sea,

$$r^2 - 2cr \cos(\theta - \alpha) + c^2 = a^2 \qquad (1)$$

que es la ecuación polar de la circunferencia.

Los casos especiales de la ecuación (1) son a veces útiles y están comprendidos en el teorema siguiente :

TEOREMA 5. *La ecuación polar de una circunferencia de centro el punto* (c, α), *y radio igual a* a *es*

$$r^2 - 2cr \cos(\theta - \alpha) + c^2 = a^2.$$

Si su centro está en el polo, la ecuación polar es

$$r = a.$$

Si la circunferencia pasa por el polo y su centro está sobre el eje polar, su ecuación es de la forma

$$r = \pm 2a \cos\theta,$$

debiéndose tomar el signo positivo o el negativo según que el centro esté a la derecha o la izquierda del polo.

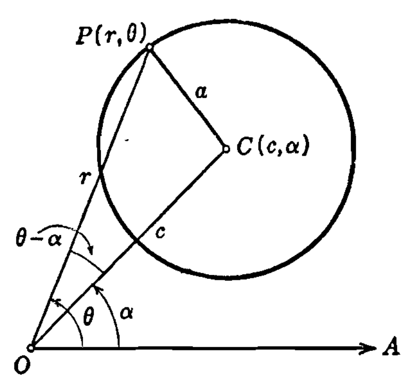


Fig. 120

Si la circunferencia pasa por el polo y su centro está sobre el eje a 90°, *su ecuación es de la forma*

$$r = \pm 2a \operatorname{sen}\theta,$$

debiéndose tomar el signo positivo o negativo según que el centro esté arriba o abajo del polo.

Ejemplo. Empleando solamente coordenadas polares, hallar el centro y el radio de la circunferencia

$$r = 3 \operatorname{sen}\theta - 3\sqrt{3}\cos\theta. \qquad (2)$$

Solución. Pongamos la ecuación (2) en la forma general de la ecuación de una circunferencia de centro (c, α) y radio a,

$$r^2 - 2cr\cos(\theta - \alpha) + c^2 = a^2. \qquad (1)$$

Para ello, multipliquemos ambos miembros de la ecuación (2) por r y traspongamos términos. Se obtiene:

$$r^2 - r(-3\sqrt{3}\cos\theta + 3\,\text{sen}\,\theta) = 0,$$

que, teniendo en cuenta la ecuación (1), podemos escribir en la forma

$$r^2 - 2cr\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2c}\cos\theta + \frac{3}{2c}\,\text{sen}\,\theta\right) = 0. \qquad (3)$$

Hagamos ahora

$$-\frac{3\sqrt{3}}{2c} = \cos\alpha \quad \text{y} \quad \frac{3}{2c} = \text{sen}\,\alpha. \qquad (4)$$

La expresión dentro del paréntesis de la ecuación (3) se convierte en

$$\cos\theta\cos\alpha + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha = \cos(\theta - \alpha),$$

y la ecuación en

$$r^2 - 2cr\cos(\theta - \alpha) = 0,$$

que es de la forma (1). Evidentemente la circunferencia pasa por el polo, ya que $c^2 = a^2$. Si elevamos al cuadrado ambos miembros de cada una de las ecuaciones (4), y sumamos, obtenemos

$$\frac{27}{4c^2} + \frac{9}{4c^2} = 1.$$

de donde $c = \pm 3$. Para el par principal de coordenadas polares del centro, tomamos $c = 3$, valor para el cual las ecuaciones (4) dan $\alpha = \frac{5\pi}{6}$. Por tanto, las coordenadas del centro de la circunferencia (2) son $\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$. También, como $c = a$, el radio es 3.

El estudiante debe dibujar la figura correspondiente a este ejemplo y comprobar los resultados usando coordenadas rectangulares.

87. Ecuación general de las cónicas en coordenadas polares. La ecuación polar de una cónica toma una forma particularmente sencilla y útil cuando uno de los focos (fig. 121) está en el polo y el eje focal coincide con el eje polar. Sea la recta l la directriz correspondiente del foco O; esta recta es perpendicular al eje polar, y sea D el punto de intersección. Designemos la distancia $|\overline{OD}|$, entre el foco y la directriz, por la cantidad positiva p. Sea $P(r, \theta)$ un punto cualquiera de la cónica. Desde P tracemos

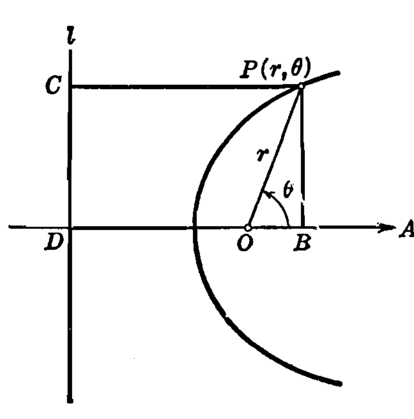


Fig. 121

las perpendiculares PB y PC al eje polar y a la directriz, respectivamente.

Para deducir la ecuación polar de la cónica, emplearemos la definición general dada en el Artículo 75. Según ella el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$\frac{|\overline{PO}|}{|\overline{PC}|} = e, \tag{1}$$

en donde e es la excentricidad. Ahora bien,

$$|\overline{PO}| = r$$

y

$$|\overline{PC}| = |\overline{DB}| = |\overline{DO}| + |\overline{OB}| = p + r \cos\theta .$$

Sustituyendo estos valores en (1), obtenemos

$$\frac{r}{p + r\cos\theta} = e,$$

de donde,

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta} \tag{2}$$

Podemos demostrar, recíprocamente, que cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2) satisface la condición geométrica (1) y, por tanto, está sobre el lugar geométrico. Según esto, la ecuación (2) es la ecuación buscada de la cónica.

La ecuación (2) se ha deducido en el supuesto de que la directriz está a la izquierda del polo. Si la directriz está a la derecha del polo y a p unidades de él, podemos demostrar, análogamente, que la ecuación de la cónica es

$$r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}. \tag{3}$$

De manera semejante, si el eje focal coincide con el eje a 90° de manera que la directriz sea paralela al eje polar y a p unidades de él, podemos demostrar que la ecuación de la cónica es de la forma

$$r = \frac{ep}{1 \pm e \operatorname{sen}\theta},$$

debiéndose tomar el signo positivo o el negativo según que la directriz esté arriba o abajo del eje polar.

Los resultados precedentes se resumen en el siguiente

TEOREMA 6. *Sea* e *la excentricidad de una cónica cuyo foco está en el polo y a* p *unidades de la directriz correspondiente.*

Si el eje focal coincide con el eje polar, la ecuación de la cónica es de la forma

$$r = \frac{ep}{1 \pm e \cos \theta},$$

en donde se debe tomar el signo positivo o el negativo según que la directriz esté a la derecha o a la izquierda del polo.

Si el eje focal coincide con el eje a 90°, *la ecuación de la cónica es de la forma*

$$r = \frac{ep}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta},$$

en donde se debe tomar el signo positivo o el negativo según que la directriz esté arriba o abajo del eje polar.

NOTA. Nos referiremos en adelante a las ecuaciones del teorema 6 como las *ecuaciones polares ordinarias de las cónicas.* El estudiante debe notar, sin embargo, que en cada caso en el polo está un foco y no el vértice de una parábola o el centro de una cónica central. Por esto, las ecuaciones rectangulares correspondientes no estarán en la forma canónica.

Ejemplo. Identificar la cónica cuya ecuación polar es

$$r = \frac{4}{2 + \cos \theta} \qquad (4)$$

Hallar las coordenadas polares del centro y vértices y las longitudes de los ejes y del lado recto.

Solución. La ecuación ordinaria de una cónica tiene la unidad como primer término del denominador. Por tanto, si dividimos numerador y denominador del segundo miembro de la ecuación (4) por 2, obtenemos la forma ordinaria

$$r = \frac{2}{1 + \frac{1}{2} \cos \theta}. \qquad (5)$$

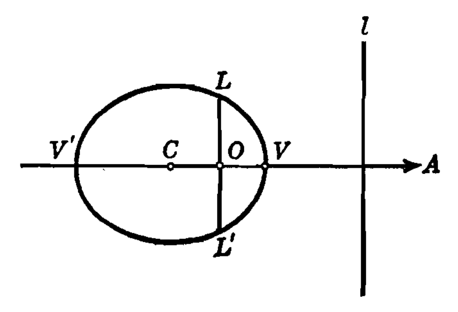


Fig. 122

Si comparamos la ecuación (5) con la ecuación ordinaria (3), vemos que la excentricidad es $e = \frac{1}{2}$. Por tanto, el lugar geométrico de la ecuación (4) es una elipse cuya posición en el plano coordenado polar está representada en la figura 122, en donde la recta l es la directriz correspondiente al foco que está en el polo O.

De la ecuación (5) tenemos que para $\theta = 0$ es $r = \frac{4}{3}$, y para $\theta = \pi$ es $r = 4$. Por tanto, las coordenadas de los vértices son $V(\frac{4}{3}, 0)$ y $V'(4, \pi)$. Como el

centro C está sobre el eje polar y en el punto medio de la recta que une los vértices, sus coordenadas son $(4/3, \pi)$. La longitud del eje mayor es la distancia entre los vértices, o sea, $2a = 16/3$

De la ecuación (5), tenemos que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ es $r = 2$. Por tanto, la longitud $|\overline{OL}|$ del semilado recto es 2, y la longitud total de cada lado recto es 4. Como la longitud total de cada lado recto es también igual a $\frac{2b^2}{a}$, tenemos que $\frac{2b^2}{a} = \frac{2b^2}{8/3} = 4$, de manera que $b = 4/3 \sqrt{3}$ y la longitud del eje menor es

$$2b = \frac{8}{3}\sqrt{3}.$$

EJERCICIOS. Grupo 40

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. De la ecuación (3), Artículo 85, deducir las ecuaciones polares

$$r \cos \theta = \pm p \quad \text{y} \quad r \operatorname{sen} \theta = \pm p$$

de una línea recta, dadas en el teorema 4.

2. Obtener los resultados del ejercicio 1 transformando las ecuaciones rectangulares de las rectas paralelas a los ejes coordenados y a p unidades de ellos.

3. Demostrar que las ecuaciones polares de las rectas que son perpendiculares y paralelas al eje polar pueden escribirse en las formas

$$r = \pm p \sec \theta \quad \text{y} \quad r = \pm p \csc \theta,$$

respectivamente, en donde p es la distancia del polo a la recta.

4. Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $P\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ y es perpendicular al radio vector de P.

En cada uno de los ejercicios 5-8, transformar la ecuación rectangular dada a la forma polar normal de la ecuación (3), Artículo 85.

5. $3x - 4y + 5 = 0.$

6. $5x + 12y + 26 = 0.$

7. $4x + 3y - 10 = 0.$

8. $2x + y = 0.$

9. Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $\left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$ y es perpendicular al eje polar.

10. Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $\left(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ y es paralela al eje polar.

11. Considerando las áreas de ciertos triángulos, demostrar que la ecuación polar de la recta que pasa por los dos puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) puede escribirse en la forma $r_1 r \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta) + r_2 r \operatorname{sen}(\theta - \theta_2) = r_1 r_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)$.

12. Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por los puntos

$$\left(4, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ y } \left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right).$$

13. Demostrar que la ecuación polar general de la circunferencia, ecuación (1) del Artículo 86, puede obtenerse por medio de la fórmula de la distancia entre dos puntos, dada en el teorema 3, Artículo 81.

14. Hallar la ecuación polar de la circunferencia de centro el punto $\left(6, \frac{3\pi}{4}\right)$ y radio igual a 4.

15. Hallar la ecuación polar de la circunferencia de centro el punto $\left(3, \frac{7\pi}{6}\right)$ y que pasa por el punto $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$.

16. Demostrar los casos especiales de la ecuación (1), Artículo 86, dados en el teorema 5.

17. Si el centro de una circunferencia que pasa por el polo es el punto (a, α) demuéstrese que su ecuación es $r = 2a \cos (\theta - \alpha)$.

18. Del resultado del ejercicio 17, demuéstrese que la ecuación polar de cualquier circunferencia que pasa por el polo puede escribirse en la forma

$$r = k_1 \cos \theta + k_2 \operatorname{sen} \theta,$$

en donde k_1 y k_2 son constantes.

19. Transformando la ecuación polar del ejercicio 18 a su forma rectangular, determinar el significado de las constantes k_1 y k_2. Demostrar, también, que si a es el radio de la circunferencia se verifica que $k_1^2 + k_2^2 = 4a^2$.

En cada uno de los ejercicios 20-23, hallar el radio y las coordenadas polares del centro de la circunferencia a partir de su ecuación polar dada. Comprobar los resultados empleando coordenadas rectangulares.

20. $r = 4 \cos \theta$.

21. $r = 2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \theta$.

22. $r^2 - 2\sqrt{2}\, r \cos \theta - 2\sqrt{2}\, r \operatorname{sen} \theta - 5 = 0$.

23. $r^2 + r \cos \theta - \sqrt{3}\, r \operatorname{sen} \theta - 3 = 0$.

En cada uno de los ejercicios 24 y 25, transformar la ecuación rectangular dada de la circunferencia a la forma polar general representada por la ecuación (1) del Artículo 86, o uno de sus casos especiales. En cada caso, hallar el radio y las coordenadas polares del centro.

24. $x^2 + y^2 + 2x = 0$. 25. $x^2 + y^2 - x - y = 0$.

26. Deducir la ecuación $r = \dfrac{ep}{1 + e \cos \theta}$ del teorema 6, Artículo 87.

27. Deducir las ecuaciones $r = \dfrac{ep}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta}$ del teorema 6, Artículo 87.

28. Demostrar que las ecuaciones (2) y (3) del Artículo 87 pueden reducirse a las formas $r = \frac{p}{2} \csc^2 \frac{\theta}{2}$ y $r = \frac{p}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2}$, respectivamente, en el caso de una parábola.

29. Demostrar que en cada una de las cónicas del teorema 6, Artículo 87, la longitud de un lado recto es igual a $2ep$.

En cada uno de los ejercicios 30-32, identificar la cónica cuya ecuación polar se da. Para una parábola, hállense las coordenadas polares del vértice y la longitud del lado recto. Para una cónica central, hállense las coordenadas polares

del centro y los vértices, y las longitudes de los ejes y cada lado recto. Hallar también la ecuación rectangular de cada cónica.

30. $r = \dfrac{5}{2 - 2\cos\theta}$. 31. $r = \dfrac{6}{3 + \operatorname{sen}\theta}$. 32. $r = \dfrac{3}{2 + 4\cos\theta}$.

33. Si la cónica $r = \dfrac{ep}{1 - e\cos\theta}$ representa una parábola, hállense las coordenadas polares de su vértice y la ecuación polar de su directriz.

34. Si la cónica $r = \dfrac{ep}{1 + e\cos\theta}$ representa una elipse, demuéstrese que la longitud de su eje menor es $\dfrac{2\,ep}{\sqrt{1 - e^2}}$.

35. Si la cónica $r = \dfrac{ep}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$ representa una hipérbola, demuéstrese que la longitud de su eje transverso es $\dfrac{2\,ep}{e^2 - 1}$.

88. Problemas relativos a lugares geométricos en coordenadas polares. En coordenadas rectangulares vimos que la solución de un problema de lugar geométrico se facilitaba a veces colocando la figura en una posición apropiada con respecto a los ejes coordenados. Análogamente, en coordenadadas polares, la solución puede efectuarse muchas veces con mayor simplicidad si se eligen apropiadamente el polo y el eje polar. Ilustraremos el procedimiento con varios ejemplos.

Ejemplo 1. Sean O y B los extremos de un diámetro fijo de una circunferencia dada de radio a. Sea t la tangente en B. Desde O tracemos una secante cualquiera s que corte a la circunferencia y a t en los puntos C y D, respectivamente. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico de un punto P sobre s tal que $|\overline{OP}| = |\overline{CD}|$ para cada posición de s a medida que gira en torno de O.

Solución. Sin que el razonamiento pierda generalidad, podemos tomar el punto O como polo y hacer que el diámetro fijo esté sobre el eje polar, tal como aparece en la figura 123. Como P es un punto cualquiera del lugar geométrico, le asignaremos las coordenadas generales $(r,\ \theta)$, de manera que $|\overline{OP}| = r$ y el ángulo $POB = \theta$. Entonces, para toda posición de s, debemos tener

$$r = |\overline{OP}| = |\overline{CD}| = |\overline{OD}| - |\overline{OC}|. \quad (1)$$

Fig. 123

Del triángulo rectángulo ODB, tenemos

$$|\overline{OD}| = |\overline{OB}| \sec\theta = 2a \sec\theta.$$

Tracemos el segmento CB. El ángulo OCB es un ángulo recto ya que está inscrito en un semicírculo. Por tanto,

$$|\overline{OC}| = |\overline{OB}| \cos\theta = 2a\cos\theta.$$

Sustituyendo en (1) estos valores de $|\overline{OD}|$ y $|\overline{OC}|$, obtenemos

$$r = 2a(\sec\theta - \cos\theta),$$

la cual se reduce a

$$r = 2a \operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}\theta,$$

que es la ecuación polar buscada. La curva se llama *cisoide*.

Ejemplo 2. Desde un punto fijo O de una circunferencia dada, de radio a, se traza una cuerda cualquiera OB. Se prolonga la cuerda hasta el punto P de tal manera que la distancia $|\overline{BP}|$ sea siempre una constante igual a k. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico descrito por P a medida que la cuerda prolongada gira en torno de O.

Solución. Sin perder generalidad, podemos tomar el punto fijo O como polo y el diámetro OC prolongado como eje polar (fig. 124). Como P es un

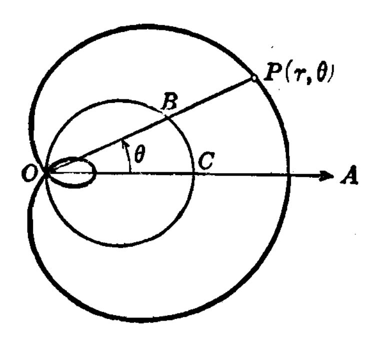


Fig. 124

punto cualquiera del lugar geométrico le asignaremos las coordenadas generales (r, θ), de manera que $|\overline{OP}| = r$ y el ángulo $POC = \theta$. Según el problema, para toda posición del segmento OP debemos tener

$$r = |\overline{OP}| = |\overline{OB}| + |\overline{BP}| = |\overline{OB}| + k. \tag{2}$$

La ecuación de la circunferencia dada de radio a es $r = 2a\cos\theta$, según el teorema 5 del Artículo 86. Por tanto, para toda posición de OP, se verifica

$$|\overline{OB}| = 2a\cos\theta.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (2), tenemos

$$r = 2a\cos\theta + k, \tag{3}$$

que es la ecuación polar buscada. La curva se llama *caracol de Pascal*.

Hay tres casos por considerar, según que

$$k < 2a,$$
$$k = 2a,$$

y

$$k > 2a.$$

El caso $k < 2a$ está representado en la figura 124.

EJERCICIOS. Grupo 41

En los siguientes ejercicios, después de obtener la ecuación polar del lugar geométrico, trácese la curva por los métodos explicados en el Artículo 82.

1. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su radio vector es siempre proporcional a su ángulo polar.
2. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su radio vector es siempre inversamente proporcional a su ángulo polar.
3. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el cuadrado de su radio vector es siempre proporcional a su ángulo polar.
4. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el logaritmo de su radio vector, es siempre proporcional a su ángulo polar.
5. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el cuadrado de su radio vector es siempre inversamente proporcional a su ángulo polar.
6. Empleando solamente coordenadas rectangulares, deducir la ecuación rectangular de la cisoide definida en el ejemplo 1 del Artículo 88. Tómese como origen el punto O y el diámetro fijo a lo largo de la parte positiva del eje X.

Los ejercicios 7-12 se refieren a la figura 123 del ejemplo 1 del Artículo 88.

7. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P de la recta s si $|\overline{OP}| = |\overline{PC}|$ para toda posición de s.
8. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P de la recta s si $|\overline{OP}| = 2|\overline{PC}|$ para toda posición de s.
9. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P de la recta s si $|\overline{OP}| = \frac{1}{2}|\overline{PC}|$ para toda posición de s.
10. Sea E el pie de la perpendicular trazada del punto C al eje polar. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P de s si $|\overline{OP}| = |\overline{CE}|$ para toda posición de s.
11. Con referencia a la figura del ejercicio 10, hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P de la recta s si $|\overline{OP}| = |\overline{OE}|$ para toda posición de s.
12. Con referencia a la figura del ejercicio 10, hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P de la recta s si $|\overline{OP}| = |\overline{EB}|$ para todas las posiciones de s.
13. Un punto P se mueve de tal manera que el producto de sus distancias a los dos puntos fijos $F(a, 0°)$ y $F'(a, \pi)$ es siempre igual a la constante b^2. Demostrar que la ecuación polar del lugar geométrico de P es

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \pm \sqrt{b^4 - a^4 \operatorname{sen}^2 2\theta}\,.$$

Los lugares geométricos se llaman *óvalos de Cassini*.

14. Trazar la gráfica de la ecuación de los óvalos de Cassini (ejercicio 13) cuando $b = a$. Demostrar que en este caso el lugar geométrico es una lemniscata. (Véase el ejemplo 2 del Artículo 82.)

15. Trazar la gráfica del caracol representado por la ecuación (3) del ejemplo 2 del Artículo 88, cuando $k = 2a$. Demostrar que en este caso el lugar geométrico es una cardioide. (Véase el ejemplo 1 del Art. 82.)

16. Trazar la gráfica del caracol representada por la ecuación (3) del ejemplo 2 del Artículo 88, cuando $k > 2a$.

17. Hallar la ecuación polar del caracol del ejemplo 2 del Artículo 88, cuando la circunferencia dada tiene su centro en el punto $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$, y construir la gráfica correspondiente.

Los ejercicios 18-20 se refieren a la figura 124 del ejemplo 2 del Artículo 88.

18. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P si $|\overline{BP}| = |\overline{BC}|$ para todas las posiciones de OP.

19. Sea D el pie de la perpendicular trazada desde el punto B al eje polar. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P si $|\overline{BP}| = |\overline{BD}|$ para todas las posiciones de OP.

20. Con referencia a la figura del ejercicio 19, hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P si $|\overline{BP}| = |\overline{OD}|$ para cualquier posición de OP.

21. Una circunferencia dada rueda, sin resbalar, sobre otra circunferencia del mismo radio pero de posición fija. Hallar e identificar la ecuación polar del lugar geométrico descrito por un punto de la primera circunferencia.

22. Sea a la distancia de un punto fijo O a una recta fija l. Se traza por O una recta cualquiera l' que corta a l en el punto B. Sobre l' se toman dos puntos P y P' a la derecha y a la izquierda de B, respectivamente, tales que $|\overline{BP}| = |\overline{P'B}| = b$, una constante, para cualquier posición de l'. Si se toma el punto O como polo y la recta l perpendicular al eje polar y a la derecha de O, demuéstrese que la ecuación polar del lugar geométrico descrito por P y P' a medida que l' gira en torno de O, es $r = a \sec \theta \pm b$. Dicho lugar geométrico se llama *concoide de Nicomedes*. Trácese la curva para el caso en que $b > a$.

23. Trazar la concoide del ejercicio 22 cuando $b = a$.

24. Trazar la concoide del ejercicio 22 cuando $b < a$.

25. En la construcción del ejercicio 22, supongamos que los puntos P y P' se toman sobre l' de tal manera que, para todas las posiciones de l', sea

$$|\overline{BP}| = |\overline{P'B}| = z,$$

siendo z la distancia de B al eje polar. Demostrar que la ecuación polar del lugar geométrico descrito por P y P' a medida que l' gira en torno de O es

$$r = a(\sec \theta \pm \operatorname{tg} \theta).$$

La curva así obtenida se llama *estrofoide*.

CAPITULO XI

ECUACIONES PARAMETRICAS

89. Introducción. En los capítulos anteriores hemos visto que si un lugar geométrico tiene una representación analítica, tal representación puede expresarse usualmente por una única ecuación conteniendo a lo más dos variables. En este capítulo consideraremos la representación analítica de una curva por medio de un par de ecuaciones en las cuales cada una de las dos variables está expresada en función de una tercera variable. Por ejemplo, la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad (1)$$

puede representarse también por las dos ecuaciones

$$x = \cos\theta, \quad y = \operatorname{sen}\theta, \qquad (2)$$

siendo θ una variable independiente que puede tomar cualquier valor real. Es decir, si a θ se le asigna un valor arbitrario, las ecuaciones (2) determinan un par de valores de x y y que satisfacen a la ecuación (1). En efecto, elevando al cuadrado cada una de las ecuaciones (2) y sumando, obtenemos

$$x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta,$$

la cual, para todos los valores de θ, es idéntica a la ecuación (1).

En general, si

$$F(x, y) = 0 \qquad (3)$$

es la ecuación rectangular de una curva plana C, y cada una de las variables x y y son función de una tercera variable t, de tal manera que podemos escribir

$$x = f(t), \quad y = g(t), \qquad (4)$$

entonces, si para cualquier valor permisible de la variable independiente t, las ecuaciones (4) determinan un par de valores reales de

x y y que satisfacen la ecuación (3), las ecuaciones (4) se llaman *ecuaciones paramétricas* de la curva C, y la variable independiente t se llama *parámetro*. También nos referiremos a las ecuaciones (4) como una *representación paramétrica* de la curva C. Así, las ecuaciones (2) son ecuaciones paramétricas o representación paramétrica de la circunferencia (1), siendo θ el parámetro.

Las ecuaciones paramétricas de un lugar geométrico específico no son únicas, ya que el lugar geométrico puede representarse por diferentes pares de ecuaciones. Por ejemplo, en el caso de la circunferencia (1), podemos tomar, arbitrariamente, $x = t$ como una ecuación paramétrica y sustituir este valor de x en la ecuación (1); la solución correspondiente para y es entonces la otra ecuación paramétrica $y = \pm \sqrt{1 - t^2}$. Debe notarse que, para este par de ecuaciones, el parámetro t sólo puede tomar valores reales comprendidos dentro del intervalo $-1 \leq t \leq 1$, mientras que para el par de ecuaciones (2) el parámetro θ puede tomar todos los valores reales. No hay un método general para seleccionar un parámetro particular para un lugar geométrico y deducir entonces las ecuaciones paramétricas correspondientes. Usualmente, se toma la representación paramétrica más sencilla o aquella que sea más útil y conveniente para nuestros propósitos.

Como en nuestro estudio de un lugar geométrico por medio de su ecuación rectangular, hemos considerado solamente una ecuación y como máximo dos variables, el lector puede suponer, lógicamente, que el estudio de una curva será mucho más largo y complicado si hay que tratar con dos ecuaciones y tres variables. Veremos, sin embargo, que ciertas curvas se estudian mucho más convenientemente por medio de sus ecuaciones paramétricas; de manera semejante, las soluciones de muchos problemas de lugares geométricos se obtienen con mayor facilidad mediante la introducción de un parámetro.

90. Obtención de la ecuación rectangular de una curva a partir de su representación paramétrica. La ecuación rectangular de una curva se obtiene a partir de su representación paramétrica eliminando el parámetro. No hay ningún método general para efectuar esta eliminación; el procedimiento a seguir depende en cada caso de la forma de las ecuaciones paramétricas. Si éstas contienen funciones trigonométricas, la ecuación rectangular puede obtenerse, a veces, por medio de una de las identidades trigonométricas fundamentales (Apéndice IC, 2); vimos un ejemplo de esto, para la circunferencia, en el Artículo 89. Si ambas ecuaciones paramétricas son algebraicas, su forma sugerirá algunas veces una operación algebraica por medio de la cual se elimine al parámetro. Otras veces, si una ecuación paramétrica es más complicada que la otra, la ecuación rectangular puede obtenerse, frecuentemente, despejando el parámetro de la ecuación más sencilla y sustituyendo su valor en la otra ecuación.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación rectangular de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = 2 + 3 \operatorname{tg} \theta, \quad y = 1 + 4 \sec \theta. \tag{1}$$

Solución. La presencia de $\operatorname{tg} \theta$ y $\sec \theta$ como términos aislados en las ecuaciones paramétricas (1) sugiere el empleo de la identidad trigonométrica fundamental

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta. \tag{2}$$

En efecto, si escribimos las ecuaciones (1) en la forma

$$\frac{x-2}{3} = \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{y-1}{4} = \sec \theta,$$

elevamos después al cuadrado cada una de estas ecuaciones y sustituímos los resultados en la ecuación (2), obtenemos

$$1 + \frac{(x-2)^2}{9} = \frac{(y-1)^2}{16},$$

o sea,

$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1,$$

que es la ecuación rectangular equivalente a las ecuaciones dadas y que representa una hipérbola.

Ejemplo 2. Hallar la ecuación rectangular de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = tv_0 \cos \alpha, \quad y = tv_0 \operatorname{sen} \alpha - \tfrac{1}{2} gt^2, \tag{3}$$

en donde t es el parámetro, y v_0, α y g son constantes.

Solución. Como la primera ecuación es la más sencilla, despejamos de ella el valor de t. Resulta:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}.$$

Si sustituímos este valor de t en la segunda ecuación, obtenemos la ecuación rectangular

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

que representa una parábola.

91. Gráfica de una curva a partir de su representación paramétrica. Para trazar una curva a partir de su ecuación rectangular, basta obtener las coordenadas de algunos puntos, asignando distintos valores a una de las variables y calculando luego los valores correspondientes de la otra variable. Podemos trazar también directamente una curva a partir de sus ecuaciones paramétricas sin necesidad de pasar a su ecuación rectangular. En efecto, si asignamos un valor particular al parámetro, las ecuaciones paramétricas determinan valores correspondientes de x y y que, si son reales, representan las coordenadas de un punto de la curva.

Ejemplo. Haciendo variar el parámetro, trazar la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = \theta - \operatorname{sen} \theta, \quad y = 1 - \cos \theta. \tag{1}$$

Hallar también la ecuación rectangular de la curva.

Solución. El parámetro θ, que aparece como un término aislado en la primera ecuación, debe tomarse en radianes (Apéndice IC, 4). Así, si se le asigna a θ el valor $\frac{\pi}{4}$ tiene el valor 0,7854 y no 45°. Para calcular los valores de x y y, será conveniente, por lo tanto, asignar valores a θ en función de π, (ver la tabla del final de la página). Para valores de θ mayores de 2π radianes, y para valores negativos de θ, la curva repite su forma a derecha e izquierda, respectivamente, del eje Y. El lugar geométrico (fig. 125) se llama *cicloide*. La porción de curva comprendida entre dos cualesquiera de sus intersecciones sucesivas con el eje X se llama *arco* de la cicloide. Por la importancia que tiene esta curva, deduciremos sus ecuaciones paramétricas y posteriormente (Art. 93) la discutiremos.

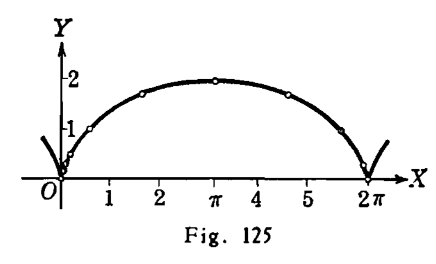


Fig. 125

Para obtener la ecuación rectangular de la cicloide, procedemos como sigue. A partir de la segunda, y más sencilla, de las ecuaciones paramétricas (1), tenemos

$$\cos \theta = 1 - y,$$

de donde,

$$\theta = \operatorname{arc} \cos (1 - y),$$

$$\operatorname{sen} \theta = \pm \sqrt{1 - (1 - y)^2} = \pm \sqrt{2y - y^2}.$$

Si sustituímos estos valores de θ y sen θ en la primera de las ecuaciones (1), obtenemos la ecuación rectangular buscada,

$$x = \operatorname{arc} \cos (1 - y) \mp \sqrt{2y - y^2}, \tag{2}$$

en donde se debe tomar el signo positivo o el negativo según que θ sea menor o mayor que π radianes en el arco comprendido entre

$$\theta = 0 \text{ y } \theta = 2\pi.$$

Si $\theta = \pi$, la segunda de las ecuaciones (1) muestra que $y = 2$, en cuyo caso el radical se anula.

El estudiante debe trazar la cicloide a partir de su ecuación rectangular (2) y comparar el trabajo con el de obtener la gráfica partiendo de las ecuaciones paramétricas (1). Verá entonces las ventajas que, para esta curva, tiene la representación paramétrica sobre la rectangular.

θ	sen θ	cos θ	x	y
0	0	1	0	0
$\pi/6$	0,5	0,87	0,02	0,13
$\pi/4$	0,71	0,71	0,08	0,29
$\pi/3$	0,87	0,5	0,18	0,5
$\pi/2$	1	0	0,57	1
$3\pi/4$	0,71	− 0,71	1,65	1,71
π	0	− 1	3,14	2
$5\pi/4$	− 0,71	− 0,71	4,63	1,71
$3\pi/2$	− 1	0	5,71	1
$7\pi/4$	− 0,71	0,71	6,20	0,29
2π	0	1	6,28	0

EJERCICIOS. Grupo 42

En cada uno de los siguientes ejercicios trazar la curva correspondiente partiendo de sus ecuaciones paramétricas dadas. Obténgase también la ecuación rectangular de la curva e identifíquese si es posible. Las letras a, b, c, d y p representan constantes diferentes de cero.

1. $x = at, \quad y = bt.$
2. $x = a \operatorname{sen} \theta, \quad y = a \cos \theta.$
3. $x = 5t, \quad y = 2t + 2.$
4. $x = pt^2, \quad y = 2pt.$
5. $x = a \cos \theta, \quad y = b \operatorname{sen} \theta.$
6. $x = 2t^2, \quad y = \frac{3}{t^2}.$
7. $x = a(1 - t), \quad y = bt.$
8. $x = a \sec \theta, \quad y = b \operatorname{tg} \theta.$
9. $x = 2 \operatorname{tg} \theta, \quad y = 3 \operatorname{ctg} \theta.$
10. $x = 2t + 2, \quad y = 2t^2 + 4t.$
11. $x = 2(1 + \cos \theta), \quad y = 2 \operatorname{sen} \theta.$
12. $x = 4 \operatorname{sen} \theta, \quad y = 2 \csc \theta.$
13. $x = pt^2 + b, \quad y = 2t + a.$
14. $x = 3 \cos \theta + 2, \quad y = 2 \operatorname{sen} \theta - 3.$
15. $x = 2 \sec \theta - 1, \quad y = \operatorname{tg} \theta + 2.$
16. $x = 2 \operatorname{sen} \theta - 3, \quad y = 4 \cos \theta - 4.$
17. $x = a \operatorname{sen}^4 \theta, \quad y = a \cos^4 \theta.$
18. $x = a \operatorname{tg}^3 \theta, \quad y = \operatorname{tg} \theta.$
19. $x = bt^2, \quad y = bt^3.$
20. $x = a \operatorname{sen}^3 \theta, \quad y = a \cos^3 \theta.$
21. $x = a \frac{2t}{1 + t^2}, \quad y = a \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$
22. $x = a \operatorname{tg} \theta, \quad y = b \sec^2 \theta.$
23. $x = b \csc^2 \theta, \quad y = a \operatorname{ctg} \theta.$
24. $x = \cos \theta, \quad y = \operatorname{sen} \theta - \cos \theta.$
25. $x = 2 \operatorname{sen} \theta - 3 \cos \theta, \quad y = 4 \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta.$
26. $x = a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta, \quad y = c \operatorname{sen} \theta + d \cos \theta; \quad ad \neq bc.$
27. $x = a \sec \theta + b \operatorname{tg} \theta, \quad y = c \sec \theta + d \operatorname{tg} \theta; \quad ad \neq bc.$
28. $x = \frac{3at}{1 + t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$
29. $x = a \operatorname{sen} \theta, \quad y = b \operatorname{tg} \theta.$
30. $x = \operatorname{sen} 2\theta, \quad y = \cos \theta.$
31. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} t.$
32. $x = a \cos t, \quad y = b \cos 2t.$
33. $x = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \quad y = \cos \theta.$
34. $x = 2 \cos \theta \quad y = \cos \frac{\theta}{2}.$
35. $x = \operatorname{tg} 2t, \quad y = \operatorname{tg} t.$
36. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{tg} 2t.$
37. $x = \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \quad y = \operatorname{sen} t.$
38. $x = \operatorname{sen} \theta, \quad y = \operatorname{sen} 3\theta.$
39. $x = \cos 3\theta, \quad y = 2 \cos \theta.$
40. $x = t + \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t.$

92. Representación paramétrica de las cónicas. Por simplicidad, supondremos que la posición de cada una de las cónicas con relación a los ejes coordenados sea tal que su ecuación rectangular esté en su forma canónica.

Sea α el ángulo de inclinación de la tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en cualquier punto $P(x, y)$, excepto el vértice, de la curva. Entonces, por el teorema 4 del Artículo 57, tenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2p}{y}, \quad y \neq 0,$$

de donde,

$$y = 2p \operatorname{ctg} \alpha .$$

Como el valor de α depende de la posición del punto de contacto P, es una variable que podemos escoger como parámetro. Según esto, el valor de y obtenido puede tomarse como una de las ecuaciones paramétricas de la parábola. Si este valor de y es sustituído en la ecuación $y^2 = 4px$, hallamos $x = p \operatorname{ctg}^2 \alpha$. Por tanto, un par de ecuaciones paramétricas de la parábola es

$$x = p \operatorname{ctg}^2 \alpha , \quad y = 2p \operatorname{ctg} \alpha , \tag{1}$$

en donde el parámetro α representa el ángulo de inclinación de las tangentes a la parábola $y^2 = 4px$.

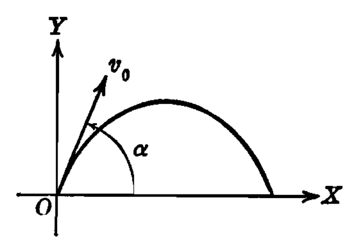


Fig. 126

En el ejemplo 2 del Artículo 90, se dió una representación paramétrica importante de la parábola, a saber,

$$x = tv_0 \cos \alpha , \quad y = tv_0 \operatorname{sen} \alpha - \tfrac{1}{2}gt^2 , \tag{2}$$

en donde t es el parámetro, y para la cual se encontró que la ecuación rectangular es

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 . \tag{3}$$

En Mecánica se demuestra que si la resistencia del aire es despreciada, las ecuaciones paramétricas (2) son las ecuaciones del movimiento de un proyectil lanzado desde el origen con una velocidad (constante) inicial v_0 a un ángulo constante α con el eje X, siendo g la aceleración constante debida a la gravedad (fig. 126). Este problema del movimiento de proyectiles es un ejemplo de las ventajas de la representación paramétrica sobre la rectangular en algunos problemas físicos. Se puede hacer un estudio completo del movimiento por medio de las ecuaciones paramétricas (2). Por ejemplo, por las ecuaciones (2), podemos determinar la posición del cuerpo en cualquier

instante t; esta información, en cambio, no puede obtenerse de la ecuación rectangular (3) la cual simplemente da la trayectoria del proyectil.

Ahora obtendremos una representación paramétrica sencilla para una elipse. Tracemos dos circunferencias concéntricas (fig. 127) que tengan su centro común en el origen y de radios a y b, siendo $a > b$. A partir del origen O tracemos una recta cualquiera l que forme un ángulo θ con la parte positiva del eje X, y sean A y B los puntos de intersección con las circunferencias de radios a y b, respectivamente. Bajemos las perpendiculares AC y BD al eje X, y por B

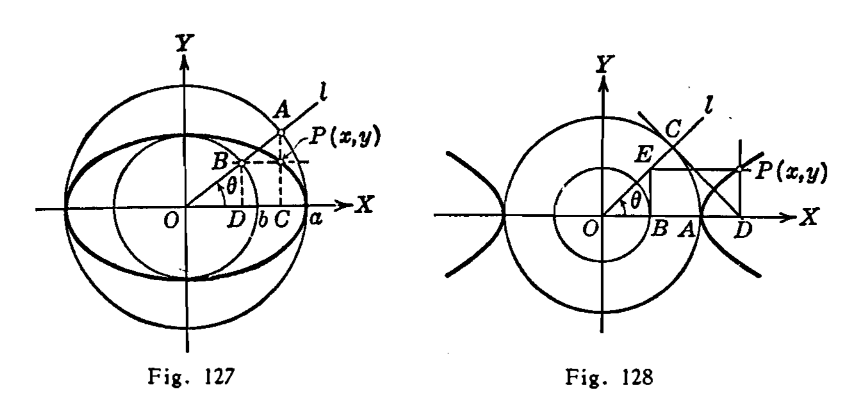


Fig. 127 Fig. 128

tracemos una recta paralela al eje X y sea P su punto de intersección con AC. Vamos a obtener las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico de $P(x, y)$. Como P se mueve de acuerdo con la rotación de la recta l en torno de O, tomaremos como parámetro el ángulo θ. De los triángulos rectángulos OAC y OBD, tenemos

$$x = \overline{OC} = \overline{OA} \cos \theta = a \cos \theta$$

y

$$y = \overline{CP} = \overline{DB} = \overline{OB} \operatorname{sen} \theta = b \operatorname{sen} \theta$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico de P son

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \operatorname{sen} \theta. \qquad (4)$$

Es muy fácil eliminar el parámetro θ de las ecuaciones (4) y obtener la ecuación rectangular

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (5)$$

Por tanto, las ecuaciones (4) son una representación paramétrica de la elipse (5). El parámetro θ se llama *ángulo excéntrico* del punto P,

y las circunferencias concéntricas de radios a y b se llaman, respectivamente, *círculo principal* y *círculo menor* de la elipse.

Una representación paramétrica sencilla de la hipérbola puede obtenerse como sigue. Tracemos dos circunferencias concéntricas que tengan su centro común en el origen y que sus radios sean $OA = a$ y $OB = b$, en que $a > b$, como se ve en la figura 128. A partir de O tracemos una recta cualquiera l que forme un ángulo θ con la parte positiva del eje X, y sea C el punto de intersección con la circunferencia de radio a. En C tracemos la tangente a la circunferencia; designemos por D el punto en que esta tangente corta al eje X. En B tracemos una perpendicular al eje X y sea E su punto de intersección con l. Por D y E tracemos rectas paralelas a los ejes Y y X, respectivamente; designemos por P el punto de intersección de estas rectas. Ahora vamos a obtener las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico de $P(x, y)$, usando θ como parámetro. De los triángulos rectángulos OCD y OBE, tenemos

$$x = \overline{OD} = \overline{OC} \sec \theta = a \sec \theta$$

y

$$y = \overline{DP} = \overline{BE} = \overline{OB} \operatorname{tg} \theta = b \operatorname{tg} \theta .$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico de P son

$$x = a \sec \theta , \quad y = b \operatorname{tg} \theta , \qquad (6)$$

y la ecuación rectangular puede hallarse fácilmente y es (véase el ejemplo 1 del Artículo 90)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 . \qquad (7)$$

Por tanto, las ecuaciones (6) son una representación paramétrica de la hipérbola (7). El parámetro θ se llama *ángulo excéntrico* del punto P, y el círculo de radio a se llama *círculo auxiliar* de la hipérbola.

93. La cicloide. Sea P un punto cuya posición sea fija con relación a una curva C. Si la curva C rueda, sin resbalar, sobre una curva fija C', el lugar geométrico descrito por el punto P se llama *ruleta*.

Un caso importante de ruleta es la curva llamada *cicloide*. Una cicloide es el lugar geométrico descrito por cualquier punto fijo de una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre una recta fija. Deduciremos las ecuaciones paramétricas de la cicloide tomando la recta fija como eje X y una de las posiciones del punto móvil sobre el eje X como origen. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar

geométrico, a el radio y C el centro de la circunferencia que rueda, como se indica en la figura 129. Tomaremos como parámetro el ángulo θ que gira la circunferencia al rodar partiendo de su posición inicial en el origen. Sean A y B, respectivamente, los pies de las perpendiculares bajadas de P y C al eje X. Tracemos PD perpendicular

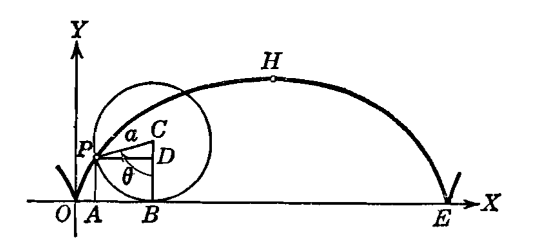


Fig. 129

a BC. Como la circunferencia rueda, sin resbalar, desde O hasta B, tenemos

$$\overline{OB} = \text{arco } \overline{PB}.$$

Si θ se mide en radianes, tenemos (Apéndice IC, 4)

$$\text{arco } \overline{PB} = a\theta .$$

Por tanto, de la figura 129,

$$x = \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = a\theta - \overline{PD} = a\theta - a \operatorname{sen} \theta ,$$

$$y = \overline{AP} = \overline{BD} = \overline{BC} - \overline{DC} = a - a \cos \theta ,$$

de manera que las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta). \qquad (1)$$

Por el método empleado en el ejemplo del Artículo 91, podemos demostrar que la ecuación rectangular de la cicloide (1) es

$$x = a \text{ arc cos } \frac{a - y}{a} \mp \sqrt{2ay - y^2}, \qquad (2)$$

en donde debe tomarse el signo positivo o el negativo según que θ sea menor o mayor que π radianes en el arco comprendido entre $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$.

El punto medio H de cualquier arco de la cicloide se llama *vértice* del arco. Aquella porción OE de la recta fija comprendida entre los puntos extremos de un arco se llama *base* del arco; su longitud es,

evidentemente, igual a $2\pi a$, que es la longitud de la circunferencia generatriz. Cada extremo de un arco, tal como O y E, se llama *pico* o *cúspide*.

A la cicloide también se le da a veces el nombre de *braquistocrona* o curva del más rápido descenso, porque, si se invierte la curva de la figura 129, se puede demostrar que es el recorrido descrito por una partícula que cae desde un punto dado a otro en el intervalo de tiempo *mínimo*. Además, si se sueltan dos partículas simultáneamente desde dos puntos cualesquiera del arco invertido de una cicloide, llegarán ambas al punto más bajo (el vértice) al *mismo* tiempo.

La cicloide es un caso especial de la ruleta conocida con el nombre de *trocoide*, que es el lugar geométrico descrito por un punto de un radio fijo de una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre una recta. Si el punto generador $P(x, y)$ está a una distancia b del centro del círculo rodante de radio a, si una posición del radio fijo es a lo largo del eje Y, y si la recta fija se toma como el eje X, puede demostrarse que las ecuaciones paramétricas de la trocoide son

$$x = a\theta - b \operatorname{sen} \theta, \quad y = a - b \cos \theta. \tag{3}$$

Se dice de la trocoide que es una *cicloide acortada* o *alargada* según que

$$b < a \text{ o } b > a.$$

Para $b = a$, las ecuaciones (3) se reducen a las ecuaciones paramétricas (1) de la cicloide.

94. Epicicloide e hipocicloide. Ahora consideremos dos tipos de ruletas que difieren de la cicloide en que la curva fija es una circunfe-

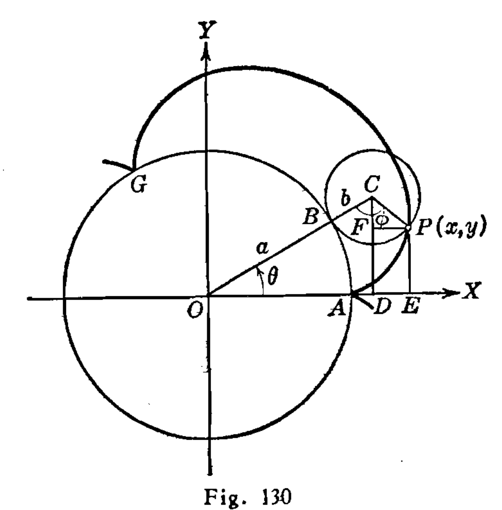


Fig. 130

rencia en vez de una recta. Estas curvas, llamadas epicicloide e hipocicloide, son importantes en el diseño de dientes de engranajes.

Una *epicicloide* es el lugar geométrico descrito por un punto fijo cualquiera de una circunferencia que rueda exteriormente, sin resbalar, sobre una circunferencia fija. Deduciremos las ecuaciones paramétricas de la epicicloide en el caso en que la circunferencia fija tenga su centro en el origen y una posición del punto que describe la curva está sobre la parte positiva del eje X y sobre la circunferencia fija. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico; sean a y b, respectivamente, los radios de las circunferencias fija y rodante, y sea C el centro de la circunferencia rodante o generatriz, como se ve en la figura 130. Tomaremos como parámetro el ángulo θ que forma la recta de los centros OC con la parte positiva del eje X. Sea A el punto sobre el eje X que representa la posición inicial del punto P que describe la curva, y sea B el punto de tangencia de las dos circunferencias. Desde C y P bajemos las perpendiculares CD y PE, respectivamente, al eje X, y tracemos PF perpendicular a CD. Llamemos ϕ al ángulo OCP y β al ángulo PCF. Consideraremos ambos ángulos ϕ y θ medidos en radianes.

Como la circunferencia generatriz rueda, sin resbalar, de A a B, tenemos

$$\text{arco } AB = \text{arco } PB,$$

o sea,

$$a\theta = b\phi.$$

Por tanto, $\phi = \frac{a}{b}\theta$ y $\theta + \phi = \theta + \frac{a}{b}\theta = \frac{a+b}{b}\theta$. Tenemos, también,

$$\beta = \phi - \text{ángulo } OCD = \phi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \theta + \phi - \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen}\left(\theta + \phi - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - [\theta + \phi]\right)$$

$$= -\cos(\theta + \phi) = -\cos\frac{a+b}{b}\theta,$$

y

$$\cos \beta = \cos\left(\theta + \phi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - [\theta + \phi]\right)$$

$$= \operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\theta.$$

Para las coordenadas (x, y) del punto P, tenemos:

$$x = \overline{OE} = \overline{OD} + \overline{DE} = \overline{OD} + \overline{FP} = \overline{OC} \cos\theta + \overline{CP} \operatorname{sen}\beta$$
$$= (a+b)\cos\theta - b\cos\frac{a+b}{b}\theta,$$
$$y = \overline{EP} = \overline{DF} = \overline{DC} - \overline{FC} = \overline{OC} \operatorname{sen}\theta - \overline{CP}\cos\beta$$
$$= (a+b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\theta,$$

de manera que las ecuaciones paramétricas de la epicicloide son

$$\left.\begin{aligned} x &= (a+b)\cos\theta - b\cos\frac{a+b}{b}\theta, \\ y &= (a+b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Cada punto de la epicicloide que está sobre la circunferencia fija, tales como A y G, es un *pico;* la porción de curva comprendida entre dos picos sucesivos se llama *arco*. El número de picos y arcos depende de las magnitudes relativas de los radios a y b. Sea r la razón de a a b, de manera que $a = rb$. Si r es un número entero, la epicicloide será, evidentemente, una curva cerrada que tiene exactamente r picos y r arcos; se dice entonces que la curva es una *epicicloide de* r *picos*. Si r no es un número entero pero es racional, el punto trazador P dará la vuelta en torno de la circunferencia fija dos o más veces antes de regresar al punto de partida A; en este caso, los arcos de la curva de diferentes circuitos se cortarán. Si r es irracional, el punto trazador no regresa exactamente al punto de partida.

Cuando $a = b$, de manera que $r = 1$, tenemos la epicicloide de un pico o *cardioide* (véase el ejemplo 1 del Artículo 82 y el ejercicio 21 del grupo 41, Artículo 88). De las ecuaciones (1) se deducen las siguientes ecuaciones paramétricas de la cardioide:

$$x = 2a\cos\theta - a\cos 2\theta, \quad y = 2a\operatorname{sen}\theta - a\operatorname{sen}2\theta. \qquad (2)$$

Una *hipocicloide* es el lugar geométrico de un punto fijo cualquiera de una circunferencia que rueda *interiormente*, sin resbalar, sobre otra circunferencia fija. Por un procedimiento semejante al empleado para la epicicloide, podemos demostrar que las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide son

$$\left.\begin{aligned} x &= (a-b)\cos\theta + b\cos\frac{a-b}{b}\theta, \\ y &= (a-b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\frac{a-b}{b}\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

en donde a y b son, respectivamente, los radios de las circunferencias fija y rodante, y el parámetro θ es el ángulo que la recta de los centros OC forma con la parte positiva del eje X, tal como puede verse en la figura 131. El lector debe observar que las ecuaciones paramétricas (3) de la hipocicloide pueden obtenerse reemplazando b por $-b$ en las ecuaciones paramétricas (1) de la epicicloide.

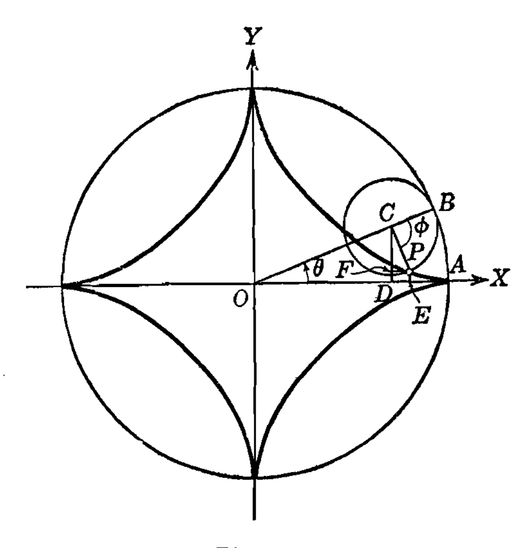


Fig. 131

Sea r la razón de a a b, de modo que $a = rb$. Si r es un número entero, tenemos una *hipocicloide de* r *picos*. La *hipocicloide de cuatro picos* está representada en la figura 131; esta curva se llama también *astroide*. Las ecuaciones paramétricas de la astroide pueden simplificarse de manera que tomen una forma muy simple. Así, para $b = \frac{a}{4}$, las ecuaciones paramétricas (3) se convierten en

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3a}{4}\cos\theta + \frac{a}{4}\cos 3\theta, \\ y &= \frac{3a}{4}\operatorname{sen}\theta - \frac{a}{4}\operatorname{sen} 3\theta. \end{aligned}\right\}$$

Si en estas ecuaciones sustituímos los valores de $\cos 3\theta$ y $\operatorname{sen} 3\theta$ dados por las identidades trigonométricas

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

$$\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta,$$

obtenemos la forma simplificada de las ecuaciones paramétricas de la astroide,

$$x = a \cos^3 \theta , \quad y = a \operatorname{sen}^3 \theta . \qquad (4)$$

Si tomamos la potencia dos tercios de ambos miembros de cada una de las ecuaciones (4) y sumamos, obtenemos como ecuación rectangular de la hipocicloide de cuatro picos

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} . \qquad (5)$$

EJERCICIOS. Grupo 43

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. De las ecuaciones paramétricas (2) del Artículo 92, demostrar que el tiempo en el cual alcanza el proyectil su altura máxima está dado por

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}.$$

2. Si se conocen los ejes mayor y menor de una elipse, hallar un método para construir cualquier punto P de la elipse conociendo su ángulo excéntrico.
3. Dados el centro y el eje mayor de una elipse, hallar un procedimiento para construir el ángulo excéntrico de cualquier punto dado P de la elipse.
4. Sean P_1 y P_2 puntos extremos de dos diámetros conjugados de una elipse (véase el ejercicio 25 del grupo 29, Art. 63). Demostrar que los ángulos excéntricos de P_1 y P_2 difieren en 90° ó 270°.
5. Obtener las ecuaciones paramétricas (6) del Artículo 92 para una hipérbola, empleando una construcción en que $b > a$.
6. Sea l una recta dirigida hacia arriba, y sean α y β, respectivamente, los ángulos formados por l y las partes positivas de los ejes X y Y (ver el ejercicio 19 del grupo 14, Art. 37). Si l no es paralela a ninguno de los ejes coordenados y contiene al punto fijo $P_1(x_1, y_1)$, puede demostrarse que (ver el ejercicio 21 del grupo 14, Art. 37) la ecuación de l puede escribirse en la forma

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta}.$$

De aquí, demostrar que una representación paramétrica de la recta l está dada por

$$x = x_1 + t \cos \alpha, \quad y = y_1 + t \cos \beta,$$

en donde el parámetro t representa la distancia variable del punto fijo $P_1(x_1, y_1)$ a cualquier punto $P(x, y)$ sobre l.

7. Discutir la recta cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = 3 + \frac{3}{5} t, \quad y = 4 + \frac{4}{5} t,$$

en donde el parámetro t tiene el significado establecido en el ejercicio 6.

8. Una recta cuya pendiente es $-\frac{5}{12}$ pasa por el punto $(2, -1)$. Hallar sus ecuaciones paramétricas en la forma dada en el ejercicio 6.

9. Demostrar la ecuación rectangular (2) de la cicloide dada en el Artículo 93.

10. Si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen sea el vértice H de la cicloide de la figura 129 del Artículo 93, demuéstrese que las ecuaciones paramétricas de la cicloide con respecto a los nuevos ejes están dadas por

$$x = a(\theta - \pi - \operatorname{sen}\theta), \quad y = -a(1 + \cos\theta).$$

11. Trazar la cicloide del ejercicio 10 cuando $a = 2$.

12. Deducir las ecuaciones paramétricas (3) de la trocoide dadas en el Artículo 93.

13. Obtener la ecuación rectangular de la trocoide a partir de las ecuaciones paramétricas (3) del Artículo 93.

14. Trazar la trocoide del ejercicio 12 cuando $a = 2$ y $b = 3$.

15. Trazar la epicicloide a partir de sus ecuaciones paramétricas (1) del Artículo 94 cuando $a = 3b$.

16. Deducir las ecuaciones paramétricas (2) de la cardioide, dadas en el Artículo 94, directamente a partir de una figura.

17. Deducir las ecuaciones paramétricas (3) de la hipocicloide, directamente de la figura 131.

18. Trazar la hipocicloide a partir de sus ecuaciones paramétricas (3) del Artículo 94 cuando $a = 3b$.

19. Demostrar, analíticamente, que cuando $a = 2b$ la hipocicloide (3) del Artículo 94 representa un diámetro de la circunferencia fija.

20. Si un hilo enrollado alrededor de una circunferencia fija se desenrolla manteniéndolo tirante en el plano de la circunferencia, cualquier punto fijo del hilo traza una curva llamada *evolvente de la circunferencia*. Hallar las ecuaciones paramétricas de la evolvente de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ bajo las siguientes condiciones: Si P es un punto cualquiera del lugar geométrico, sea el punto $A(a, 0)$ su posición inicial, y para cualquiera otra posición, sea T el punto de contacto de la tangente PT a la circunferencia. Tómese el ángulo $AOT = \theta$ como parámetro.

95. Resolución de problemas de lugares geométricos por el método paramétrico. Para ciertos lugares geométricos del tipo de curvas llamadas ruletas, hallamos que su representación paramétrica es preferible a su representación rectangular. Para muchas curvas, sin embargo, la ecuación rectangular es más deseable, pero esta ecuación puede determinarse a veces más convenientemente obteniendo primero las ecuaciones paramétricas a partir de las condiciones que el lugar geométrico debe satisfacer. Esto requiere la introducción de un parámetro, o posiblemente de dos o más parámetros, que deben eliminarse posteriormente. A este respecto, los parámetros son incidentales en la determinación de la ecuación rectangular y por esto se llaman a veces *variables auxiliares*. El lector debe notar que si se introducen n parámetros, es necesario

tener $n + 1$ ecuaciones para efectuar su eliminación y obtener la ecuación rectangular buscada. Si la ecuación rectangular de un lugar geométrico se obtiene mediante la introducción de uno o más parámetros, se suele decir que la resolución se ha efectuado por el *método paramétrico.*

Ejemplo 1. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto de intersección de dos rectas perpendiculares cualesquiera tangentes ambas a la elipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Solución. Supongamos que el punto $P(x, y)$ (fig. 132) representa un punto cualquiera del lugar geométrico. Como las rectas son perpendiculares

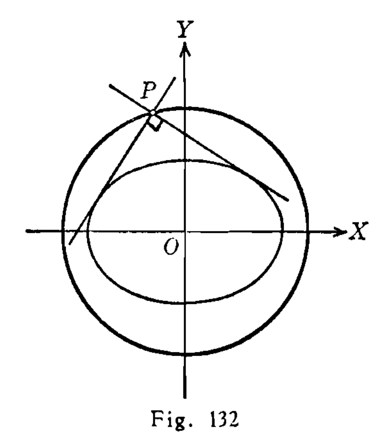


Fig. 132

entre sí, podemos representar sus pendientes por m y $-\frac{1}{m}$, siendo la variable m el parámetro. Por el teorema 5 del Artículo 63 las ecuaciones de las tangentes son

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

y

$$y = -\frac{1}{m}x \pm \sqrt{\frac{a^2}{m^2} + b^2}.$$

Para obtener la ecuación rectangular requerida del lugar geométrico de P, debemos eliminar el parámetro m entre estas dos ecuaciones. Para esto, las escribiremos en las formas

$$y - mx = \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2},$$

$$my + x = \pm \sqrt{a^2 + b^2m^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de cada una de estas ecuaciones, y sumando, obtenemos

$$y^2 + m^2x^2 + m^2y^2 + x^2 = a^2m^2 + b^2 + a^2 + b^2m^2,$$

de donde

$$(m^2 + 1)(x^2 + y^2) = (m^2 + 1)(a^2 + b^2).$$

Como $m^2 + 1 \neq 0$, podemos dividir por este factor. Esto nos da la ecuación rectangular del lugar geométrico,

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2,$$

llamado *círculo director* de la elipse. → (ERROR)

En este ejemplo se ha obtenido la solución introduciendo un solo parámetro. El ejemplo siguiente muestra un problema de lugar geométrico en el cual se introducen varios parámetros.

Ejemplo 2. Una recta l pasa por el punto fijo $P_1(-1, -3)$ y corta a la recta $l_1 : 3x + 2y - 6 = 0$, en el punto A, y a la recta $l_2 : y - 3 = 0$, en el punto B. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio del segmento de recta AB a medida que la recta l gira en torno del punto P_1.

Solución. Sea $P(x, y)$ (fig. 133) un punto cualquiera del lugar geométrico, y sean (x', y') y $(x'', 3)$ las coordenadas de los puntos A y B, respectivamente. Hemos introducido así tres parámetros, x', y' y x''; su eliminación requiere, por lo tanto, cuatro relaciones. Dos de estas relaciones pueden obtenerse partiendo del hecho de que P es el punto medio del segmento AB; estas son

$$x = \frac{x' + x''}{2}, \qquad (1)$$

$$y = \frac{y' + 3}{2}. \qquad (2)$$

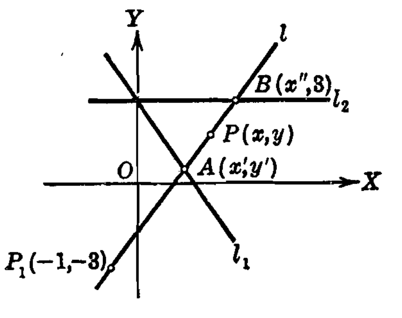


Fig. 133

Como el punto A está sobre la recta l_1, tenemos una tercera relación escribiendo que sus coordenadas verifican la ecuación de la recta:

$$3x' + 2y' - 6 = 0. \qquad (3)$$

Como los puntos A, B y P_1 son colineales, tenemos, escribiendo que las pendientes de AP_1 y BP_1 son iguales, la cuarta relación:

$$\frac{y' + 3}{x' + 1} = \frac{6}{x'' + 1}. \qquad (4)$$

De la ecuación (2),

$$y' = 2y - 3.$$

Sustituyendo este valor de y' en la ecuación (3), tenemos

$$x' = \frac{6 - 2y'}{3} = \frac{6 - 4y + 6}{3} = \frac{12 - 4y}{3}.$$

Sustituyendo este valor de x' en la ecuación (1), resulta

$$x'' = 2x - x' = 2x - \frac{12 - 4y}{3} = \frac{6x + 4y - 12}{3}.$$

Si sustituímos estos valores de x', y' y x'' en la ecuación (4), obtenemos

$$\frac{2y}{\frac{15-4y}{3}} = \frac{6}{\frac{6x+4y-9}{3}}$$

la cual, después de simplificarla, nos da la ecuación buscada

$$6xy + 4y^2 + 3y - 45 = 0,$$

que representa una hipérbola. El estudiante debe trazar la gráfica correspondiente de este lugar geométrico.

Un tipo interesante de curvas, cuya ecuación se obtiene más fácilmente mediante el método paramétrico, son las llamadas *podarias* o *curvas pedales*, definidas de la siguiente manera: si desde un punto fijo Q se trazan perpendiculares a las tangentes a una curva C, el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares es otra curva llamada *podaria de la curva* C *con respecto al punto* Q.

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la podaria de una parábola con respecto al vértice.

Solución. El problema no pierde generalidad si tomamos la forma canónica de la ecuación de la parábola, $y^2 = 4px$. Sea $P(x, y)$ (fig. 134) un punto cualquiera del lugar geométrico. Por el teorema 5 del Artículo 57, la ecuación de la tangente de pendiente m a la parábola $y^2 = 4px$ es

$$y = mx + \frac{p}{m}, \quad m \neq 0. \qquad (5)$$

Por ser OP perpendicular a la tangente (5), su ecuación es

$$y = -\frac{1}{m}x. \qquad (6)$$

La ecuación rectangular de la podaria se obtiene eliminando el parámetro m entre las ecuaciones (5) y (6). Para ello, de la ecuación (6) se obtiene $m = -\frac{x}{y}$, valor que sustituído en la ecuación (5) nos da:

$$y = -\frac{x^2}{y} - \frac{py}{x}.$$

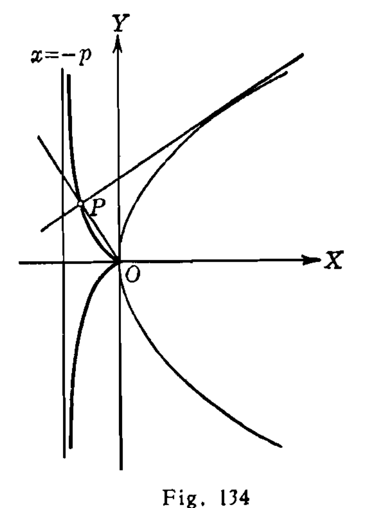


Fig. 134

Despejando y^2 obtenemos la ecuación rectangular buscada

$$y^2 = -\frac{x^3}{x+p},$$

que representa una cisoide con asíntota $x = -p$. (Véase el ejemplo 1 del Artículo 19 y el ejercicio 6 del grupo 41, Art. 88.)

EJERCICIOS. Grupo 44

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar la ecuación del lugar geométrico formado por los puntos de intersección de dos tangentes perpendiculares cualesquiera a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

2. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de intersección de dos tangentes perpendiculares cualesquiera a la parábola $y^2 = 4px$.

3. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de intersección de dos tangentes perpendiculares cualesquiera a la hipérbola

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \quad a > b.$$

4. Por el punto fijo $A(-a, 0)$ de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ se traza una cuerda cualquiera AB. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de AB.

5. Por el punto fijo $A(-a, 0)$ de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, se traza una cuerda cualquiera AB. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de AB.

6. Una recta l pasa por el origen y corta a las rectas

$$x + 1 = 0 \quad \text{y} \quad x - y + 1 = 0$$

en los puntos A y B, respectivamente. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto medio del segmento AB a medida que la recta l gira en torno del origen.

7. Un segmento AB de longitud constante l se mueve de tal manera que su extremo A permanece siempre sobre el eje X y su extremo B siempre sobre el eje Y. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por un punto fijo P sobre AB tal que la razón $\overline{AP} : \overline{BP}$ es igual a k.

8. Hallar la ecuación de la podaria de la parábola $y^2 = 4px$ con respecto al foco.

9. Hallar la ecuación de la podaria de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ con respecto a su centro.

10. Demostrar, analíticamente, que una circunferencia es su propia curva podaria con respecto al centro.

11. Hallar la ecuación de la podaria de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ con respecto a su centro.

12. Demostrar que si en el ejercicio 11 la hipérbola es equilátera, la podaria es una lemniscata. (Véase el ejemplo 2 del Art. 82.)

13. Desde uno de los focos de una elipse, se traza una recta l_1 perpendicular a cualquiera de sus tangentes, y por el centro se traza una recta l_2 que pase por el punto de contacto. Demostrar, analíticamente, que el lugar geométrico de la intersección de l_1 y l_2 es la directriz correspondiente.

14. Establecer y demostrar el teorema correspondiente al del ejercicio 13 para la hipérbola.

15. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de intersección de dos tangentes cualesquiera a la parábola $y^2 = 4px$, tales que el producto de sus pendientes sea igual a una constante k.

16. Resolver el ejercicio 15 para la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

17. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de intersección de dos tangentes cualesquiera a la parábola $y^2 = 4px$ tales que formen un ángulo de 45 grados.

18. Hallar la ecuación de la podaria de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ con respecto a un foco.

19. Hallar la ecuación de la podaria de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ con respecto a un foco.

20. Demostrar que la podaria de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x = 0$ con respecto al origen es una cardioide. (Véase el ejemplo 1 del Art. 82.)

CAPITULO XII

CURVAS PLANAS DE GRADO SUPERIOR

96. Clasificación de funciones. Si en el curso de un discusión particular empleamos un símbolo, digamos x, al que se le pueden asignar valores diferentes, decimos que este símbolo es una *variable*, y a la totalidad de los valores que puede tomar le llamamos *intervalo de variación de la variable*. Así, la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (1)$$

contiene las dos variables x y y, a cada una de las cuales se le pueden asignar todos los valores reales desde -1 hasta $+1$ inclusive. El intervalo de variación de la variable x, por ejemplo, se expresa entonces por la relación

$$-1 \leq x \leq 1 .$$

Según vimos, una ecuación en dos variables representa una correspondencia definida de valores entre esas dos variables (Arts. 14, 23). Nos referimos a tal correspondencia como a una *relación funcional*. Para mayor precisión, establezcamos la siguiente

DEFINICIÓN. Si dos variables, x y y, están relacionadas de tal manera que para cada valor asignado a la x dentro de su intervalo, quedan determinados uno o más valores correspondientes de y, se dice que y es una *función de* x.

Las funciones se clasifican de muchas maneras de acuerdo con sus diversas propiedades y características. Para nuestros fines inmediatos, sin embargo, será suficiente dividir todas las funciones en dos clases generales: funciones algebraicas y trascendentes. Para comprender esta clasificación necesitamos agregar algunas definiciones.

Una *función racional entera de* x es una función de la forma

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n ,$$

en donde n es un entero positivo, o cero, y a_0, a_1, ..., a_n son constantes cualesquiera. Ordinariamente nos referimos a una función de tal naturaleza como un *polinomio* en x. En particular, si $a_0 \neq 0$, se dice que la función o polinomio es de *grado* n.

Una *función racional de* x es el cociente de una función racional entera de x por otra que sea diferente de cero. Así, si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son ambas funciones racionales enteras, si $f_2(x)$ es diferente de cero, y

$$R(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)},$$

entonces $R(x)$ es una función racional de x.

Consideremos ahora la ecuación

$$y^m + R_1(x)y^{m-1} + R_2(x)y^{m-2} + \ldots + R_{m-1}(x)y + R_m(x) = 0, \quad (2)$$

en donde m es un entero positivo y $R_1(x)$, $R_2(x)$, ..., $R_m(x)$ son funciones racionales de x. Si la relación entre dos variables x y y es de la forma dada por la ecuación (2), o puede hacerse que tome tal forma, entonces se dice que y es una *función algebraica* de x. Así, cada una de las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y^2 = \frac{x^3}{2 - x}, \quad (x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2) \text{ y } x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1,$$

definen a y como una función algebraica de x.

Todas las funciones que no son algebraicas se llaman *funciones trascendentes*. Las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales son ejemplos de tales funciones. Así, cada una de las ecuaciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \log x$ y $ye^{x^2} = 1$ definen a y como una función trascendente de x.

97. Clasificación de las curvas planas. Cuando una curva plana está representada analíticamente por una ecuación con dos variables, esa ecuación, como acabamos de ver, expresa una relación funcional entre las dos variables. Decimos que una curva plana es *algebraica* o *trascendente* según que la relación funcional expresada por su ecuación sea algebraica o trascendente.

Se acostumbra hacer una posterior clasificación de las curvas planas. La ecuación de una recta,

$$Ax + By + C = 0, \quad (1)$$

es de primer grado en x y y, y la ecuación de una cónica,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (2)$$

es de segundo grado en x y y. Si la ecuación de un lugar geométrico no puede escribirse en ninguna de las formas (1) y (2), la curva correspondiente se dice que es una *curva plana de grado superior*.

Se sigue, de esto, que las curvas planas de grado superior incluyen todas las curvas trascendentes y todas las curvas algebraicas de grado superior a dos. No incluiremos, sin embargo, entre las curvas planas superiores, a aquellas cuyas ecuaciones, escritas en la forma de un polinomio igualado a cero, son tales que el primer miembro se pueda descomponer en dos o más factores entre las variables, de las formas dadas por las ecuaciones (1) y (2) anteriores (véase el Art. 20). Así, la ecuación

$$y^4 + x^2y^2 - 4x^3 - 4xy^2 - y^2 + 4x = 0$$

es de cuarto grado en las variables x y y, pero la curva que representa no será considerada como una curva plana superior porque la ecuación puede escribirse en la forma equivalente

$$(x^2 + y^2 - 1)(y^2 - 4x) = 0.$$

Como el número de curvas planas superiores es ilimitado, se hace necesario hacer una selección de las que van a estudiarse. Hay varias razones para hacer un estudio particular de una curva plana superior. Las principales entre estas razones se refieren a la importancia que tenga en Matemáticas superiores, a su carácter histórico y a sus aplicaciones prácticas. Tales consideraciones fueron las que sirvieron para hacer la selección de las curvas planas superiores estudiadas en este capítulo.

98. **Algunas curvas planas superiores algebraicas.** En este artículo, vamos a estudiar varios tipos de curvas planas algebraicas de grado superior.

a) *Curvas polinomias.* Si en la ecuación

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \tag{1}$$

el segundo miembro $f(x)$ es una función racional entera de x con coeficientes reales, el lugar geométrico que representa se llama una *curva polinomia*. Para $n = 1$, el lugar geométrico es una recta; para $n = 2$, el lugar geométrico es una parábola. Aquí consideraremos solamente curvas polinomias aquellas para las cuales $n \geq 3$; los lugares geométricos correspondientes son entonces curvas planas superiores.

Las curvas polinomias se trazan convenientemente determinando primero aquellos valores de x para los cuales y es igual a cero. Cada valor de x de esta clase se llama un *cero* del polinomio $f(x)$ represen-

tado por el segundo miembro de la ecuación (1); también se le conoce con el nombre de *raíz* de la ecuación $f(x) = 0$. Gráficamente, cada *raíz real* diferente, digamos a, representa la abscisa de un punto de intersección de la curva con el eje X. Se demuestra en Análisis matemático que la función polinomia $f(x)$ es continua; gráficamente, esto significa que el lugar geométrico es una curva continua.

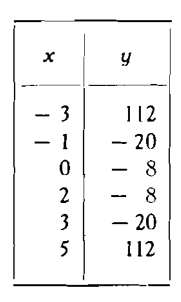
Ejemplo. Trazar la curva polinomia cuya ecuación es

$$y = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8. \qquad (2)$$

Solución. Por los métodos de la teoría de ecuaciones del Algebra, se halla que los ceros del segundo miembro de la ecuación (2) son -2, 1, 1, 4. Por tanto, podemos escribir la ecuación (2) en la forma

$$y = (x + 2)\ (x - 1)^2\ (x - 4). \qquad (3)$$

Las intersecciones de la curva con el eje X son los puntos de abscisas -2, 1 y 4. Como un ejemplo del método a seguir para obtener el signo de y para valores de x comprendidos entre las intersecciones, lo determinaremos para valores de x comprendidos entre -2 y 1. Sea $x = -1$, un valor comprendido entre -2 y 1. Para este valor de x, los signos de los factores del segundo miembro de la ecuación (3) son $+$, $+$ y $-$, respectivamente; por tanto, su producto y es negativo, lo que indica que la curva está abajo del eje X para valores de x comprendidos entre -2 y 1. Análogamente, podemos demostrar que entre las intersecciones 1 y 4 la curva también está abajo del eje X. El



x	y
-3	112
-1	-20
0	-8
2	-8
3	-20
5	112

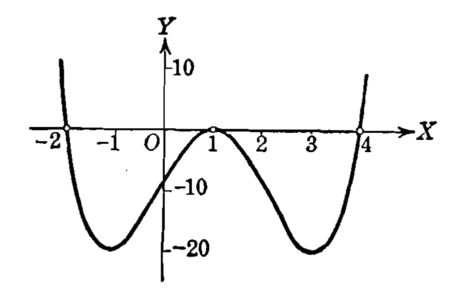


Fig. 135

mismo procedimiento se sigue para valores no comprendidos entre los intervalos pero incluídos por las intersecciones. Así, para $x < -2$, y para $x > 4$, la ecuación (3) muestra que y es positiva; luego, en estas regiones, la curva está sobre el eje X.

Después de hacer esta investigación preliminar, conviene, generalmente, obtener las coordenadas de algunos puntos de la curva, con el fin de obtener una gráfica adecuada. Esto puede hacerse convenientemente utilizando los métodos estudiados en Algebra para hallar el valor numérico de un polinomio. La gráfica de la ecuación (2) aparece en la figura 135.

NOTA. Como los coeficientes de la ecuación (1) son reales, cualesquiera raíces complejas de $f(x) = 0$ deben ocurrir en pares conjugados; entonces no hay

intersecciones correspondientes con el eje X. Pero para cada raíz real diferente, y para cada grupo de un número *impar* de raíces reales repetidas, el lugar geométrico corta al eje X. También para cada grupo de un número *par* de raíces reales iguales, cada una igual a, digamos a, la curva no corta al eje X, pero es tangente a él en el punto $(a, 0)$; esto está ilustrado en la curva de la figura 135.

b) *Curvas potenciales*. La ecuación

$$y = ax^n, \quad a \neq 0, \tag{4}$$

en donde n es una constante arbitraria o parámetro, representa una familia de curvas llamadas *curvas potenciales*. En particular, si n es positivo, se dice que las curvas de la familia (4) son del *tipo parabólico;* y si n es negativo, se dice que son del *tipo hiperbólico*. Así, si $n = 2$, la ecuación (4) representa una parábola, y si $n = -1$, representa una hipérbola equilátera.

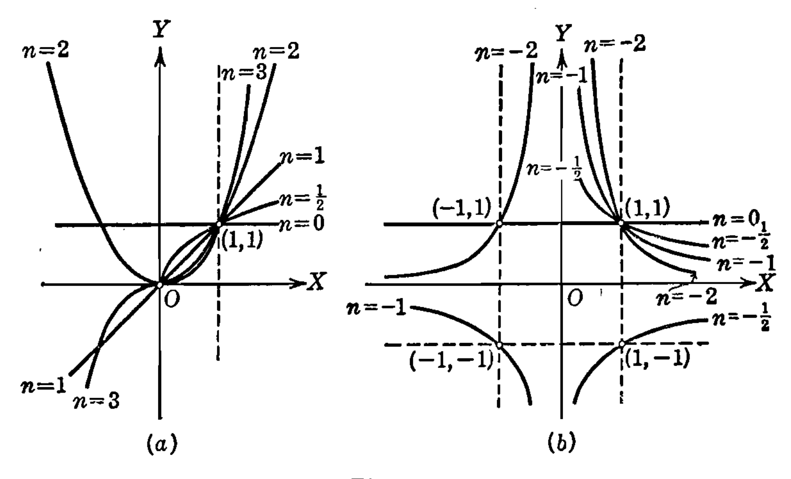


Fig. 136

Hemos considerado ya algunos casos especiales de la familia (4). Así, para $n = 0$ y 1, tenemos líneas rectas; para $n = 2$, una parábola; para $n = \frac{1}{2}$, una rama de una parábola; para $n = 3$, la parábola cúbica; para $n = \frac{2}{3}$, una parábola semicúbica, y para $n = \frac{3}{2}$, una rama de una parábola semicúbica. Algunas de estas curvas del tipo parabólico se han trazado en la figura 136(a), en donde a se toma igual a la unidad. Otras, del tipo hiperbólico, aparecen en la figura 136(b), en donde a se toma también igual a la unidad.

Las curvas potenciales tienen origen diverso. Por ejemplo, en la teoría de los gases, tenemos las curvas representadas por la ecuación

$$pv^n = k,$$

en donde p es la presión y v es el volumen de un gas, y n y k son constantes. En particular, si $n = 1$, tenemos la relación conocida como *ley de Boyle*.

c) *Curva de Agnesi*. Entre las curvas algebraicas de interés histórico está la *curva de Agnesi* o *la bruja*. Esta curva es el lugar geométrico de un punto P obtenido como sigue. Sea OA (fig. 137) un diámetro de un círculo y t su tangente en A. Desde O tracemos una recta cualquiera l y sean B y C sus puntos de intersección con la circunferencia y la recta t. Por B tracemos una recta perpendicular a OA y por C tracemos otra recta paralela a OA; sea P el punto de

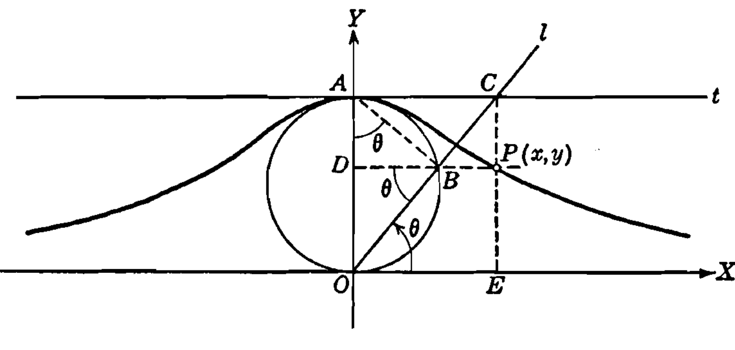


Fig. 137

intersección de estas dos rectas. La curva de Agnesi es el lugar geométrico que describe el punto P a medida que l gira en torno de O.

Para obtener la ecuación de la curva de Agnesi, tomemos el punto O como origen y el diámetro OA a lo largo del eje Y. La construcción del punto $P(x, y)$ es como aparece en la figura 137. Sean D y E los pies de las perpendiculares trazadas de B a OA y de C al eje X, respectivamente. Sea θ el ángulo que l forma con la parte positiva del eje X. Como θ varía a medida que l gira alrededor de O, lo emplearemos como parámetro. Tracemos la recta AB. Se verifica: ángulo $DBO =$ ángulo $DAB = \theta$. Sea a el radio del círculo. Las coordenadas del punto $P(x, y)$, serán:

$$x = \overline{OE} = \overline{AC} = \overline{OA} \operatorname{ctg} \theta = 2a \operatorname{ctg} \theta ,$$

$$y = \overline{EP} = \overline{OD} = \overline{OB} \operatorname{sen} \theta = \overline{OA} \operatorname{sen}^2 \theta = 2a \operatorname{sen}^2 \theta .$$

El estudiante debe demostrar que la ecuación rectangular de la curva de Agnesi, obtenida a partir de estas ecuaciones paramétricas, es

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}. \qquad (5)$$

La ecuación (5) nos dice que la curva es simétrica con respecto al eje Y y asintótica al eje X. El estudio completo de la curva se deja como ejercicio al estudiante.

99. Tres famosos problemas de la antigüedad. Tres problemas geométricos se hicieron famosos por los vanos esfuerzos que hicieron los antiguos matemáticos griegos para resolverlos utilizando solamente la regla y el compás. Estos problemas son

a) La duplicación del cubo.
b) La trisección de un ángulo arbitrario.
c) La cuadratura del círculo.

Modernamente se ha demostrado que la solución de cualquiera de estos problemas es imposible por medio de la regla y el compás solamente. Dedicaremos este artículo a un breve estudio de cada uno de estos célebres problemas, ligados a curvas también famosas.

a) *Duplicación del cubo*. Este problema significa la obtención de la arista de un cubo cuyo volumen sea igual al doble del volumen de un cubo dado. Demostraremos en seguida que este problema puede resolverse por medio de la curva llamada cisoide de Diocles. (pag 261)

Sea C el centro y $\overline{OA} = 2a$ (figura 138) el diámetro fijo del círculo generador de la cisoide. Con estos datos y los ejes indicados en la figura la ecuación rectangular de la curva es

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}. \qquad (1)$$

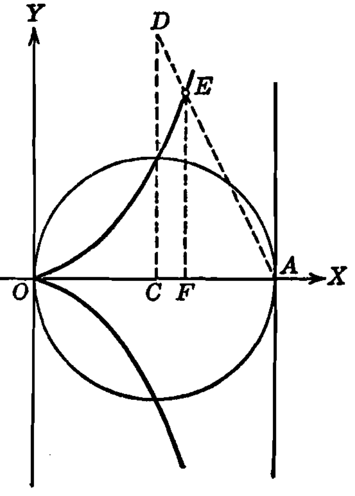


Fig. 138

Tracemos $\overline{CD} = 2a$ perpendicular al eje X, y sea E el punto de intersección de DA con la cisoide. Tracemos FE, la ordenada de E. De los triángulos semejantes DCA y EFA, tenemos

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} = \frac{a}{2a},$$

o sea,

$$\overline{FA} = \tfrac{1}{2}\,\overline{FE}. \qquad (2)$$

Por ser el punto E de la cisoide, tenemos, según la ecuación (1),

$$\overline{FE}^2 = \frac{\overline{OF}^3}{\overline{FA}},$$

y sustituyendo el valor de FA dado en la ecuación (2), resulta

$$\overline{FE}^2 = \frac{2\overline{OF}^3}{\overline{FE}},$$

de donde,

$$\overline{FE}^3 = 2\overline{OF}^3. \tag{3}$$

Sea b la arista de un cubo dado cualquiera. Construyamos un segmento de longitud c tal que

$$\frac{c}{b} = \frac{\overline{FE}}{\overline{OF}}.$$

Entonces, de la ecuación (3) tenemos

$$\frac{c^3}{b^3} = \frac{\overline{FE}^3}{\overline{OF}^3} = 2,$$

de donde,

$$c^3 = 2b^3.$$

Es decir, c es la arista de un cubo cuyo volumen es el doble del volumen del cubo dado de arista b.

b) *Trisección de un ángulo arbitrario.* Si bien es posible, por medio de la regla y el compás solamente, trisecar unos cuantos ángulos particulares, por ejemplo, un ángulo recto, no es posible hacerlo si se trata de un ángulo cualquiera. La trisección de cualquier ángulo puede efectuarse, sin embargo, por medio de la concoide de Nicomedes, como demostraremos ahora.

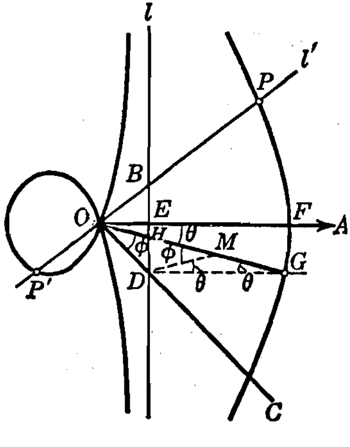


Fig. 139

Sea AOC (fig. 139) el ángulo que va a trisecarse. Por D, un punto cualquiera sobre el lado OC, tracemos la recta l perpendicular al lado OA y sea E su punto de intersección. Sobre OA tomemos el punto F tal que $\overline{EF} = 2\overline{OD}$.

Sea O el punto fijo y l la recta fija de una concoide construída como sigue (véase el ejercicio 22 del grupo 41, Art. 88). Por O

tracemos una recta cualquiera l' y sea B el punto en que corta a l. Sean P y P' dos puntos sobre l' a derecha e izquierda de B, respectivamente, y tales que $|\overline{BP}| = |\overline{BP'}| = b$, una constante, para cualquier posición de l'. Se llama concoide el lugar geométrico descrito por P y P'. Por este método, construyamos la concoide para la cual $b = |\overline{EF}|$. Por D tracemos una recta paralela a OA y sea G su punto de intersección con la concoide. Tracemos OG y sea H su intersección con l. Entonces

$$\text{Angulo } AOG = \tfrac{1}{3} \text{ ángulo } AOC.$$

La demostración de esta construcción es la siguiente: Tracemos DM siendo M el punto medio de HG. De la construcción de la concoide,

$$\overline{HG} = \overline{EF} = 2\overline{OD}.$$

Como M es el punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo GHD es equidistante de los tres vértices, y

$$\overline{DM} = \overline{MG} = \tfrac{1}{2}\overline{HG} = \overline{OD}.$$

Por tanto, tenemos dos triángulos isósceles, ODM y DMG, tales que

$$\text{ángulo } MOD = \text{ángulo } OMD,$$

y

$$\text{ángulo } MDG = \text{ángulo } MGD.$$

Llamemos ϕ y θ, respectivamente, a estos ángulos. El ángulo ϕ es un ángulo exterior del triángulo DMG; por tanto,

$$\phi = 2\theta.$$

Como DG es paralela a OA, tenemos

$$\text{ángulo } AOG = \text{ángulo } MGD = \theta.$$

Por tanto, finalmente,

$$\text{ángulo } AOC = \theta + \phi = 3\theta = 3 \text{ ángulo } AOG,$$

y la construcción está demostrada.

c) *Cuadratura del círculo*. Este problema consiste en la construcción de un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado. Se le conoce también como el problema de "cuadrar el círculo". El

lector comprenderá que la solución de este problema requiere la determinación de π, la razón de la circunferencia a su diámetro. En Matemáticas superiores se demuestra que no solamente es imposible resolver este problema por medio de la regla y el compás, sino que la solución no puede efectuarse por medio de ninguna curva algebraica cuya ecuación tenga coeficientes racionales.

EJERCICIOS. Grupo 45

En cada uno de los ejercicios 1-3 construir la curva correspondiente a la ecuación que se da.

1. $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

2. $y = 2x^4 - 11x^3 + 20x^2 - 12x$.

3. $y = x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 38x^2 - 43x + 15$.

4. Si la función polinomia general $f(x)$, igualada a cero, tiene por raíces los números complejos conjugados $a + bi$ y $a - bi$, en que a y b son reales, $b \neq 0$, y $i = \sqrt{-1}$, demuéstrese que $f(x)$ tiene un factor cuadrático positivo para todos los valores reales de x y, por tanto, que no hay ningún punto de intersección de la curva $y = f(x)$ con el eje X.

5. Si la función polinomia general $f(x)$, igualada a cero, tiene raíces reales de orden impar, iguales cada una a a, demuéstrese que la curva $y = f(x)$ corta al eje X en el punto $(a, 0)$.

6. Si la función polinomia general $f(x)$, igualada a cero, tiene raíces reales de orden par, iguales cada una a a, demuéstrese que la curva $y = f(x)$ es tangente al eje X en el punto $(a, 0)$.

7. Para las curvas potenciales $y=x^n$, demuéstrese: *a*) que todas las curvas del tipo parabólico pasan por el punto $(1, 1)$ y el origen; *b*) que todas las curvas del tipo hiperbólico son asintóticas a los ejes coordenados.

8. Dibújese la figura 136(*a*) del Artículo 98 a una escala más grande y agréguense las curvas correspondientes para $n = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5$. Compárense los lugares geométricos obtenidos haciendo variar el valor de n.

9. Dibújese la figura 136(*b*) del Artículo 98 a una escala más grande y agréguense las curvas correspondientes para $n = -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -3, -4$. Compárense los lugares geométricos obtenidos haciendo variar el valor de n.

10. Dibújense varias de las curvas potenciales representadas por la ecuación $x = ay^n$, y compárense con las curvas correspondientes de la familia $y = ax^n$.

En cada uno de los ejercicios 11-17, construir las curvas potenciales cuyas ecuaciones se dan.

11. $y = (x - 1)^3$. *Sugestión.* Trasládese el eje Y.

12. $y = (x + 1)^5$.

13. $y = x^4 + 1$.

14. $y - 2 = (x - 3)^4$.

15. $y + 1 = (x - 1)^{3/2}$.

16. $y - 1 = (x + 1)^{2/3}$.

17. $y - 3 = (x + 2)^{-4}$.

18. A partir de sus ecuaciones paramétricas, obténgase la ecuación rectangular de la curva de Agnesi dada por la ecuación (5) del Artículo 98. Efectuar una discusión completa de la curva.

19. Trazar la curva de Agnesi cuya ecuación es $y^2 = \dfrac{4a^2 x}{2a - x}$.

20. Empleando la construcción para la duplicación del cubo dada en el Artículo 99, demuéstrese que si en la figura 138 tomamos $\overline{CD} = na$, podemos obtener la arista de un cubo cuyo volumen sea n veces el del cubo dado.

21. Las parábolas $y^2 = 2ax$ y $x^2 = ay$ se cortan en el origen y en otro punto P. Considerando la abscisa del punto P, demostrar cómo el problema de la duplicación del cubo puede resolverse para un cubo dado de arista a.

22. Trácese la curva cuya ecuación es $x^3 + xy^2 - 3ax^2 + ay^2 = 0$. Esta curva se llama *trisectriz de Maclaurin*. Como su nombre lo indica puede usarse para trisecar un ángulo cualquiera.

23. Trazar la curva cuya ecuación es $x^4 + y^4 = a^4$. Esta curva se conoce con el nombre de *curva de cuarto grado de Lamé*.

24. En el mismo sistema de ejes coordenados dibujar las porciones de curvas de la familia de curvas $x^n + y^n = 1$, correspondientes al primer cuadrante cuando a n se le asignan sucesivamente los valores $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 1, 2 y 4. Identificar cada lugar geométrico, y observar el efecto obtenido haciendo variar el valor de n.

25. Trazar el lugar geométrico de $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Esta curva se llama *hoja de Descartes*.

26. Trazar el lugar geométrico de $(x^2 + y^2)^2 - ax^2 y = 0$. Esta curva se llama *bifoliada*.

27. Trazar la cuva cuya ecuación es $x^3 + xy^2 + ax^2 - ay^2 = 0$. Su lugar geométrico es la *estrofoide*.

28. Trazar el lugar geométrico de $y^4 - 2ay^3 + a^2 x^2 = 0$.

29. Trazar el lugar geométrico de $x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)$. Esta curva se llama *cruciforme*. El lector debe notar que aunque el origen pertenece al lugar geométrico, ningún otro punto de la vecindad del origen está sobre la curva. Un punto, tal como el origen, se llama entonces un *punto aislado*.

30. Trazar el lugar geométrico de $x^2 y - a^2 x + b^2 y = 0$. Esta curva se llama *serpentina*.

100. La sinusoide. El lector ya está familiarizado con la función sen x desde su estudio de Trigonometría. Las propiedades de esta función pueden estudiarse convenientemente por medio de la ecuación

$$y = \operatorname{sen} x. \tag{1}$$

El lugar geométrico de la ecuación (1) se llama *sinusoide*.

Las intersecciones de la curva (1) con el eje X son 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, y, en general, $n\pi$, en que n es un entero cualquiera. El único punto de intersección con el eje Y es el origen. Como

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x = -y,$$

la curva es simétrica con respecto al origen. A la variable x pueden asignársele todos los valores reales; la variable y puede tomar valores reales cualesquiera en el intervalo $-1 \leq y \leq 1$. Por tanto, el lugar geométrico se extiende indefinidamente hacia la derecha y hacia la izquierda del eje Y entre las rectas $y = \pm 1$. La curva no tiene asíntotas. Las coordenadas de un número suficiente de puntos pueden obtenerse de la tabla del Apéndice IC, 5, junta con las fórmulas de reducción dadas en el Apéndice IC, 3. Una parte del lugar geométrico aparece en la figura 140. El estudiante debe notar que las abscisas son números que representan la medida en *radianes* del ángulo.

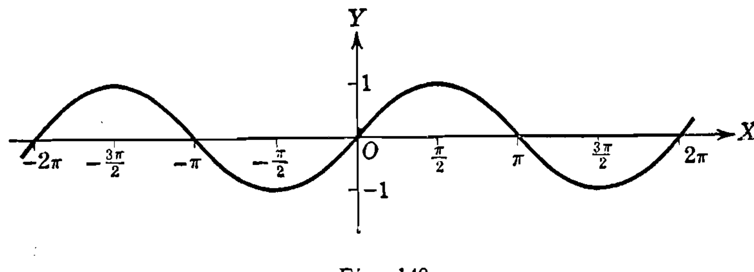


Fig. 140

Observamos que el lugar geométrico se repite idéntico para cada cambio de 2π radianes en el valor de x; se dice que tal curva es *periódica*. Más generalmente, si una función $f(x)$ tiene la propiedad de que

$$f(x) = f(x + p), \tag{2}$$

en que p es una constante diferente de cero, entonces se dice que $f(x)$ es una *función periódica*, y al valor mínimo positivo de p tal que la relación (2) se verifique aún, se le llama *período* de $f(x)$. Evidentemente, como $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$, la sinusoide (1) es periódica con período 2π. Cualquier porción de la curva que corresponde a un cambio en x igual al período se llama *ciclo* de la curva. Así, en la figura 140, un ciclo es aquella porción de la curva comprendida entre el origen y el punto $(2\pi, 0)$. También, la porción incluída entre dos intersecciones cualesquiera con el eje X se lama *arco*. El máximo de los valores absolutos de las ordenadas de una sinusoide se llama su *amplitud;* para la curva (1), la amplitud es la unidad.

Veamos ahora cómo se obtiene el período y la amplitud de una sinusoide partiendo de la ecuación general

$$y = a \operatorname{sen}(kx + \alpha), \tag{3}$$

en donde a, k y α son constantes. La amplitud de la curva (3) es igual a $|a|$; por esto, la cantidad a se llama *factor de amplitud*. Un ciclo completo del lugar geométrico de la ecuación (3) se obtiene cuando el ángulo $kx + \alpha$ varía en 2π radianes. Como k y α son constantes, esta variación puede efectuarse solamente alterando el valor de x. Evidentemente, lo que tiene que variar x, digamos p, es el período de la curva (3). Para calcular el valor de p escribimos

$$k(x + p) + \alpha - (kx + \alpha) = 2\pi,$$

de donde,

$$kp = 2\pi,$$

y

$$p = \frac{2\pi}{k}.$$

Vemos, por lo tanto, comparando los períodos de las curvas (1) y (3), que, mientras la curva (1) tiene un ciclo en el intervalo de 0 a 2π, la curva (3) tiene k ciclos en el mismo intervalo. Por esto, a la constante k se le llama *factor de periodicidad*.

El ángulo α en la ecuación (3) no afecta ni la amplitud ni el período de la sinusoide, pero afecta la posición de la curva con relación a los ejes coordenados. Esto puede verse escribiendo la ecuación (3) en la forma

$$y = a \operatorname{sen} k\left(x + \frac{\alpha}{k}\right) \qquad (4)$$

y comparando su gráfica con la ecuación

$$y = a \operatorname{sen} kx. \qquad (5)$$

Los lugares geométricos de las ecuaciones (4) y (5) son idénticos en forma, pero si se trazan en el mismo sistema de ejes coordenados aparecen como curvas separadas para las cuales los puntos correspondientes tienen las mismas ordenadas pero sus abscisas difieren en una cantidad igual a $\frac{\alpha}{k}$. Se dice entonces que la dos curvas están *fuera de fase* o *defasadas*, y al ángulo $\frac{\alpha}{k}$ se le da por esto el nombre de *ángulo de fase*.

Ejemplo. Trazar la sinusoide cuya ecuación es

$$y = 2 \operatorname{sen} (\tfrac{1}{2} x + 1), \qquad (6)$$

y determinar su amplitud, período y ángulo de fase.

Solución. La amplitud es igual, evidentemente, a 2. Como el factor de periodicidad es $\frac{1}{2}$, el período es igual a $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, y el ángulo de fase es igual a $\frac{1}{\frac{1}{2}}$, o sea, 2 radianes. El estudiante debe notar, en especial, que el número 1 que aparece en el ángulo de la ecuación (6) representa un radián y *no* un grado.

Para trazar el lugar geométrico de la ecuación (6), es conveniente trasladar primero el eje Y. Para ello escribiremos la ecuación (6) en la forma

$$y = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x + 2),$$

y haremos

$$x + 2 = x'.$$

De esta manera la ecuación transformada es

$$y = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} x'. \qquad (7)$$

Como $x = x' - 2$, el nuevo origen O' es el punto $(-2, 0)$. La gráfica de la ecuación (7) puede trazarse entonces con relación a los ejes X y Y' como

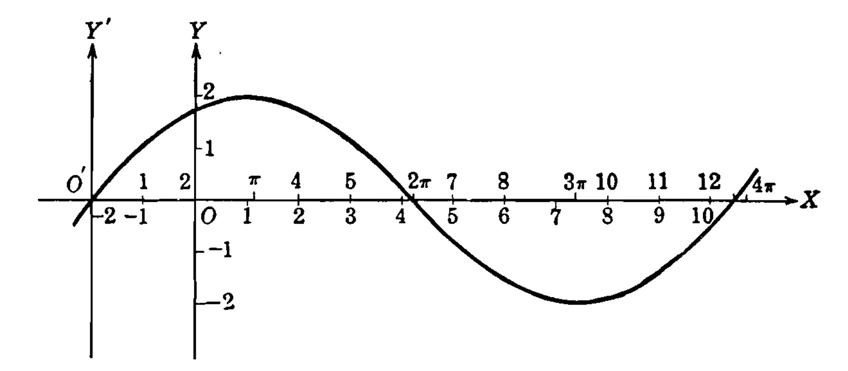


Fig. 141

se explicó para la gráfica (fig. 140) de la ecuación (1). Una parte de la curva resultante se ha representado en la figura 141; por supuesto, que esta gráfica es también el lugar geométrico de la ecuación (6) con relación a los ejes X y Y. La escala señalada encima del eje X es con relación al eje Y' y se emplea al trazar la gráfica de la ecuación (7); la escala inferior es con relación al eje Y y se emplea para leer las coordenadas de los puntos que están sobre la gráfica de la ecuación (6). Se puede obtener una comprobación parcial de la exactitud de la gráfica de la ecuación (6) determinando sus intersecciones con los ejes coordenados.

101. Otras curvas trigonométricas. Las cinco restantes funciones trigonométricas pueden estudiarse por medio de sus gráficas, cada una de las cuales recibe un nombre en relación con la función trigonométrica

correspondiente. Así, la función trigonométrica $\cos x$ se estudia por medio de la ecuación

$$y = \cos x, \tag{1}$$

cuya gráfica se llama la *cosinusoide*. Como $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, la cosinusoide puede trazarse por medio de la sinusoide

$$y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

La curva de la figura 142, difiere de la correspondiente a $y = \operatorname{sen} x$

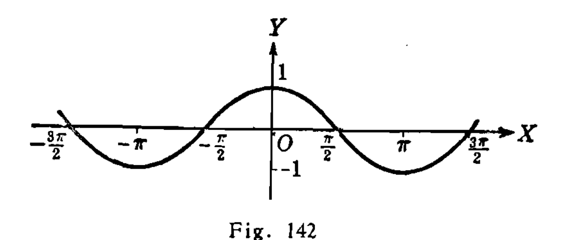


Fig. 142

de la figura 140 solamente por tener al eje Y desplazado $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la derecha. Como $\cos(-x) = \cos x$, la curva es simétrica con respecto al eje Y. La amplitud es la unidad, y como $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ el período es igual a 2π. El resto de la discusión de la curva se deja como ejercicio al estudiante.

La gráfica de la ecuación

$$y = \operatorname{tg} x \tag{2}$$

se llama *tangentoide*. Como $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$, la curva es periódica y su período es igual a π. La gráfica [fig. 143 (a)] se compone de un número infinito de ramas diferentes que tienen por asíntotas las

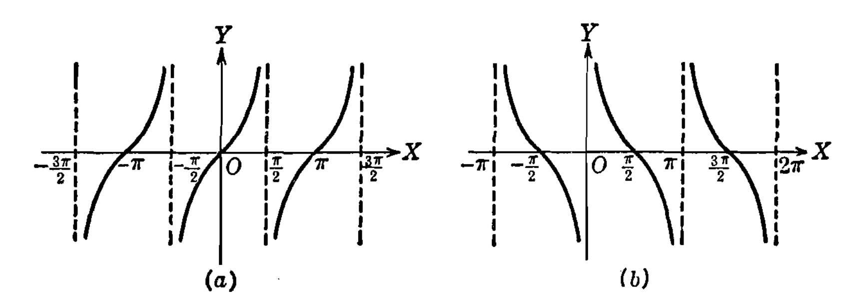


Fig. 143

rectas $x = \frac{n}{2}\pi$, en donde n es un entero impar. El resto de la discusión de la tangentoide se deja como ejercicio al estudiante. También debe desarrollar una discusión completa de la *cotangentoide*,

$$y = \operatorname{ctg} x, \qquad (3)$$

cuya gráfica está construída en la figura 143 (*b*).

La gráfica de la *secantoide*,

$$y = \sec x, \qquad (4)$$

está trazada en la figura 144 (*a*). La gráfica de la *cosecantoide*,

$$y = \csc x, \qquad (5)$$

se ha construído en la figura 144 (*b*). Ambas curvas, la secantoide y

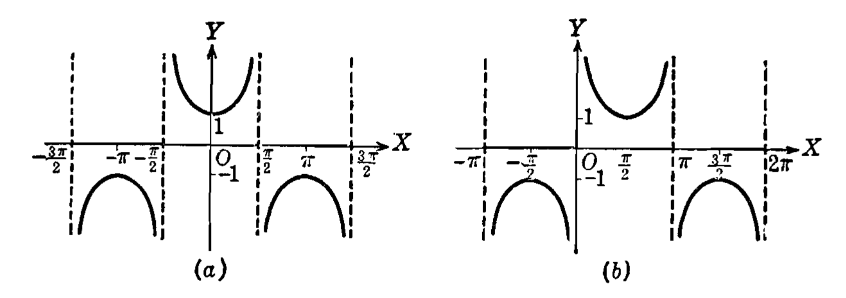


Fig. 144

la cosecantoide son periódicas, siendo el período de cada una igual a 2π. La discusión de estas curvas se deja como ejercicio al estudiante.

102. Gráficas de las funciones trigonométricas inversas. La función arc sen x puede estudiarse por medio de la ecuación

$$y = \operatorname{arc\,sen} x, \qquad (1)$$

la cual significa que y es el arco cuyo seno es x. La ecuación (1) se escribe frecuentemente en la forma

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x,$$

pero nosotros emplearemos la notación de la ecuación (1). La relación expresada por la ecuación (1) puede obtenerse a partir de la ecuación

$$x = \operatorname{sen} y \qquad (2)$$

despejando y en función de x. Por tanto, la relación (1) es inversa de la relación (2); consecuentemente, la función arc sen x se llama *función inversa* del seno, y la gráfica de la ecuación (1) se llama *curva seno inversa*.

Como la ecuación (1) se deduce de la ecuación (2), la gráfica de la ecuación (1) puede obtenerse partiendo de la ecuación (2) por el método estudiado en el Artículo 100. Parte de la gráfica se ha trazado en la figura 145(*a*). La discusión completa de la curva se deja como ejercicio al estudiante, pero llamaremos la atención sobre un hecho

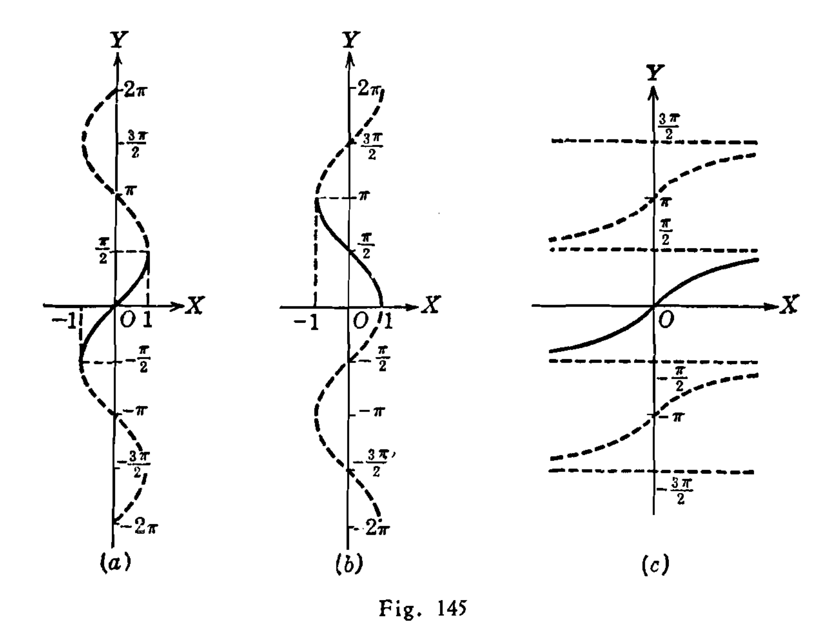


Fig. 145

importante: En el caso de la sinusoide, $y = \text{sen } x$, para cada valor asignado a x, se obtiene uno y solamente un valor de y. Decimos entonces que y es una *función uniforme de* x. En cambio, en el caso de la curva seno inversa (1), para cada valor que se le asigna a x, se obtiene un número infinito de valores para y. Así, si se le asigna a x el valor $\frac{1}{2}$, y puede tener uno cualquiera de los valores

$$\frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{ó} \quad \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,$$

siendo n un número entero cualquiera. De acuerdo con esto, se dice entonces que y es una *función multiforme de* x. Para ciertos estudios se hace necesario restringir los valores de y a un cierto intervalo con

el fin de convertir a esta función en uniforme. Para la función arc sen x, este intervalo es

$$-\frac{\pi}{2} \leq \text{arc sen } x \leq \frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

y estos valores se llaman los *valores principales* del arc sen x. El estudiante debe observar que, dentro del intervalo (3), la variable x puede tomar todos los valores desde -1 a $+1$, inclusive. Aquella porción de la curva seno inversa (1) incluída en el intervalo (3) se llama *rama principal* de la curva; esta curva es la trazada con una línea más gruesa en la figura 145(*a*).

Para la *curva coseno inversa* cuya ecuación es

$$y = \text{arc cos } x, \tag{4}$$

la variación de los valores principales está dada por el intervalo

$$0 \leq \text{arc cos } x \leq \pi. \tag{5}$$

La rama principal de esta curva es la trazada en línea gruesa en la figura 145(*b*).

Para la *curva tangente inversa* cuya ecuación es

$$y = \text{arc tg } x,$$

la variación de los valores principales es

$$-\frac{\pi}{2} < \text{arc tg } x < \frac{\pi}{2}.$$

La rama principal de esta curva aparece en línea gruesa en la figura 145(*c*).

Para la *curva cotangente inversa*, $y = \text{arc ctg } x$, la *curva secante inversa*, $y = \text{arc sec } x$, y la *curva cosecante inversa*, $y = \text{arc csc } x$, los valores principales están dados por los intervalos

$$0 < \text{arc ctg } x < \pi,$$

$$-\pi \leq \text{arc sec } x < -\frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq \text{arc sec } x < \frac{\pi}{2},$$

$$-\pi < \text{arc csc } x \leq -\frac{\pi}{2},$$

$$0 < \text{arc csc } x \leq \frac{\pi}{2}.$$

EJERCICIOS. Grupo 46

1. Mostrar gráficamente la amplitud de una sinusoide trazando en el mismo sistema de ejes coordenados, las curvas

$$y = \operatorname{sen} x, \quad y = 3 \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad y = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} x.$$

2. Mostrar el efecto del período en una sinusoide trazando, en el mismo sistema de ejes coordenados, las curvas

$$y = \operatorname{sen} x, \quad y = \operatorname{sen} 2x \quad \text{y} \quad y = \operatorname{sen} \frac{x}{3}.$$

3. Mostrar el efecto del ángulo de fase en la sinusoide trazando, en el mismo sistema de ejes coordenados, las curvas

$$y = \operatorname{sen} 2x, \quad y = \operatorname{sen}(2x + 60^\circ) \quad \text{y} \quad y = \operatorname{sen}(2x - 60^\circ).$$

En cada uno de los ejercicios 4-15, trácese la curva cuya ecuación se da. Determínense también su amplitud, período y ángulo de fase.

4. $y = 2 \operatorname{sen} 3x.$
5. $y = \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{2}.$
6. $y = 4 \operatorname{sen} 2\pi x.$
7. $y = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} (x + 2).$
8. $y = 4 \operatorname{sen} \left(\dfrac{x}{3} + 1\right).$
9. $y = -2 \operatorname{sen} (2x + \pi).$
10. $y + 1 = \operatorname{sen} (x - 1).$
11. $y - 3 = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} (x + 2).$
12. $x = \operatorname{sen} 2y.$
13. $x = -2 \operatorname{sen} \dfrac{y}{2}.$
14. $x = \operatorname{sen} \left(\dfrac{y}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right).$
15. $x + 3 = 3 \operatorname{sen} (2y + 4).$

16. Dar una discusión completa de la curva $y = \cos x$.
17. Dar una discusión completa de las curvas $y = \operatorname{tg} x$ y $y = \operatorname{ctg} x$.
18. Dar una discusión completa de las curvas $y = \sec x$ y $y = \csc x$.
19. Dar una discusión completa de la curva $y = a \cos(kx + \alpha)$, en que a, k y α son constantes.
20. Construir la gráfica de la ecuación $y = \operatorname{ctg} x$ a partir de la gráfica de $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

En cada uno de los ejercicios 21-28, trácese la curva cuya ecuación se da.

21. $y = \cos \dfrac{x}{3}.$
22. $y = \operatorname{tg} 2x.$
23. $y = \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2}.$
24. $y = \sec 3x.$
25. $y = \csc \dfrac{x}{4}.$
26. $x = 2 \cos 3y.$
27. $x = 2 \operatorname{tg} \dfrac{\pi y}{2}.$
28. $y - 1 = 3 \cos(x - 2).$

29. Dar una discusión completa de la curva seno inversa $y = \operatorname{arc\,sen} x$ y de la curva coseno inversa $y = \operatorname{arc\,cos} x$.
30. Dar una discusión completa de la curva tangente inversa $y = \operatorname{arc\,tg} x$ y de la curva cotangente inversa $y = \operatorname{arc\,ctg} x$.

31. Dar una discusión completa de la curva secante inversa $y = \text{arc sec } x$ y de la curva coszcante inversa $y = \text{arc csc } x$.

En cada uno de los ejercicios 32-35, trácese la cuva cuya ecuación se da.

32. $y = \text{arc sen}(x - 1)$.

33. $y = 2 \text{ arc cos } 2x$.

34. $y = 3 \text{ arc tg } \frac{x}{3}$.

35. $x = 2 \text{ arc cos}(2 - y)$.

103. Curva logarítmica. La función logarítmica puede estudiarse por medio de la ecuación

$$y = \log_a x, \qquad a > 0, \quad a \neq 1, \tag{1}$$

cuya gráfica se llama *curva logarítmica*. El número positivo a es una constante llamada *base* y cuyos valores se discutirán más tarde. Por la definición de logaritmo (Apéndice IB, 4), la ecuación (1) puede escribirse en la forma equivalente,

$$x = a^y. \tag{2}$$

La expresión a^y, llamada *función exponencial*, es, evidentemente, la *inversa* de la función logarítmica. La función exponencial y su gráfica, la curva exponencial, se estudiarán en el artículo siguiente.

Trazaremos primero la curva logarítmica (1). Para $x = 1$, $y = 0$; para $x = 0$, $\log_a x$, o sea y, no está definido. Por tanto, la única intersección con los ejes coordenados está dada por el punto $(1, 0)$. Evidentemente no hay simetría con respecto a ninguno de los ejes coordenados o al origen. Como los logaritmos de los números negativos son complejos, no se le pueden asignar a la variable x valores negativos; según esto, no hay curva a la izquierda del eje Y. Si la base a es mayor que la unidad, de la ecuación (2) se sigue que y aumenta de valor a medida que x lo hace; también, para $x > 1$, y es positiva, de manera que la curva se extiende indefinidamente hacia la derecha y hacia arriba del eje X. Para valores de x comprendidos en el intervalo $0 < x < 1$, y es negativa. A medida que x tiende a cero, y aumenta numéricamente sin límite en la dirección negativa; por tanto, la parte negativa del eje Y es una asíntota de la curva.

La discusión precedente da la localización general de la curva en el plano coordenado, para $a > 1$. La determinación de las coordenadas de los puntos de la curva depende, sin embargo, del valor asignado a la base a. Hay dos bases de uso corriente, la ***base común*** 10, para los cálculos numéricos ordinarios, y la ***base neperiana*** e, igual a 2,71828, aproximadamente, empleada casi exclusivamente en Matemáticas avanzadas. Para la base 10, las coordenadas de los puntos

de la curva (1) pueden obtenerse en una tabla de logaritmos comunes, tal como la Tabla A del Apéndice II; la gráfica correspondiente es la trazada en la figura 146. Las tablas de logaritmos de base e, llamados *logaritmos naturales* o *neperianos*, también pueden usarse. La relación entre los logaritmos comunes y los logaritmos naturales puede obtenerse por medio de la fórmula dada en el Apéndice IB, 4, según la cual

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = \frac{\log_{10} x}{0{,}43429} = 2{,}3026 \log_{10} x.$$

Por tanto, la gráfica de la ecuación (1) cuando $a = e$ puede obtenerse a partir de la gráfica para $a = 10$ multiplicando todas las ordenadas de la curva de la figura 146 por 2,3026.

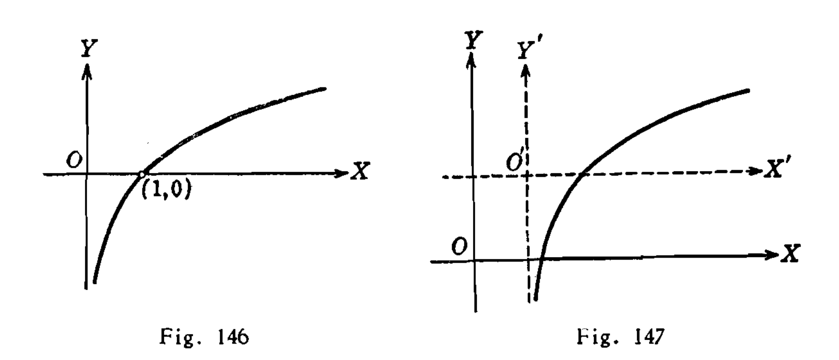


Fig. 146

Fig. 147

Ejemplo. Trazar la curva logarítmica cuya ecuación es

$$y = 2 \log_{10} 2 \sqrt{x-1}. \tag{3}$$

Solución. Por supuesto que se puede trazar la gráfica directamente partiendo de la ecuación (3). Pero podemos simplificar el procedimiento usando los teoremas sobre logaritmos dados en el Apéndice IB, 4, y escribiendo entonces la ecuación en la forma

$$y = \log_{10} 4 + \log_{10}(x-1).$$

Si pasamos $\log_{10} 4$ al primer miembro, y hacemos

$$x' = x - 1, \quad y' = y - \log_{10} 4,$$

la ecuación toma la forma

$$y' = \log_{10} x'. \tag{4}$$

La gráfica de la ecuación (4) puede trazarse ahora tal como se trazó la de la ecuación (1) anterior. La curva (fig. 147) se traza partiendo de la ecuación (4) con referencia a los nuevos ejes X' y Y' obtenidos trasladando los ejes originales al nuevo origen $O'(1, \log_{10} 4)$.

104. Curva exponencial. La función exponencial puede estudiarse por medio de la ecuación

$$y = a^x, \qquad a > 0, \quad a \neq 1, \tag{1}$$

cuya gráfica se llama *curva exponencial*. Se hizo notar en el artículo precedente que las funciones exponencial y logarítmica son inversas entre sí, ya que la ecuación (1) puede escribirse en la forma equivalente

$$x = \log_a y. \tag{2}$$

Es evidente, por la ecuación (2), que la curva exponencial (1) puede trazarse tal como se trazó la curva logarítmica

$$y = \log_a x, \qquad a > 0, \quad a \neq 1. \tag{3}$$

En suma, para el mismo valor de a, las dos curvas (1) y (3) son idénticas en su forma; difieren solamente en sus posiciones con relación a los ejes coordenados. En la figura 148 se han trazado varias curvas exponenciales para diversos valores de a, incluyendo el caso importante en que $a = e$, la base de los logaritmos neperianos. Todas estas curvas pasan por el punto $(0, 1)$ y son asintóticas al eje X.

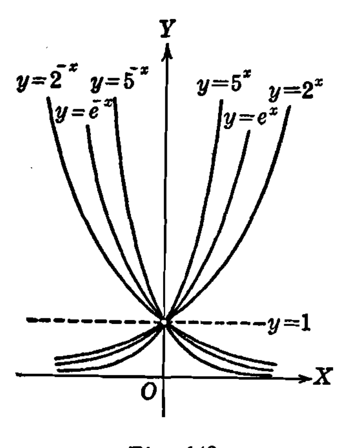


Fig. 148

La función exponencial es de una gran importancia en las Matemáticas avanzadas y sus aplicaciones. Se presenta en las expresiones matemáticas de una gran variedad de fenómenos físicos. Aparece frecuentemente en la forma

$$y = ce^{kx}, \tag{4}$$

en que c y k son constantes diferentes de cero y e es la base neperiana. Para tener una idea de lo mucho que se presenta la función exponencial en la práctica, basta considerar que aparece en la representación analítica de tan variados fenómenos como son el crecimiento de las bacterias, la descomposición del radio y la ley de Newton del enfriamiento. Se presenta también en la fórmula empleada para la determinación del interés continuo, y por esta razón se le menciona a veces como la *ley del interés compuesto*. En los ejercicios 22–28 del grupo 47 aparecen varias aplicaciones de la función exponencial; además se dan algunas ilustraciones más en el siguiente artículo.

La función exponencial aparece también en la ecuación

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}, \qquad (5)$$

en donde h es una constante arbitraria. La gráfica de esta ecuación se llama *curva de probabilidad* o *curva de error*. Es de importancia fundamental en la teoría de la probabilidad y sus aplicaciones. En el ejemplo siguiente se considera un tipo sencillo de curva de probabilidad; sirve para que se vea la forma general de tales curvas.

Como la función exponencial e^x ocurre tan frecuentemente en las aplicaciones, se han construído tablas de valores de e^x y e^{-x} para facilitar los cálculos numéricos. Una pequeña tabla de tales valores es la Tabla C en el Apéndice II.

Ejemplo. Trazar la curva de probabilidad cuya ecuación es

$$y = e^{-x^2}. \qquad (6)$$

Solución. Como y es diferente de cero para todos los valores de x, no hay intersección alguna con el eje X. Para $x = 0$, $y = 1$; por tanto, la intersección con el eje Y está dada por el punto $(0, 1)$. La curva es pues, evidentemente,

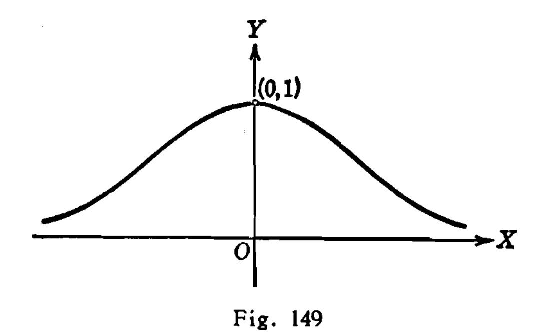


Fig. 149

simétrica con respecto al eje Y. Como x puede tomar todos los valores reales, la curva se extiende indefinidamente hacia la derecha e izquierda del eje Y. También, como y es positiva para todos los valores de x, la curva está en su totalidad arriba del eje X. Si escribimos la ecuación (6) en la forma

$$y = \frac{1}{e^{x^2}}, \qquad (7)$$

vemos, por ser $e > 1$, que, a medida que x aumenta de valor sin límite en la dirección positiva o en la negativa, y tiende a cero. Por tanto, el eje X es una asíntota. La ecuación (7) nos dice también que y alcanza su valor máximo cuando el valor de e^{x^2} es mínimo, y esto ocurre cuando $x = 0$. Por tanto, el valor máximo de y es 1, y $(0, 1)$ es un punto máximo de la curva. Las coordenadas de algunos puntos del lugar geométrico pueden obtenerse por medio de la Tabla C del Apéndice II. La gráfica es la representada en la figura 149.

EJERCICIOS. Grupo 47

En cada uno de los ejercicios 1-12, construir la curva logarítmica cuya ecuación se da.

1. $y = \log_e x$.
2. $y = \log_{10}(x - 2)$.
3. $y = -\log_{10} x$.
4. $y = \log_{10}(-x)$.
5. $y = 3 \log_2(x + 1)$.
6. $y = \log_{10} x^2$.
7. $y = \log_{10}\sqrt{x}$.
8. $y = \log_e \sqrt{x+1}$.
9. $x = \log_2(y + 4)$.
10. $y - 2 = 2 \log_e \sqrt{x-1}$.
11. $y = \log_e \operatorname{sen} x$.
12. $y = \log_e \cos x$.

13. Discutir la curva logarítmica $y = \log_a x$ cuando la base a está restringida a tomar valores comprendidos dentro del intervalo $0 < a < 1$.

14. En el mismo sistema de ejes coordenados, trazar las curvas $y = \log_a x$ cuando se le asignan a la base a los valores $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 2, 3 y 4. Compárense las curvas obtenidas haciendo variar el valor de a.

15. Explicar por qué en las ecuaciones de las curvas exponencial y logarítmica la constante a está restringida a tomar valores positivos diferentes de la unidad.

En cada uno de los ejercicios 16-21, trazar la curva exponencial cuya ecuación se da.

16. $y = 2(\frac{1}{2})^x$.
17. $y = 4e^{x-1}$.
18. $x = 3^y$.
19. $y = 3e^{-2x^2}$.
20. $y + 1 = 2^{x+1}$.
21. $y - 2 = 3e^{x-2}$.

22. Al final de n años, el monto C producido por un capital c al r por ciento de interés compuesto anual está dada por la fórmula

$$C = c(1 + r)^n.$$

Trazar la gráfica de esta ecuación cuando $c = 100$ y $r = 0{,}04$, siendo C y n las variables.

23. La presión P de la atmósfera a una altura h está dada, aproximadamente, por la fórmula

$$P = P_0 e^{-kh},$$

en la que P_0 es la presión al nivel del mar y k es una constante. Trazar la gráfica de esta ecuación cuando $P_0 = 76$ y $k = 0{,}13$, siendo P y h las variables.

24. Si T_0 es el exceso inicial de la temperatura de un cuerpo sobre la temperatura de los cuerpos que le rodean, entonces el exceso de temperatura T después de un lapso de tiempo t está dado, aproximadamente, para valores pequeños de T, por la fórmula conocida como ley de Newton del enfriamiento:

$$T = T_0 e^{-kt},$$

en la que k es una constante. Trazar la gráfica de esta ecuación cuando $T_0 = 100$ y $k = 0{,}4$ siendo T y t las variables.

25. Si A_0 es la cantidad original de radio que contiene una muestra, la cantidad A no descompuesta después de un lapso de tiempo t está dada por la fórmula

$$A = A_0 e^{-kt},$$

siendo k una constante. Trazar la gráfica de esta ecuación cuando $A_0 = 1$ y $k = 0{,}0004$, siendo A y t las variables.

26. Si I_0 es la intensidad inicial de una corriente telefónica, entonces su intensidad I después de un lapso de tiempo t está dada, bajo ciertas condiciones, por la fórmula

$$I = I_0 e^{-kt},$$

en que k es una constante. Trazar la gráfica de esta ecuación cuando $I_0 = 0{,}2$ y $k = 0{,}01$, siendo I y t las variables.

27. Si T y T_0 representan las fuerzas de tensión que actúan sobre los lados útil y libre, respectivamente, de una banda transmisora de energía, entonces

$$T = T_0 e^{k\theta},$$

en donde k es una constante. Trazar la gráfica de esta ecuación cuando $T_0 = 100$ y $k = 0{,}5$ siendo T y θ las variables.

28. Si la carga inicial de un condensador es Q_0, la carga Q después de un lapso de tiempo t está dada, bajo ciertas condiciones, por la fórmula

$$Q = Q_0 e^{-kt},$$

en donde k es una constante. Trazar la gráfica de esta ecuación cuando $Q_0 = 10$ y $k = 0{,}01$ siendo Q y t las variables.

En cada uno de los ejercicios 29 y 30, trácense las gráficas de las curvas dadas por sus ecuaciones paramétricas.

29. $x = \operatorname{sen} t,\quad y = e^t$.　　　**30.** $x = 2 + t,\quad y = \log_{10} t$.

105. Curvas compuestas. Si la ecuación de una curva es tal que puede considerarse como una combinación de las ecuaciones de dos o más curvas simples, diremos que su gráfica es una *curva compuesta*. Por ejemplo, la gráfica de la ecuación

$$y = x - \cos x$$

es una curva compuesta, ya que puede obtenerse como una combinación de la recta $y = x$ y de la cosinusoide $y = \cos x$. Ilustraremos el procedimiento a seguir para la construcción de la curva en el siguiente ejemplo. El método se conoce con el nombre de *adición de ordenadas*.

Ejemplo 1. Trazar la curva compuesta cuya ecuación es

$$y = x - \cos x. \qquad (1)$$

Solución. Podemos, por supuesto, trazar la curva calculando directamente las coordenadas de varios puntos a partir de la ecuación (1). Pero podemos también considerar la recta

$$y = x \qquad (2)$$

y la curva

$$y = -\cos x. \qquad (3)$$

Por métodos estudiados anteriormente, las gráficas de las ecuaciones (2) y (3) pueden trazarse rápida y fácilmente. Son las líneas punteadas de la figura 150. Para un valor particular de x, digamos x_1, sean y_1 y y_2, respectivamente, las ordenadas correspondientes sobre las curvas (2) y (3). Entonces la ordenada

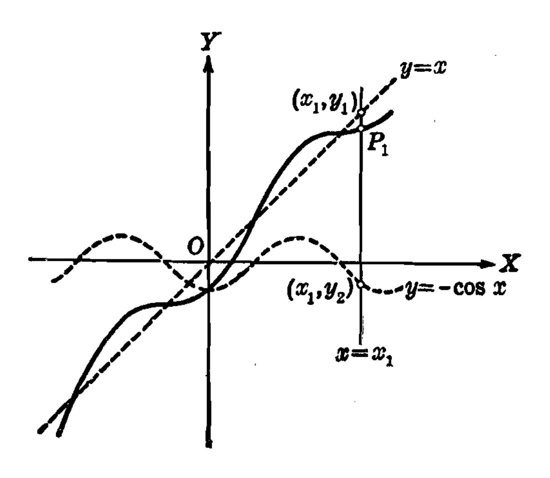


Fig. 150

de la curva (1) correspondiente a este valor $x = x_1$ puede obtenerse tomando la suma *algebraica* de las ordenadas y_1 y y_2. Por este método, se pueden determinar gráficamente puntos del lugar geométrico de la ecuación (1) a partir de las gráficas de las ecuaciones (2) y (3) como se hizo para el punto P_1. La curva resultante, correspondiente a la ecuación (1), aparece en la figura 150 en línea gruesa.

Las gráficas de las *funciones hiperbólicas* son ejemplos de curvas compuestas. El seno hiperbólico de x, que se escribe senh x, se define por la fórmula

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

y el coseno hiperbólico de x por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Las restantes funciones hiperbólicas, tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas de x, se definen de la misma manera que las funciones trigonométricas correspondientes. Esto nos da

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{ctgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

En el siguiente ejemplo se ilustra una aplicación importante del $\cosh x$.

Ejemplo 2. Trazar la curva cuya ecuación es

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad a > 0. \qquad (4)$$

Solución. La curva corta al eje Y solamente en el punto $(0, a)$. La curva es simétrica con respecto al eje Y. Como e^x es positiva para todos los valores de x, y es positiva para todos los valores de x. A medida que x tiende a infinito tomando valores positivos o negativos, y tiende a infinito positivamente. El valor mínimo de y es a. La curva se extiende indefinidamente a la derecha e izquierda del eje Y y hacia arriba de la recta $y = a$. No tiene asíntotas verticales ni horizontales. Para trazar la gráfica podemos tomar a igual a la unidad y usar entonces los valores de e^x y e^{-x} dados en la tabla C del Apéndice II. La gráfica puede también obtenerse partiendo de las curvas exponenciales $y = \frac{a}{2}e^{\frac{x}{a}}$ y $y = \frac{a}{2}e^{-\frac{x}{a}}$ por el método de adición de ordenadas. La gráfica aparece en línea gruesa en la figura 151; las curvas exponenciales están indicadas por líneas punteadas.

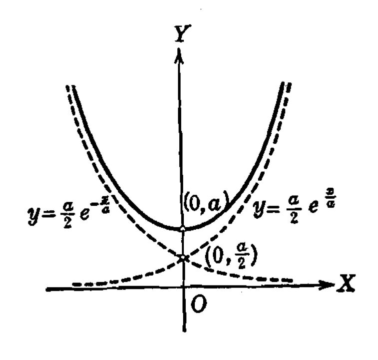


Fig. 151

Por la definición de $\cosh x$ dada arriba, la ecuación (4) puede escribirse en la forma

$$y = a \cosh \frac{x}{a}.$$

La curva se llama *catenaria*. Es la forma que toma un cable uniforme y flexible suspendido de dos puntos y colgando bajo su propio peso.

Consideremos ahora una curva de importancia fundamental en la teoría de las vibraciones. Se llama curva de las ***vibraciones decrecientes***, y su ecuación general es de la forma

$$y = ae^{-c^2x} \operatorname{sen}(kx + \alpha), \qquad (5)$$

siendo a, c, k y α constantes. Esta ecuación describe el movimiento, bajo condiciones apropiadas, de un cuerpo vibratorio que está sujeto a una fuerza resistente. La variable y mide el desplazamiento del cuerpo desde su posición de equilibrio a cualquier tiempo medido por la variable x. Si no estuviera el factor e^{-c^2x} la ecuación (5) tomaría la forma

$$y = a \operatorname{sen}(kx + \alpha), \qquad (6)$$

que es la sinusoide estudiada en el Artículo 100, ecuación (3). La amplitud de la curva (6) es constante e igual a $|a|$. En la ecuación (5), en cambio, el factor e^{-c^2x} tiene el efecto de disminuir la

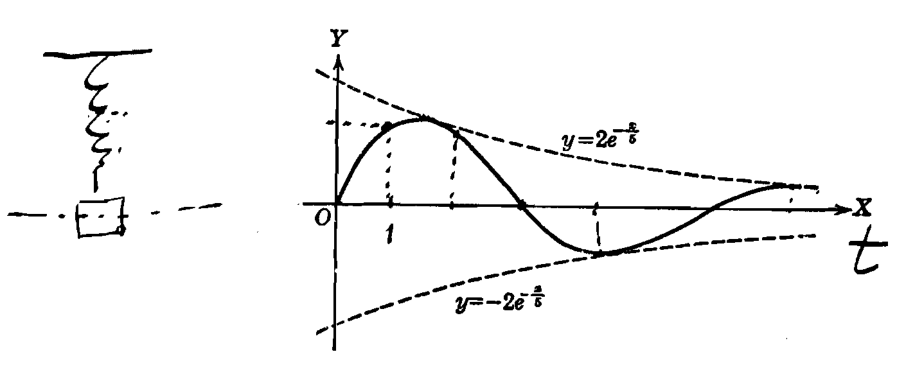


Fig. 152

amplitud o el desplazamiento del cuerpo desde su posición de equilibrio, a medida que x crece. Por esto e^{-c^2x} se llama *factor de crecimiento*. La forma general de la gráfica de la ecuación (5) se ilustra para un caso sencillo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Trazar la curva cuya ecuación es

$$y = 2e^{-\frac{x}{5}} \operatorname{sen} x. \qquad (7)$$

Solución. El trazado de esta curva es relativamente sencillo, pues el valor absoluto de sen x nunca excede a la unidad. Por tanto, el valor de y no puede exceder nunca a $2e^{-\frac{x}{5}}$ ni ser menor que $-2e^{-\frac{x}{5}}$; en consecuencia, la curva (7) está en su totalidad dentro de las curvas

$$y = 2e^{-\frac{x}{5}} \text{ y } y = -2e^{-\frac{x}{5}}, \qquad (8)$$

que por esto han sido llamadas *curvas circundantes* de la curva representada por la ecuación (7). Empezaremos, por tanto, trazando primero las curvas circundantes (8) que son las líneas de trazos de la figura 152. La gráfica de la

ecuación (7), trazada con línea gruesa en la figura 152, puede obtenerse ahora fácilmente considerando las variaciones de los valores de sen x. Para valores de $x = 0, \pi, 2\pi, \ldots,$ la curva (7) corta al eje X; para valores de

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \frac{9\pi}{2}, \quad \ldots,$$

corta a la curva circundante $2e^{-\frac{x}{5}}$, y para valores de

$$x = \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{7\pi}{2}, \quad \frac{11\pi}{2}, \quad \ldots,$$

corta a la otra curva circundante $y = -2e^{-\frac{x}{5}}$.

Se pueden usar ventajosamente curvas circundantes para trazar gráficas cuyas ecuaciones sean de la forma

$$y = f(x) \cdot g(x),$$

en que una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ sea una función seno o coseno. Unos ejemplos de tales ecuaciones son $y = x$ sen x y $y = x^2 \cos x$.

EJERCICIOS. Grupo 48

En cada uno de los ejercicios 1-10 construir la curva cuya ecuación se da.

1. $y = 2x - \operatorname{sen} x$.
2. $y = 3x + \cos 2x$.
3. $y - 1 = x - \operatorname{sen} 2x$.
4. $x = y + \cos 2y$.
5. $x + 1 = 2y - 2 \operatorname{sen} \frac{x}{3}$.
6. $y = x^2 + \operatorname{sen} x$.
7. $y = 3x + \log_{10} 2x$.
8. $y = x^2 + \log_{10} x$.
9. $y = \log_e x - \operatorname{sen} x$.
10. $y = \operatorname{sen} x + e^x$.

En cada uno de los ejercicios 11-14, construir la curva, a partir de su ecuación dada, por el método de adición de ordenadas. Compruébense los resultados por medio de las relaciones trigonométricas dadas en el Apéndice IC, 9.

11. $y = 3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x$.
12. $y = \operatorname{sen} 2x + \cos 2x$.
13. $y = 4 \operatorname{sen} 3x - 3 \cos 3x$.
14. $y = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{2}$.

En cada uno de los ejercicios 15-18, construir la curva cuya ecuación se da, y determinar su período.

15. $y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$.
16. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$.
17. $y = \operatorname{sen} 2x + \cos 3x$.
18. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x$.

19. Trazar la curva seno hiperbólico $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

20. Trazar la curva tangente hiperbólica $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

21. En el mismo sistema de ejes coordenados, trácense las gráficas de la curva de Agnesi, $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, la curva de probabilidad, $y = e^{-x^2}$, y la curva secante hiperbólica, $y = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$. Obsérvese la gran semejanza que tienen estas curvas entre sí.

22. Trazar la gráfica de la ecuación $y = \cosh x + \operatorname{senh} x$. Hallar la ecuación de la curva exponencial representada por esta ecuación.

23. Trazar la curva seno hiperbólico inverso $y = \operatorname{senh}^{-1} x$.

En cada uno de los ejercicios 24-35, construir la curva cuya ecuación se da,

24. $y = x \operatorname{sen} x$.

25. $y = x^2 \cos x$.

26. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

27. $y = 2e^{-x} \operatorname{sen} 2x$.

28. $y = 2e^{-x} \cos \frac{x}{2}$.

29. $y - 1 = 2e^{-x} \operatorname{sen} (2x + 4)$.

30. $y = \operatorname{sen}^2 x$.

31. $y = x \operatorname{sen}^2 x$.

32. $y = \log_{10} \frac{x + 1}{x}$.

33. $y = xe^x$.

34. $y = e^x \log_e x$.

35. $x = e^{-y} \operatorname{sen} 2y$.

GEOMETRIA ANALITICA DEL ESPACIO

CAPITULO XIII

EL PUNTO EN EL ESPACIO

106. Introducción. En la Geometría analítica plana solamente se consideran los puntos situados en un solo plano, el plano coordenado. Esta limitación no permite la investigación de las figuras generales en el espacio. Por esto, y con el fin de extender el método analítico al estudio de las figuras de tres dimensiones, quitamos la restricción impuesta y consideramos que el punto puede ocupar cualquier posición en el espacio.

Cuando un punto P está en un plano coordenado, su posición se fija con respecto a los elementos de referencia del plano. Si consideramos ahora que el punto P puede ser un punto cualquiera del espacio, su posición puede determinarse por su distancia perpendicular, llamémosla z, al plano coordenado. Vemos, entonces, que para localizar la posición de un punto en el espacio se requiere otra dimensión z además de las dos dimensiones del sistema coordenado plano. En consecuencia, desde este punto de vista, un sistema coordenado en el espacio es un sistema tridimensional obtenido como una extensión del sistema bidimensional. También vemos que, cuando a z se le asigna el valor particular cero, el sistema tridimensional se reduce al bidimensional, por tanto, un sistema de coordenadas en el plano puede considerarse como un caso especial de un sistema de coordenadas en el espacio. Desde este último punto de vista, es importante notar que una relación en el espacio se reduce a la relación correspondiente en el plano cuando se da a la tercera dimensión el valor cero. En adelante tendremos ocasión muy frecuentemente de observar esta analogía entre los sistemas bi y tridimensional.

En Geometría analítica plana las relaciones y las propiedades geométricas se expresan por medio de ecuaciones que contienen, en general, dos variables. En Geometría analítica del espacio, en cambio, tales ecuaciones contienen, en general, tres variables, y, es evidente,

que la presencia de esta variable adicional traerá una mayor complicación analítica que las relaciones con el plano. Además, el estudiante comprenderá perfectamente que la tercera dimensión de la Geometría analítica del espacio exigirá más trabajo de su poder de visualización de figuras en el espacio que el que requirió para figuras en el plano.

107. Sistema de coordenadas rectangulares en el espacio. En Geometría analítica del espacio se emplean varios sistemas de coordenadas. El más usado es el rectangular que describiremos y discutiremos en este artículo.

Consideremos tres planos mutuamente perpendiculares que se cortan en el punto común O, tal como se indica en la figura 153. Como el

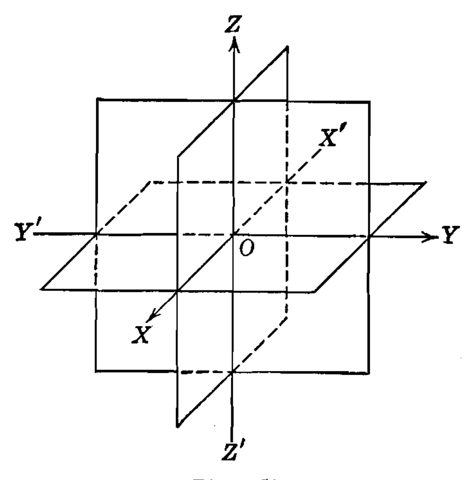


Fig. 153

punto en el espacio va a localizarse con referencia a estos elementos, los planos se llaman *planos coordenados*, las rectas de intersección de estos planos *ejes coordenados* y el punto O *origen* del *sistema de coordenadas rectangulares*. Teniendo lo anterior estamos en libertad de designar los ejes coordenados como queramos. Un convenio es el indicado en la figura 153; se dice entonces que el sistema de coordenadas es un sistema de *mano derecha*. Otro convenio, también muy usado, es el mismo que aparece en la figura 153 con excepción de que los ejes XX' y YY' están intercambiados; en este caso se dice que el sistema coordenado es un sistema de *mano izquierda*. En este libro emplearemos, en general, el primer sistema.

Los ejes coordenados XX', YY', ZZ' se llaman, respectivamente, *el eje* X, el Y y el Z. Estos ejes son rectas dirigidas, cuya dirección positiva está indicada en cada uno por una flecha. Cada plano

coordenado se designa por los dos ejes coordenados que contiene. Así, el plano coordenado que contiene al eje X y al eje Y se llama plano XY; análogamente, tenemos los planos XZ y YZ. Los tres planos coordenados dividen el espacio en ocho regiones llamadas *octantes*. El octante determinado por las partes positivas de los ejes coordenados se llama *primer octante;* no se acostumbra asignar ningún número a los siete octantes restantes. El estudiante puede concebir fácilmente el primer octante considerando una de las esquinas de una habitación rectangular en donde dos paredes adyacentes y el piso representan a los planos coordenados.

En seguida veremos cómo puede localizarse un punto en el espacio por medio del sistema de coordenadas rectangulares. En la práctica, no es necesario representar el sistema de coordenadas trazando los planos coordenados como aparecen en la figura 153; será suficiente para nuestros fines trazar solamente los ejes coordenados como se indica en la figura 154. Sea P un punto cualquiera del espacio. Su posición puede determinarse haciendo pasar por P planos paralelos a los tres planos coordenados y considerando los puntos A, B y C en que cortan a los ejes X, Y y Z, respectivamente. Estos planos, juntos con los coordenados forman un paralelepípedo recto rectangular. Evidentemente, la posición de P con relación al sistema de coordenadas está determinada por sus distancias a los planos coordenados. Estas distancias están dadas por las longitudes de los segmentos dirigidos OA, OB y OC, llamados x, y, z, respectivamente. Entonces los tres números reales x, y y z constituyen la *coordenada* x, la *coordenada* y y la *coordenada* z de P. Cada coordenada se mide *a partir* del origen O sobre el eje coordenado correspondiente, y es positiva o negativa según que su dirección sea la misma o la opuesta a la de la dirección positiva del eje. Para el punto P (fig. 154) todas las coordenadas son positivas, y el punto está en el primer octante. Las coordenadas x, y, z de cualquier punto P se escriben en ese *orden*, se encierran en un paréntesis y el punto se representa por $P(x, y, z)$.

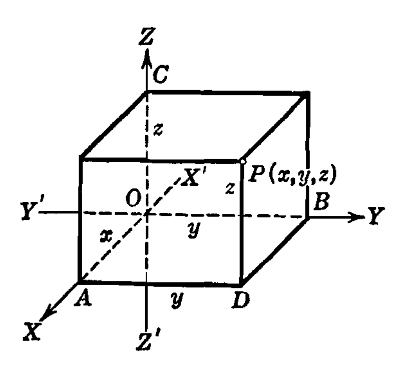


Fig. 154

Un punto P en el espacio tiene una y solamente una terna de coordenadas (x, y, z) relativa a un sistema coordenado rectangular especificado. Recíprocamente, una terna de coordenadas (x, y, z)

determina uno y solamente un punto P en el espacio con respecto a un sistema coordenado fijo.

Es importante escribir las coordenadas (x, y, z) de un punto P del espacio en su propio orden, ya que la posición de una coordenada en el conjunto indica a lo largo de qué eje se mide la coordenada particular. Por esto, las coordenadas de un punto en el espacio forman una *terna ordenada* de números reales. Por tanto, en vista de nuestra discusión previa, podemos decir que *un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del espacio y una terna ordenada de números reales.*

Como en Geometría analítica plana, la construcción de figuras apropiadas constituye una parte importante del trabajo desarrollado en la Geometría analítica del espacio. En este libro haremos uso de un método muy común llamado de *proyecciones paralelas*. Como se ve en la figura 154, los ejes X y Z se trazan en este sistema de proyección, perpendiculares entre sí, pero el eje X se traza de tal manera que el ángulo XOY sea mayor de $90°$ y, usualmente, se toma igual a $135°$. Entonces las distancias medidas a lo largo de, o paralelas a, los ejes Y y Z se trazan a escala completa, y las distancias medidas a lo largo de, o paralelas a, el eje X se acortan una cierta cantidad, generalmente hasta alrededor de siete décimos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ de la escala completa. En la figura 155, los puntos $P_1(3, 4, -2)$ y $P_2(-3, -5, 3)$ están trazados de acuerdo con estos convenios.

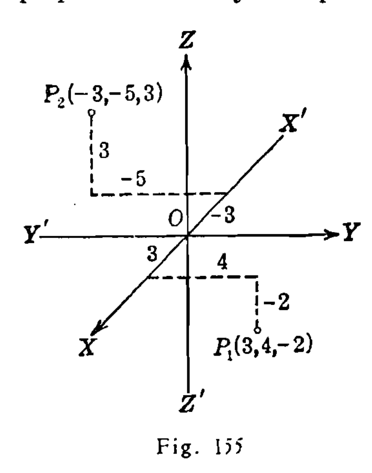


Fig. 155

EJERCICIOS. Grupo 49

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Trazar los puntos cuyas coordenadas son (2, 0, − 1), (4, − 3, 7), (− 5, − 9, 2) y (3, − 2, 4).
2. Escribir las coordenadas de los puntos O, A, B, C y D de la figura 154 del Artículo 107.
3. Escribir los signos de las coordenadas de los puntos situados en cada uno de los ocho octantes.

4. Construir el triángulo cuyos vértices son $(2, -1, 3)$, $(-1, 1, 2)$ y $(1, 5, -2)$.

5. Desde el punto $P(x, y, z)$ se trazan perpendiculares a los tres ejes coordenados. Hallar las coordenadas de los pies de estas perpendiculares.

6. Construir el tetraedro cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 2)$.

7. El punto $P(2, 3, 3)$ es un vértice del paralelepípedo recto rectangular formado por los planos coordenados y los planos que pasando por P son paralelos a ellos. Hallar las coordenadas de los otros siete vértices.

8. Hallar el volumen del paralelepípedo recto rectangular del ejercicio 7 y la longitud de su diagonal.

9. Empleando la figura 154 del Artículo 107, hallar la distancia del punto $P(x, y, z)$ a cada uno de los ejes coordenados.

10. Empleando la figura 154 del Artículo 107, hallar la distancia del origen al punto $P(x, y, z)$.

11. Se ha trazado una recta del origen al punto $(1, 2, 1)$. Hallar el ángulo que forma dicha recta con la parte positiva del eje Y.

12. Establecer una propiedad común de las coordenadas de todos los puntos que están: *a*) en el plano XY; *b*) en el plano XZ; *c*) en el plano YZ.

13. Establecer propiedades comunes de las coordenadas de todos los puntos que están: *a*) sobre el eje X; *b*) sobre el eje Y; *c*) sobre el eje Z.

14. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya coordenada z es igual a -5?

15. ¿Cuál es el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su coordenada x es siempre igual a 4?

16. ¿Cuál es el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su coordenada y es siempre igual a 2 y su coordenada z siempre igual a 3?

17. Demostrar que los puntos $P_1(x, y, z)$ y $P_2(x, -y, -z)$ son simétricos con respecto al eje X.

18. Establecer y demostrar teoremas análogos al del ejercicio 17 para la simetría de dos puntos con respecto al eje Y y al eje Z.

19. Se ha formado un paralelepípedo recto rectangular haciendo pasar planos paralelos a los planos coordenados por cada uno de los puntos $P_1(1, 2, 2)$ y $P_2(3, 6, 7)$. Hallar las coordenadas de los otros seis vértices y las longitudes de las aristas.

20. Hallar la longitud de la diagonal P_1P_2 del paralelepípedo recto rectangular del ejercicio 19.

108. Distancia entre dos puntos dados en el espacio. En éste y los artículos siguientes, tendremos ocasión de emplear el concepto de *proyección ortogonal* de un punto sobre un plano y sobre una recta en el espacio. La proyección ortogonal de un punto P sobre un plano es el pie de la perpendicular trazada de P al plano. La proyección ortogonal de un punto P sobre una recta l es el punto de intersección de l y el plano que pasando por P es perpendicular a l. La proyección de un segmento rectilíneo sobre un plano (o una recta) se deduce inmediatamente de estas definiciones. Así, si P'_1 y P'_2 son las proyecciones ortogonales respectivas sobre un plano (o una recta) de los

extremos P_1 y P_2 de un segmento, entonces la proyección P_1P_2 sobre ese plano (o recta) es el segmento $P_1'P_2'$.

Consideremos (fig. 156) dos puntos dados cualesquiera en el espacio $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Vamos a determinar la distancia $d = |\overline{P_1P_2}|$. Por cada uno de los puntos P_1 y P_2 hagamos pasar planos paralelos a los tres planos coordenados. Estos planos forman un paralelepípedo recto rectangular que tiene a P_1P_2 por diagonal y a P_1V_1, P_1V_2 y P_1V_3 por aristas. Estos planos dan también las proyecciones ortogonales de P_1 y P_2 sobre los planos y ejes coordenados. Así, P'_1 y P'_2 son las proyecciones ortogonales respectivas

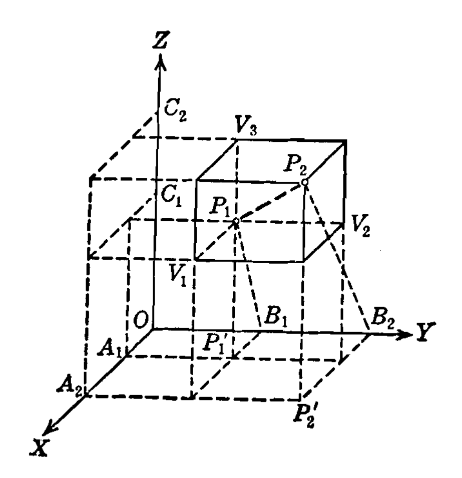


Fig. 156

de P_1 y P_2 sobre el plano XY, y $P'_1P'_2$ es la proyección P_1P_2 sobre el plano XY. También A_1, B_1 y C_1 son las proyecciones ortogonales respectivas de P_1 sobre los ejes X, Y y Z, y A_2, B_2, C_2 son las proyecciones respectivas de P_2 sobre los ejes X, Y y Z. Para simplificar la figura, algunas de las proyecciones y líneas proyectantes se han omitido.

Es muy sencillo demostrar, mediante una doble aplicación del teorema de Pitágoras, que el cuadrado de la longitud de la diagonal de un paralelepípedo recto rectangular es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus aristas. Por tanto, podemos escribir

$$d^2 = \overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1V_1}^2 + \overline{P_1V_2}^2 + \overline{P_1V_3}^2. \qquad (1)$$

Evidentemente, por la definición de las coordenadas de un punto en el espacio, las coordenadas de A_1 y A_2 son $(x_1, 0, 0)$ y

$(x_2, 0, 0)$, respectivamente. Por tanto, por el teorema 1 del Artículo 3, tenemos

$$\overline{P_1 V_1} = \overline{A_1 A_2} = x_2 - x_1.$$

Análogamente, tenemos

$$\overline{P_1 V_2} = \overline{B_1 B_2} = y_2 - y_1,$$

y

$$\overline{P_1 V_3} = \overline{C_1 C_2} = z_2 - z_1.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1), tenemos

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

de donde,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

De aquí el siguiente

TEOREMA 1. *La distancia* d *entre los dos puntos* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ***está dada por la fórmula***

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

NOTAS. 1. Si los puntos P_1 y P_2 están sobre el plano XY, las coordenadas z_1 y z_2 son ambas cero, y la fórmula dada en el teorema 1 se reduce a la fórmula dada en Geometría analítica plana, en el teorema 2 del Artículo 6.

2. Por medio del teorema 1 y las definiciones de las coordenadas de un punto, podemos determinar fácilmente la distancia de cualquier punto del espacio a cada uno de los planos y ejes coordenados, y al origen. Así, (fig. 156) las coordenadas del punto B_1 son $(0, y_1, 0)$. Por tanto, para la distancia de P_1 al eje Y, tenemos

$$|\overline{P_1 B_1}| = \sqrt{(0 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2 + (0 - z_1)^2} = \sqrt{x_1^2 + z_1^2}.$$

Ejemplo. Demostrar que el punto $P_1(2, 2, 3)$ equidista de los puntos $P_2(1, 4, -2)$ y $P_3(3, 7, 5)$.

Solución. Según el teorema 1 anterior, tenemos

$$|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{(1-2)^2 + (4-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{30}$$

y

$$|\overline{P_1 P_3}| = \sqrt{(3-2)^2 + (7-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{30}.$$

Por tanto, $|\overline{P_1 P_2}| = |\overline{P_1 P_3}|$. El estudiante debe trazar la figura correspondiente al ejemplo.

109. División de un segmento en el espacio en una razón dada. Ahora consideraremos la división de un segmento dado en el espacio en una razón dada. Esto es, simplemente, una ampliación del

problema análogo en el plano, que se ha estudiado en el teorema 3 del Artículo 7.

TEOREMA 2. *Si* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *son los extremos de un segmento dirigido* P_1P_2, *las coordenadas* (x, y, z) *de un punto* P *que divide a este segmento en la razón* $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ *son*

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, \quad z = \frac{z_1 + rz_2}{1 + r}, \quad (r \neq -1).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean P'_1, P' y P'_2 (fig. 157) las proyecciones respectivas de los puntos P_1, P y P_2 sobre el plano XY, y A_1, A y A_2 sobre el eje X. Las rectas proyectantes P_1P_1', PP' y $P_2P'_2$

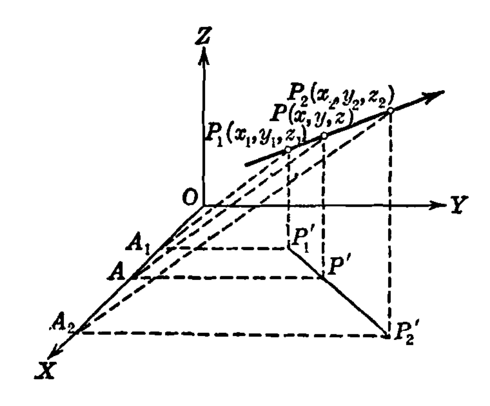


Fig. 157

son paralelas y están todas en el mismo plano; por tanto, por Geometría elemental, estas rectas interceptan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y $P'_1P'_2$, y tenemos

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{P'_1P'}}{\overline{P'P'_2}}. \quad (1)$$

Análogamente, considerando las rectas paralelas $A_1P'_1$, AP' y $A_2P'_2$, tenemos

$$\frac{\overline{P'_1P'}}{\overline{P'P'_2}} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}. \quad (2)$$

De las relaciones (1) y (2), resulta

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x},$$

de donde,

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}.$$

Por un procedimiento semejante obtenemos los valores de las coordenadas y y z.

NOTA. A este teorema se aplican las mismas observaciones hechas para el teorema análogo en el plano (teorema 3, Art. 7).

Para el caso particular en que P es el punto medio del segmento de recta dirigido P_1P_2, $r = 1$, y tenemos:

COROLARIO. *Las coordenadas del punto medio del segmento dirigido cuyos extremos son los puntos* (x_1, y_1, z_1) *y* (x_2, y_2, z_2) *son*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Ejemplo. Hallar las coordenadas de los puntos de trisección y el punto medio del segmento $P_1(1, -3, 5)$ y $P_2(-3, 3, -4)$.

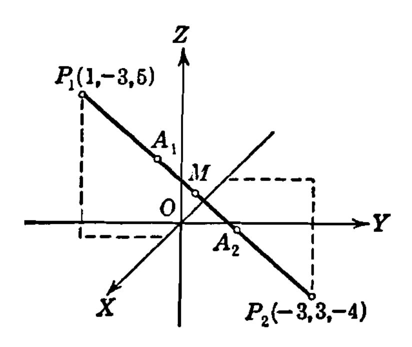


Fig. 158

Solución. Sean A_1 y A_2 (fig. 158) los puntos de trisección y M el punto medio de P_1P_2. Para A_1 tenemos $r = \frac{\overline{P_1A_1}}{\overline{A_1P_2}} = \frac{1}{2}$, y para A_2 tenemos $r = \frac{\overline{P_1A_2}}{\overline{A_2P_2}} = 2$. Por tanto, para el punto A_1, por el teorema 2 anterior,

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{1 + \frac{1}{2}(-3)}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}, \quad y = \frac{-3 + \frac{1}{2}(3)}{1 + \frac{1}{2}} = -1,$$

$$z = \frac{5 + \frac{1}{2}(-4)}{1 + \frac{1}{2}} = 2.$$

Análogamente, para el punto A_2, tenemos

$$x = \frac{1+2(-3)}{1+2} = -\frac{5}{3},\quad y = \frac{-3+2(3)}{1+2} = 1,\quad z = \frac{5+2(-4)}{1+2} = -1.$$

Las coordenadas del punto medio M, son

$$x = \frac{1-3}{2} = -1,\quad y = \frac{-3+3}{2} = 0 \text{ y } z = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}.$$

EJERCICIOS. Grupo 50

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar la distancia entre los puntos $P_1(-1, -2, 2)$ y $P_2(2, 4, -1)$.

2. Demostrar que los puntos $P_1(-2, 4, -3)$, $P_2(4, -3, -2)$ y $P_3(-3, -2, 4)$ son los vértices de un triángulo equilátero.

3. Hallar el perímetro del triángulo cuyos vértices son $A(-2, -3, -2)$, $B(-3, 1, 4)$ y $C(2, 3, -1)$.

4. Calculando ciertas distancias, demostrar que los tres puntos $(2, 0, -1)$, $(3, 2, -2)$ y $(5, 6, -4)$ son colineales.

5. Determinar la forma que toma la fórmula de la distancia entre dos puntos (teorema 1, Art. 108) cuando P_1 y P_2 están en un plano paralelo al plano XY y a k unidades de él.

6. Determinar la distancia desde un punto cualquiera $P(x, y, z)$ a cada uno de los planos y ejes coordenados, y al origen (véase la nota 2 del teorema 1, Art. 108). Ordénense los resultados en una tabla y obsérvese la simetría en las letras x, y y z.

7. Hallar la distancia del punto $(-2, 6, 3)$ a cada uno de los planos coordenados y al origen.

8. Hallar la distancia del punto $(3, -4, 2)$ a cada uno de los ejes coordenados.

9. Demostrar que el cuadrado de la distancia de cualquier punto al origen es igual a la suma de los cuadrados de sus distancias a los planos coordenados.

10. Los puntos extremos de un segmento son $P_1(-4, 1, 3)$ y $P_2(5, -2, 1)$. Hallar las longitudes de sus proyecciones sobre los ejes coordenados.

11. Hallar las longitudes de las proyecciones del segmento del ejercicio 10 sobre los planos coordenados.

12. Las longitudes de las proyecciones de un segmento sobre los ejes coordenados son 2, 2 y -1, respectivamente. Hallar la longitud del segmento.

13. Los puntos extremos de un segmento son $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Demostrar que la longitud de su proyección sobre el plano XY es igual a $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. *Sugestión.* Usese la figura 156 del Artículo 108.

14. Uno de los extremos de un segmento de longitud 3 es el punto $(3, 2, 1)$. Si las coordenadas x y y del otro extremo son 5 y 3, respectivamente, hállese la coordenada z. (Dos soluciones.)

15. Hallar la ecuación algebraica que expresa el hecho de que la distancia del punto (x, y, z) al punto $(2, 1, 4)$ es igual a 5. ¿Qué representa esta ecuación?

16. Determinar la ecuación algebraica que expresa el hecho de que el punto (x, y, z) equidista de los dos puntos $(3, 0, -1)$ y $(-2, 2, 1)$ ¿Qué representa esta ecuación?

17. Deducir las fórmulas para calcular los valores de y y z, y dibujar las figuras correspondientes, relativas al teorema 2 del Artículo 109.

18. Los puntos extremos de un segmento son $P_1(-2, 1, 4)$ y $P_2(3, 2, -1)$. Hallar las coordenadas del punto P que divide a este segmento en la razón $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = 3$.

19. Hallar las coordenadas de los puntos de trisección y el punto medio del segmento cuyos puntos extremos son $(5, -1, 7)$ y $(-3, 3, 1)$.

20. Los extremos de un segmento son $P_1(3, 2, 6)$ y $P_2(8, 3, 8)$. Hallar las coordenadas del punto P que divide a este segmento en la razón

$$\overline{P_2P} : \overline{PP_1} = -2.$$

21. Los extremos de un segmento son $P_1(5, 1, 2)$ y $P_2(1, 9, 6)$. Hallar la razón $\overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ en la cual el punto $P(2, 7, 5)$ divide a este segmento.

22. El punto P está sobre el segmento cuyos extremos son $(7, 2, 1)$ y $(10, 5, 7)$. Si la coordenada y de P es 4, hállense sus coordenadas x y z.

23. Los vértices de un triángulo son los puntos $(8, 0, 1)$, $(2, 3, 6)$ y $(-1, -3, 2)$. Hallar las coordenadas de su centro de gravedad. (Véase el ejercicio 19 del grupo 2, Art. 7.)

24. Los vértices de un triángulo son los puntos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) y (x_3, y_3, z_3). Demostrar que las coordenadas de su centro de gravedad son $(\frac{1}{3}[x_1 + x_2 + x_3], \frac{1}{3}[y_1 + y_2 + y_3], \frac{1}{3}[z_1 + z_2 + z_3])$. Usese este resultado para comprobar el ejercicio 23. (Véase el ejercicio 20 del grupo 2, Artículo 7.)

25. Demostrar que los tres segmentos que unen los puntos medios de las aristas opuestas de cualquier tetraedro pasan todos por un punto P que los biseca. El punto P se llama *centroide* o centro de gravedad del tetraedro.

110. Cosenos directores de una recta en el espacio. Vimos en Geometría analítica plana que la dirección de una recta en el plano se determina por medio de su ángulo de inclinación o de su pendiente (Art. 8). En este artículo veremos cómo se determina la dirección de una recta en el espacio.

Si dos rectas están en el mismo plano se dice que son *coplanarias*. Tales rectas pueden cortarse o no; si no se cortan, se dice que son *paralelas*. Por tanto, para que dos rectas cualesquiera en el espacio se corten o sean paralelas, es necesario que sean coplanarias. Consecuentemente, dos rectas cualesquiera en el espacio que no sean coplanarias no pueden ni cortarse ni ser paralelas; se llaman entonces *rectas que se cruzan*. Hasta aquí se ha definido el ángulo entre dos rectas dirigidas sobre el supuesto de que las dos rectas o se cortan o son paralelas (Art. 8). Es evidente, entonces, que debemos definir lo que entendemos por ángulo formado por dos rectas que se cruzan. Se llama *ángulo de dos rectas que se cruzan al formado por dos rectas cua-*

lesquiera que se cortan y son paralelas, respectivamente, a las rectas dadas y tienen el mismo sentido.

La dirección de una recta cualquiera en el espacio se determina por los ángulos que forma con los ejes coordenados. Sea l (fig. 159) cualquier recta dirigida en el espacio. Si l no pasa por el origen O, sea l' la recta que pasando por O es paralela a l y del mismo sentido. Entonces los ángulos α, β y γ formados por las partes positivas de los ejes X, Y y Z y la recta l' se llaman *ángulos directores* de la recta dirigida l. Un ángulo director puede tener cualquier valor desde $0°$ hasta $180°$ inclusive. Evidentemente, si la recta l es de sentido opuesto, sus ángulos directores son los ángulos suplementarios respectivos.

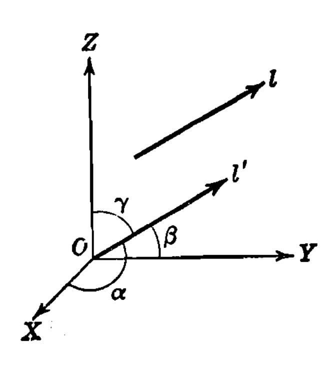


Fig. 159

En la resolución de nuestros problemas, veremos que generalmente es más conveniente usar los cosenos de los ángulos directores en lugar de los ángulos mismos. Estos cosenos, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, se llaman *cosenos directores* de la recta dirigida l. Como $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$, se sigue que si l es de sentido opuesto sus cosenos directores son $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$ y $-\cos\gamma$. Por tanto, cualquier recta del espacio, *no dirigida*, tiene *dos* sistemas de cosenos directores, iguales en valor absoluto, pero opuestos en signo.

Vamos a determinar los cosenos directores de una recta cuya posición en el espacio está dada por dos de sus puntos. Sea l [fig. 160(a)] una recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Primero consideraremos el caso en que l tiene el sentido indicado en la figura. Por cada uno de los puntos P_1 y P_2, hagamos pasar planos paralelos a los coordenados, formando así un paralelepípedo recto rectangular cuya diagonal es P_1P_2, y cuyas aristas paralelas a los ejes X, Y y Z son, respectivamente, P_1V_1, P_1V_2 y P_1V_3. Si cada arista tiene el mismo sentido que el eje a que es paralela, los ángulos directores son

$$\alpha = \text{ángulo } P_2P_1V_1, \quad \beta = \text{ángulo } P_2P_1V_2,$$

$$\gamma = \text{ángulo } P_2P_1V_3.$$

Ahora consideremos [figs. 160(b), (c) y (d)] los tres triángulos rectángulos formados por los dos puntos P_1, P_2 y cada uno de los

vértices V_1, V_2 y V_3. Para cada uno de estos triángulos sea $d = |\overline{P_1 P_2}|$, en que d se determina como en el teorema 1 del Artículo 108. También, como se vió en el Artículo 108,

$$\overline{P_1 V_1} = x_2 - x_1, \quad \overline{P_1 V_2} = y_2 - y_1, \quad \overline{P_1 V_3} = z_2 - z_1.$$

Por tanto, de los tres triángulos, tenemos, para los cosenos directores,

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}. \qquad (1)$$

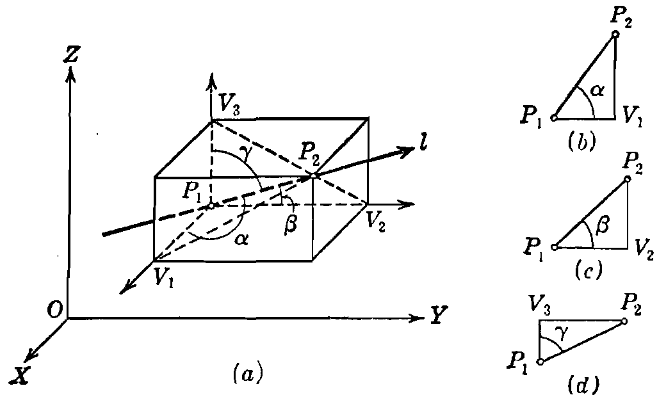


Fig. 160

Si la recta l se considera dirigida en el sentido de P_2 a P_1, entonces los tres cosenos directores son

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_2}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_1 - y_2}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z_1 - z_2}{d}. \qquad (2)$$

Los resultados precedentes conducen al siguiente

TEOREMA 3. *Los cosenos directores de la recta determinada por los dos puntos* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *y dirigida en el sentido de* P_1 *a* P_2, *son*

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d},$$

siendo d *la distancia entre* P_1 *y* P_2.

NOTA. El estudiante debe observar particularmente que d es un número positivo y que el signo de cada coseno director se determina por el signo del numerador que es la longitud de un segmento de recta *dirigido* (la proyección

de P_1P_2 sobre el eje coordenado correspondiente). Este numerador se obtiene siempre restando la coordenada del origen de la coordenada correspondiente del extremo del segmento. (Véase el teorema 1, Art. 3.)

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de cada una de las ecuaciones (1) y (2), y sumamos, obtenemos

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{d^2}.$$

Pero, por el teorema 1, Artículo 108,

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Por tanto, tenemos el siguiente importante resultado,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad (3)$$

que dice:

Teorema 4. *La suma de los cuadrados de los cosenos directores de cualquier recta es igual a la unidad.*

Nota. Por la ecuación (3) se ve que los ángulos directores de una recta no son todos independientes. En efecto, fijados dos de ellos, el tercero y su suplemento quedan determinados.

Por la ecuación (3) vemos también que no todos los cosenos directores de una recta pueden ser nulos. Como tendremos ocasión de referirnos a este hecho, lo anotaremos como un corolario al teorema 4.

Corolario. *De los cosenos directores de una recta uno, cuando menos, es diferente de cero.*

Ejemplo. Hallar los cosenos directores de la recta l (fig. 161) que pasa por los puntos $P_1(2, 1, -2)$ y $P_2(-2, 3, 3)$ y está dirigida de P_2 a P_1.

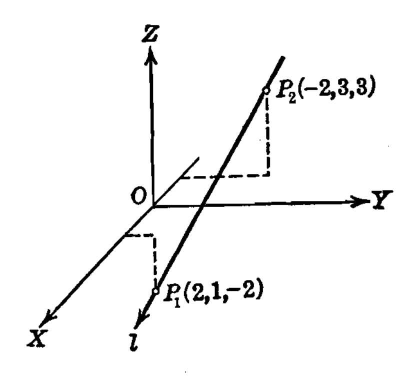


Fig. 161

Solución. La distancia entre P_1 y P_2 es

$$d = \sqrt{(2+2)^2 + (1-3)^2 + (-2-3)^2} = 3\sqrt{5}.$$

Entonces, como l está dirigida *de* P_2 *a* P_1, tenemos

$$\cos\alpha = \frac{2-(-2)}{d} = \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{4}{15}\sqrt{5},$$

$$\cos\beta = \frac{1-3}{3\sqrt{5}} = -\frac{2}{15}\sqrt{5},$$

$$\cos\gamma = \frac{-2-3}{3\sqrt{5}} = -\frac{1}{3}\sqrt{5}.$$

111. Números directores de una recta en el espacio. En lugar de los cosenos directores de una recta l conviene, a veces, emplear tres números reales, llamados *números directores* de l, que sean proporcionales a sus cosenos directores. Así, a, b y c son los números directores de una recta l, siempre que

$$\frac{a}{\cos \alpha} = \frac{b}{\cos \beta} = \frac{c}{\cos \gamma}, \tag{1}$$

en donde $\cos \alpha$, $\cos \beta$ y $\cos \gamma$ son los cosenos directores de l. Evidentemente, si $r \neq 0$, cualquier grupo de tres números, ra, rb y rc, puede servir como sistema de números directores. Del número infinito de sistemas de números directores de cualquier recta, elegimos generalmente, por simplicidad, el compuesto por enteros de valor numérico mínimo.

Como tendremos que usar frecuentemente los números directores de una recta, es conveniente introducir una notación especial para ellos. Si tres números reales cualesquiera, a, b y c, representan los números directores de una recta, indicaremos esto encerrándolos entre paréntesis rectangulares, así: $[a, b, c]$. Los paréntesis rectangulares sirven para distinguir los números directores de una recta de las coordenadas de un punto que se encierran en paréntesis ordinarios.

Los cosenos directores de una recta pueden determinarse fácilmente a partir de sus números directores. En efecto, igualemos cada una de las razones de (1) a algún número k diferente de cero, de modo que

$$a = k \cos \alpha, \quad b = k \cos \beta, \quad c = k \cos \gamma. \tag{2}$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de las ecuaciones (2), y sumamos, obtenemos

$$a^2 + b^2 + c^2 = k^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma),$$

la cual, por el teorema 4, Art. 110, se reduce a

$$a^2 + b^2 + c^2 = k^2,$$

de manera que $$k = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Por tanto, de las ecuaciones (2), tenemos el

TEOREMA 5. *Si* $[a, b, c]$ *son los números directores de una recta, sus cosenos directores son*

$$\cos \alpha = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos \beta = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos \gamma = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

en donde se escoge el signo superior o el inferior según que la recta esté dirigida en un sentido o en el sentido opuesto.

Por el corolario al teorema 4, Artículo 110, y por las ecuaciones (2) anteriores, tenemos el siguiente

COROLARIO 1. *De los números directores de una recta uno, cuando menos, es diferente de cero.*

Por el teorema 3, Artículo 110, tenemos:

COROLARIO 2. *Un sistema de números directores para la recta que pasa por los puntos* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *está dado por*

$$[x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1].$$

Ejemplo. Los números directores de una recta l son $[2, -2, -1]$. Hallar los cosenos directores de l si la recta está dirigida de tal manera que el ángulo β es agudo.

Solución. Por el teorema 5 anterior, los cosenos directores de l, cuando la recta no está dirigida, son

$$\cos\alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \pm \tfrac{2}{3}, \quad \cos\beta = \mp \tfrac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \mp \tfrac{1}{3}.$$

Como l está dirigida de tal manera que β es agudo, $\cos\beta$ es positivo. Por tanto, tomando los signos inferiores para los cosenos directores, tendremos

$$\cos\alpha = -\tfrac{2}{3}, \quad \cos\beta = \tfrac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \tfrac{1}{3}.$$

EJERCICIOS. Grupo 51

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar los cosenos directores de la recta que pasa por los puntos $P_1(2, 5, -1)$, $P_2(3, -2, 4)$ y que está dirigida de P_1 a P_2.
2. Hallar los cosenos directores de la recta que pasa por los puntos $P_1(-9, 2, 1)$, $P_2(-7, 0, 2)$ y que está dirigida de P_2 a P_1.
3. Dos de los cosenos directores de una recta son $\tfrac{2}{3}$ y $-\tfrac{1}{3}$. Hallar el tercer coseno director.
4. Hallar los cosenos directores de una recta si los ángulos directores α y β son $60°$ y $30°$, respectivamente.
5. Hallar los cosenos directores de una recta si $\alpha = 45°$, $\gamma = 60°$ y β es agudo.
6. Hallar los cosenos directores de una recta si $\beta = 45°$ y $\alpha = \gamma$.
7. Hallar los cosenos directores de una recta que forma ángulos iguales con los ejes coordenados.
8. Hallar el valor común de los ángulos directores de la recta del ejercicio 7. (Dos soluciones.)
9. Por medio de los cosenos directores, demostrar que los tres puntos $(4, 3, 1)$, $(-1, 2, -3)$ y $(-11, 0, -11)$ son colineales.

10. Si dos de los ángulos directores de una recta son cada uno de 60°, hállese el tercer ángulo director.

11. Hallar los ángulos directores de la bisectriz del ángulo formado por las partes positivas de los ejes X y Y, y después determinar sus cosenos directores.

12. Demostrar que si una recta está en el plano XY, la relación del teorema 4 (Art. 110) se reduce a $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$. (Véase el ejercicio 19 del grupo 14, Art. 37.)

13. Determinar a qué se reduce la relación del teorema 4 (Art. 110) para una recta que está: *a*) en el plano XZ; *b*) en el plano YZ.

14. El segmento dirigido $P_1 P_2$ tiene por cosenos directores $-\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{3}$. Si la distancia de P_1 a P_2 es 3 y las coordenadas de P_1 son $(7, 4, 1)$, hallar las coordenadas de P_2.

15. El segmento dirigido $P_1 P_2$ tiene por cosenos directores $\frac{6}{7}$, $-\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{7}$. Si la distancia de P_1 a P_2 es 7 y las coordenadas de P_2 son $(8, -2, 12)$, calcular las coordenadas de P_1.

16. Hallar los cosenos directores de una recta cuyos números directores son $[2, 4, -1]$.

17. Los números directores de una recta son $[-1, -1, 3]$. Hallar los cosenos directores de la recta si está dirigida de tal manera que el ángulo α es agudo.

18. Los números directores de una recta son $[5, -1, 2]$. Hallar los ángulos directores de dicha recta si está dirigida de tal manera que el ángulo γ es agudo.

19. Sea P un punto cualquiera distinto del origen, contenido en una recta l que pasa por el origen. Demostrar que un sistema de números directores para l está dado por las coordenadas de P.

20. Construir la recta que pasa por el origen y tiene por números directores $[1, -5, 4]$.

21. Una recta l pasa por los puntos P_1 y P_2. Demostrar que un sistema de números directores de l está dado por las longitudes de las proyecciones del segmento $P_1 P_2$ sobre los ejes coordenados.

22. Obtener el resultado del ejercicio 19 como un caso particular del ejercicio 21.

23. Construir la recta que pasa por el punto $(6, -9, 2)$ y que tiene por números directores $[4, 2, -1]$.

24. Hallar un sistema de números directores para la recta del ejercicio 7.

25. Por medio de números directores demostrar que los tres puntos $(2, 1, 4)$, $(4, 4, -1)$ y $(6, 7, -6)$ son colineales.

112. Angulo formado por dos rectas dirigidas en el espacio. Vamos a determinar el ángulo θ formado por dos rectas cualesquiera dirigidas, l_1 y l_2, en el espacio. Sean l'_1 y l'_2 (fig. 162) dos rectas trazadas por el origen y paralelas, y del mismo sentido, a l_1 y l_2, respectivamente. Por definición (Art. 110), el ángulo formado por las rectas dirigidas l_1 y l_2 es el ángulo θ. Sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto cualquiera, distinto del origen, sobre l'_1, y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ otro punto cualquiera, distinto del origen sobre l'_2. También, sea

$|\overline{OP_1}| = d_1$, $|\overline{OP_2}| = d_2$ y $|\overline{P_1P_2}| = d$. Por la ley de los cosenos (Apéndice IC, 11), tenemos, para el triángulo OP_1P_2,

$$\cos\theta = \frac{d_1^2 + d_2^2 - d^2}{2d_1d_2}. \qquad (1)$$

Por el teorema 1 del Artículo 108, tenemos

$$d_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad d_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$
$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

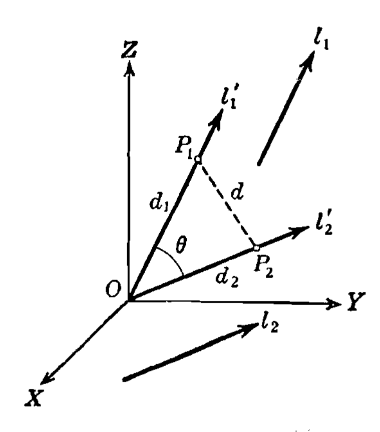


Fig. 162

Si sustituímos estos valores en el numerador del segundo miembro de la ecuación (1), y simplificamos, obtenemos

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{d_1d_2}. \qquad (2)$$

Sean α_1, β_1, γ_1 los ángulos directores de l_1 y, por tanto, de l'_1, y α_2, β_2, γ_2 los ángulos directores de l_2 y, por tanto, de l'_2. Por el teorema 3 del Artículo 110, tenemos

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_1}{d_1}, \quad \cos\beta_1 = \frac{y_1}{d_1}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{z_1}{d_1}$$

y
$$\cos\alpha_2 = \frac{x_2}{d_2}, \quad \cos\beta_2 = \frac{y_2}{d_2}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{z_2}{d_2}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2), obtenemos la relación buscada

$$\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2. \qquad (3)$$

Esta igualdad nos dice:

TEOREMA 6. *El ángulo θ formado por dos rectas dirigidas cualesquiera en el espacio, cuyos ángulos directores son* α_1, β_1, γ_1 *y* α_2, β_2, γ_2, *respectivamente, se determina por la relación*

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 .$$

Del teorema 6 se deducen los dos siguientes corolarios:

COROLARIO 1. *Para que dos rectas sean paralelas y del mismo sentido es condición necesaria y suficiente que sus ángulos directores correspondientes sean iguales; para que sean paralelas y de sentidos opuestos es necesario y suficiente que sus ángulos directores correspondientes sean suplementarios.*

COROLARIO 2. *Para que dos rectas dirigidas sean perpendiculares es necesario y suficiente que la suma de los productos de sus cosenos directores correspondientes sea igual a cero.*

Ahora vamos a obtener los resultados del teorema 6 y sus dos corolarios en función de los números directores de las dos rectas.

Sean $[a_1, b_1, c_1]$ y $[a_2, b_2, c_2]$ los números directores de las dos rectas l_1 y l_2, respectivamente. Por el teorema 5 del Artículo 111, tenemos

$$\cos\alpha_1 = \pm\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}, \quad \cos\beta_1 = \pm\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},$$

$$\cos\gamma_1 = \pm\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},$$

y

$$\cos\alpha_2 = \pm\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}, \quad \cos\beta_2 = \pm\frac{b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}},$$

$$\cos\gamma_2 = \pm\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

Sustituyendo estos valores en la relación del teorema 6, obtenemos:

TEOREMA 7. *El ángulo θ formado por dos rectas dirigidas cualesquiera en el espacio, cuyos números directores son* $[a_1, b_1, c_1]$ *y* $[a_2, b_2, c_2]$, *respectivamente, está determinado por la relación*

$$\cos\theta = \pm\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

NOTA. El doble signo indica que hay dos valores de θ, suplementarios entre sí. Un valor específico de θ puede obtenerse siempre considerando los dos sentidos de las rectas. Esto se ilustra en el ejemplo que damos a continuación.

Del teorema 7 se deducen los dos corolarios siguientes:

COROLARIO 1. *Para que dos rectas dirigidas sean paralelas es necesario y suficiente que sus números directores correspondientes sean proporcionales.*

COROLARIO 2. *Para que dos rectas dirigidas sean perpendiculares es necesario y suficiente que la suma de los productos de sus números directores correspondientes sea igual a cero.*

Ejemplo. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $P_1(1, -1, 2)$, $P_2(4, 5, -7)$ y $P_3(-1, 2, 1)$.

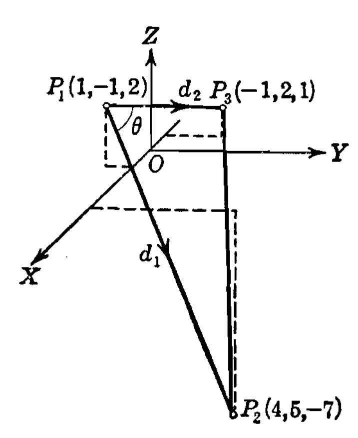


Fig. 163

Solución. El triángulo es el de la figura 163. Sea el ángulo $P_2P_1P_3 = \theta$, $|\overline{P_1P_2}| = d_1$ y $|\overline{P_1P_3}| = d_2$. El área del triángulo es (Apéndice IC, 12)

$$K = \tfrac{1}{2}\, d_1 d_2 \operatorname{sen} \theta. \qquad (4)$$

El sentido de los lados del ángulo θ correspondiente al vértice P_1 es el indicado en la figura. Para obtener los signos correctos de los cosenos directores de estos lados, restamos las coordenadas de P_1 de las coordenadas correspondientes de P_2 y P_3 (nota, teorema 3, Art. 110). Por tanto, por el corolario 2 del teorema 5, Art. 111, los números directores de

P_1P_2 son $[4 - 1,\ 5 + 1,\ -7 - 2]$,

o sea, $[3, 6, -9]$ ó $[1, 2, -3]$,

y los de P_1P_3 son $[-1 - 1,\ 2 + 1,\ 1 - 2]$, o sea, $[-2, 3, -1]$.

Por tanto, por el teorema 7 ó por el teorema 6, tenemos

$$\cos\theta = \frac{1(-2) + 2\cdot 3 + (-3)(-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}\,\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{-2 + 6 + 3}{\sqrt{14}\,\sqrt{14}} = \frac{1}{2}.$$

Como θ es agudo, $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Por el teorema 1 del Artículo 108,

$$d_1 = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-9)^2} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

y

$$d_2 = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}.$$

Sustituyendo estos valores en la relación (4), tenemos, para el área buscada,

$$K = \tfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21}{2}\sqrt{3}.$$

113. Números directores de una recta perpendicular a dos dadas. En este artículo vamos a considerar un artificio para obtener los números directores de una recta perpendicular a dos rectas dadas que nos va a ser muy útil al trabajar con planos y rectas en el espacio.

Sean $[a_1, b_1, c_1]$ y $[a_2, b_2, c_2]$ los números directores dados de dos rectas no paralelas, l_1 y l_2, respectivamente. Queremos determinar los números directores $[a, b, c]$ de una recta cualquiera l perpendicular a ambas l_1 y l_2. Tal recta existe. En efecto, si l_1 y l_2 se cortan, l puede representar una cualquiera de las rectas paralelas perpendiculares al plano determinado por l_1 y l_2. Si l_1 y l_2 se cruzan, entonces l puede representar una cualquiera de las rectas perpendiculares al plano determinado por dos rectas que se cortan y son paralelas respectivamente a l_1 y l_2.

Como l es perpendicular a l_1 y l_2, tenemos, por el corolario 2 del teorema 7, Artículo 112, las dos relaciones siguientes

$$\left.\begin{aligned} a_1 a + b_1 b + c_1 c = 0, \\ a_2 a + b_2 b + c_2 c = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

El sistema (1) consta de dos ecuaciones con tres incógnitas, a, b y c. Podemos resolver este sistema para dos cualesquiera de estas incógnitas en función de la tercera por la regla de Cramer (Apéndice IB, 6) siempre que el determinante del sistema sea diferente de cero Este determinante puede ser uno cualquiera de los tres determinantes

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Uno, por lo menos, de estos determinantes es diferente de cero. En efecto, si fueran todos nulos, tendríamos, respectivamente,

$$a_1 b_2 = a_2 b_1, \quad a_1 c_2 = a_2 c_1, \quad b_1 c_2 = b_2 c_1,$$

de donde,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

y por el corolario 1 del teorema 7, Artículo 112, esta última relación implica que l_1 y l_2 sean paralelas, lo que contradice la hipótesis. Por tanto, podemos suponer que el primero de los determinantes (2) es diferente de cero, y resolver el sistema (1) para a y b en términos de c.

Esto nos da

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -c_1c & b_1 \\ -c_2c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} c, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1c \\ a_2 & -c_2c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} c.$$

Ahora bien, c no puede ser cero. Porque, si $c = 0$, las últimas relaciones indican que a y b son ambas iguales a cero, lo que está en contradicción con el corolario 1 del teorema 5, Artículo 111. Como los números directores de una recta no son únicos, podemos, por simplicidad, escoger el sistema en que $c = 1$. Entonces los números directores de l son

$$a = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad c = 1.$$

Para mayor simplicidad, multipliquemos este sistema por el denominador que es diferente de cero. Esto nos da, finalmente, el sistema de números directores

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Este resultado nos dice:

TEOREMA 8. *Si* $[a_1, b_1, c_1]$ *y* $[a_2, b_2, c_2]$ *son los números directores dados de dos rectas no paralelas,* l_1 *y* l_2*, respectivamente, los números directores* $[a, b, c]$ *de cualquier recta* l *perpendicular a ambas* l_1 *y* l_2 *están dados por los determinantes*

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

NOTA. En la práctica, los tres determinantes del teorema 8 pueden obtenerse simplemente escribiendo primero los dos sistemas dados de números directores en tres columnas:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

El primer determinante se forma de las segunda y tercera columnas, el segundo de las tercera y primera columnas y el tercero de las primera y segunda columnas.

Nos referiremos en adelante a este esquema como el *artificio de los números directores.*

Ejemplo. Hallar un sistema de números directores para una recta cualquiera l que sea perpendicular al plano que contiene el triángulo cuyos vértices son $P_1(2, -1, 1)$, $P_2(-3, 2, 2)$ y $P_3(3, 3, -2)$.

Solución. Por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 111, dos sistemas de números directores para los lados P_1P_2 y P_1P_3 son, respectivamente,

$$[-3-2,\ 2+1,\ 2-1],\ \text{o sea},\ [-5,\ 3,\ 1]$$

y

$$[3-2,\ 3+1,\ -2-1],\ \text{o sea},\ [1,\ 4,\ -3].$$

Por tanto, por el artificio de los números directores, los números directores de l son

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -13, \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -14, \quad \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -23.$$

Los resultados de este capítulo son de importancia fundamental en el estudio de la Geometría analítica del espacio. Por esto se recomienda al estudiante que haga un cuadro resumen con todos ellos.

EJERCICIOS. Grupo 52

1. Hallar el coseno del ángulo formado por las dos rectas dirigidas cuyos cosenos directores son

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{6},\ \tfrac{1}{3}\sqrt{6},\ -\tfrac{1}{6}\sqrt{6} \quad \text{y} \quad -\tfrac{1}{7}\sqrt{14},\ \tfrac{3}{14}\sqrt{14},\ \tfrac{1}{14}\sqrt{14}.$$

2. Hallar el ángulo formado por las dos rectas dirigidas cuyos cosenos directores son $\frac{2}{7}$, $-\frac{3}{7}$, $\frac{6}{7}$ y $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

3. Si las dos rectas del teorema 6, Artículo 112, están en el plano XY, demuéstrese que la relación se reduce a $\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2$. (Ver el ejercicio 20 del grupo 14, Art. 37.)

4. La recta l_1 pasa por los puntos $(-6, -1, 3)$, $(-3, 2, 7)$, y la recta l_2 pasa por los puntos $(4, 2, 1)$, $(3, -2, 5)$. Hallar el ángulo agudo formado por l_1 y l_2.

5. Los números directores de las rectas l_1 y l_2 son $[2, -1, 2]$ y $[6, 2, -3]$, respectivamente. Hallar el ángulo obtuso formado por l_1 y l_2.

6. Por dos métodos diferentes demostrar que los puntos $(3, -5, 2)$, $(-5, 2, 3)$ y $(2, 3, -5)$ son los vértices de un triángulo equilátero.

7. Demostrar que los puntos $(4, 0, 1)$, $(5, 1, 3)$, $(3, 2, 5)$ y $(2, 1, 3)$ son los vértices de un paralelogramo.

8. Hallar el ángulo agudo del paralelogramo del ejercicio 7.

9. Hallar los ángulos del triángulo cuyos vértices son $(4, 1, 0)$, $(2, -1, 3)$ y $(1, -3, 2)$.

10. Demostrar que los puntos $(2, 1, 3)$, $(3, 3, 5)$ y $(0, 4, 1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar sus ángulos agudos.

11. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $(1, 0, 1)$, $(2, -2, 3)$ y $(7, -2, 4)$.

12. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $(6, 2, 1)$, $(4, -1, 3)$ y $(-2, 1, 0)$.

13. Hallar el volumen del prisma de altura 4 y cuya base es el triángulo de vértices (3, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 0).

14. Hallar el volumen de la pirámide de altura 6 y cuya base es el triángulo de vértices (0, 0, 0), (0, − 7, 0) y (− 3, 0, 0).

15. Hallar un sistema de números directores para cualquier recta perpendicular a cada una de las rectas que tienen [1, − 4, 2] y [2, 3, − 1] por números directores respectivos.

16. Hallar un sistema de números directores para cualquiera de las rectas perpendiculares a los lados del triángulo cuyos vértices son (− 5, 1, 2), (3, 0, 2) y (1, − 8, 9).

17. Hallar las relaciones que deben satisfacer las coordenadas de un punto $P(x, y, z)$ si debe estar sobre la recta que pasa por los puntos (1, 4, 1) y (2, − 3, 5).

18. Hallar las relaciones que deben satisfacer las coordenadas de un punto $P(x, y, z)$ si debe estar sobre la recta que pasa por el punto (4, 11, − 2) y que tiene por números directores [2, 3, − 1].

19. Un punto P está sobre la recta que pasa por los puntos (4, 2, 2) y (− 2, 0, 6). Si la coordenada y de P es 1, hállense sus otras coordenadas.

20. Una recta l pasa por los puntos (1, − 4, 3) y (4, − 11, 6). Hallar las coordenadas del punto en que l corta al plano XY.

21. Los números directores de una recta l son [5, − 3, 4], y la recta pasa por el punto (5, − 1, 1). Hallar las coordenadas del punto en que l corta al plano YZ.

22. Los números directores de dos rectas l_1 y l_2 son [− 1, − 6, 7] y [3, 2, − 4], respectivamente. El ángulo formado por l_1 y una recta l es de 60°. Hallar los números directores de l si se sabe que es perpendicular a l_2.

23. Hallar el punto de intersección de la recta que pasa por los puntos (3, − 5, 2), (11, − 3, 6) y la que pasa por los puntos (5, − 3, 2), (9, − 5, 6).

24. Una recta l_1 pasa por los puntos (2, 1, − 1), (5, − 1, 3) y otra recta l_2 pasa por el punto (− 4, 2, − 6) y por el punto P cuya coordenada x es 2. Hallar las otras coordenadas de P si l_1 es paralela a l_2.

25. Hallar el punto de intersección de la recta que pasa por los puntos (7, 3, 9), (1, 1, 1) y la que pasa por los puntos (2, 3, 3), (6, 1, 7).

CAPITULO XIV

EL PLANO

114. Introducción. En el capítulo precedente, consideramos el punto en el espacio y obtuvimos algunas propiedades fundamentales del punto y de la recta en la Geometría de tres dimensiones. Ahora vamos a comenzar el estudio sistemático de las ecuaciones de las figuras en el espacio. A medida que progresemos en nuestro estudio, veremos que una sola ecuación representa, en general, una superficie. Una curva en el espacio, en cambio, se representa analíticamente por dos ecuaciones rectangulares independientes. Desde este punto de vista, parece más simple considerar primero el problema general de las superficies. Comenzaremos naturalmente con la más sencilla de todas las superficies, el plano.

115. Forma general de la ecuación del plano. Vamos a obtener la ecuación de un plano cualquiera partiendo de sus bien definidas propiedades (Art. 22). En Geometría elemental, se dice que una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a cualquier recta del plano que pase por su pie. En vista de nuestra definición de ángulo formado por dos rectas que se cruzan (Art. 110), diremos ahora que una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a *toda* recta del plano, sin considerar si la recta del plano pasa por el pie de la perpendicular o no. Hay un número infinito de rectas perpendiculares a un plano; cada una de tales rectas se llama *normal* al plano.

Sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto fijo cualquiera y n una recta fija cualquiera en el espacio. Sean $[A, B, C]$ los números directores de n. Queremos hallar la ecuación del plano único que pasa por el punto P_1 y es perpendicular a la recta n.

Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera, diferente de P_1, sobre el plano (fig. 164). Sea l la recta que pasa por los puntos P_1 y P, y que, por tanto, está contenida en el plano. Entonces l y n son perpendiculares entre sí. Por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 111,

los números directores de l son $[x - x_1, y - y_1, z - z_1]$. Por tanto, por el corolario 2 del teorema 7, Artículo 112, tenemos

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \quad (1)$$

y esta es la condición que debe satisfacer cualquier punto del plano. La ecuación (1) puede escribirse en la forma

$$Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0,$$

y como la expresión encerrada entre paréntesis es una constante y, por tanto, puede reemplazarse por el término constante $-D$, resulta que la ecuación es de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2)$$

Recíprocamente, si $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es un punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2) y, por tanto, a la ecuación (1), se verifica que

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0,$$

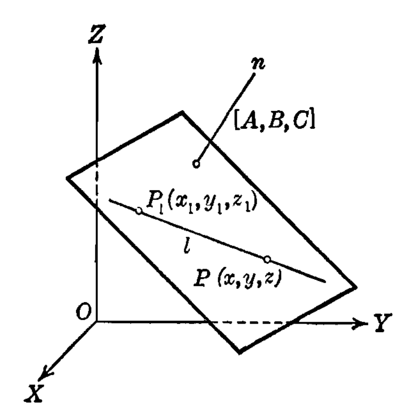


Fig. 164

y como esta igualdad establece que la recta l', que pasa por los puntos P_1 y P_2 es perpendicular a la normal n y, por tanto, está sobre el plano, resulta que el punto P_2 que está sobre l' está también sobre el plano. Por tanto, la ecuación (2) es la ecuación del plano. Se le llama *forma general* de la ecuación del plano.

Este resultado se expresa en el siguiente

TEOREMA 1. *La ecuación general de un plano es de la forma*

$$\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{Cz} + \mathrm{D} = 0,$$

en donde A, B, C *y* D *son constantes, y* [A, B, C] *son los números directores de su normal.*

Vamos a establecer ahora el recíproco del teorema 1:

TEOREMA 2. *Toda ecuación lineal de la forma*

$$\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{Cz} + \mathrm{D} = 0,$$

en la que por lo menos uno de los tres coeficientes A, B *y* C *es diferente de cero, representa un plano cuya normal tiene por números directores* [A, B, C].

DEMOSTRACIÓN. La ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2}$$

tiene un número infinito de soluciones. En efecto, por hipótesis, uno por lo menos de los tres coeficientes A, B y C es diferente de cero. Si suponemos que $A \neq 0$, podemos escribir

$$x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}z - \frac{D}{A}.$$

Ahora estamos en libertad de asignar cualquier par de valores a y y a z y calcular el valor correspondiente de x; cada terna tal de valores representa una solución de la ecuación (2) y, en consecuencia, las coordenadas de un punto que está sobre el lugar geométrico de la ecuación (2). Sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dos de estos puntos. Tendremos:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \tag{3}$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0. \tag{4}$$

Restando la ecuación (4) de la ecuación (3), resulta

$$A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) + C(z_1 - z_2) = 0. \tag{5}$$

Sea l la recta que pasa por P_1 y P_2. Sea $P_3(x_3, y_3, z_3)$ otro punto cualquiera, diferente de P_1 y P_2, de la recta l. Entonces, como un plano contiene a todos los puntos de la recta que pasa por dos de sus puntos, podemos demostrar que la ecuación (2) representa un plano demostrando que las coordenadas de P_3 satisfacen a esta ecuación.

Por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 111, los números directores de l, obtenidos a partir de P_1 y P_2, son

$$[x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2],$$

y, obtenidos a partir de P_1 y P_3, son

$$[x_1 - x_3, y_1 - y_3, z_1 - z_3].$$

Como estos son números directores para la misma recta l, debemos tener (Art. 112),

$$x_1 - x_2 = k(x_1 - x_3), \quad y_1 - y_2 = k(y_1 - y_3),$$
$$z_1 - z_2 = k(z_1 - z_3); \quad k \neq 0.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (5), obtenemos

$$Ak(x_1 - x_3) + Bk(y_1 - y_3) + Ck(z_1 - z_3) = 0,$$

de donde, como $k \neq 0$, resulta:

$$A(x_1 - x_3) + B(y_1 - y_3) + C(z_1 - z_3) = 0. \qquad (6)$$

Si restamos la ecuación (6) de la ecuación (3), obtenemos

$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0,$$

lo que demuestra que el punto P_3 está sobre el lugar geométrico de la ecuación (2). Por tanto, la ecuación (2) representa un plano. Además, las ecuaciones (5) y (6) muestran que la normal a este plano tiene por números directores $[A, B, C]$. Esto completa la demostración.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P_1(-2, -1, 5)$ y es perpendicular a la recta l determinada por los puntos $P_2(2, -1, 2)$ y $P_3(-3, 1, -2)$.

Solución. Por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 111, los números directores de l son $[-3-2, 1+1, -2-2]$, o sea, $[5, -2, 4]$. Como l es perpendicular al plano, los números directores de su normal son también $[5, -2, 4]$. Por tanto, por pasar el plano por el punto $P_1(-2, -1, 5]$, tenemos que la ecuación buscada del plano es

$$5(x+2) - 2(y+1) + 4(z-5) = 0$$

o sea,

$$5x - 2y + 4z - 12 = 0.$$

Ejemplo 2. Hallar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos no colineales $P_1(2, -1, 1)$, $P_2(-2, 1, 3)$ y $P_3(3, 2, -2)$.

Solución. Como se nos han dado tres puntos del plano, nos queda por determinar simplemente los números directores de la normal al plano. Los números directores del segmento P_1P_2 son $[-2-2, 1+1, 3-1]$, o sea, $[2, -1, -1]$, y los del segmento P_1P_3 son $[3-2, 2+1, -2-1]$, o sea, $[1, 3, -3]$. Como estos segmentos están en el plano, son ambos perpendiculares a su normal. Por tanto, por el artificio de los números directores (Art. 113), los números directores de la normal son

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 6, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

Consecuentemente, usando las coordenadas del punto $P_1(2, -1, 1)$, hallamos que la ecuación buscada es

$$6(x-2) + 5(y+1) + 7(z-1) = 0$$

o sea,

$$6x + 5y + 7z - 14 = 0.$$

116. Discusión de la forma general. En el artículo anterior hemos obtenido que la forma general de la ecuación de cualquier plano, es

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

en donde $[A, B, C]$ son los números directores de la normal. Como por lo menos uno de los coeficientes A, B y C es diferente de cero, supongamos que $A \neq 0$. Entonces podemos escribir la ecuación en la forma

$$x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A}z + \frac{D}{A} = 0. \tag{2}$$

La ecuación (2) contiene tres constantes arbitrarias independientes. Por tanto, *analíticamente, la ecuación de cualquier plano queda perfectamente determinada por tres condiciones independientes*. Geométricamente, un plano también queda determinado por tres condiciones independientes; por ejemplo, tres puntos dados no colineales determinan un plano único.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación del plano determinado por los tres puntos no colineales $P_1(2, -1, 1)$, $P_2(-2, 1, 3)$ y $P_3(3, 2, -2)$.

Solucion. Este problema es idéntico al ejemplo 2 del Artículo 115, pero vamos a emplear un método diferente para su solución.

La ecuación buscada es lineal de la forma (1) anterior; hay que encontrar los valores de los coeficientes. Como los puntos P_1, P_2 y P_3 están sobre el plano, sus coordenadas deben satisfacer su ecuación, y tenemos, respectivamente,

$$\left.\begin{aligned} 2A - B + C + D &= 0, \\ -2A + B + 3C + D &= 0, \\ 3A + 2B - 2C + D &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Podemos resolver este sistema para tres cualesquiera de las literales en términos de la cuarta, siempre que esta última no sea igual a cero. Si $D \neq 0$, la solución del sistema (3) es

$$A = -\frac{3}{7}D, \quad B = -\frac{5}{14}D, \quad C = -\frac{D}{2}.$$

Sustituyendo estos valores de A, B y C en la forma general (1), obtenemos

$$-\frac{3}{7}Dx - \frac{5}{14}Dy - \frac{D}{2}z + D = 0.$$

Dividiendo toda la ecuación por $D \neq 0$, y simplificando, obtenemos como ecuación del plano

$$6x + 5y + 7z - 14 = 0.$$

Una de las partes más importantes de la Geometría analítica es la construcción de figuras a partir de sus ecuaciones. La construcción de una superficie se facilita considerablemente por la determinación de sus intersecciones con los ejes coordenados y de sus trazos sobre los planos coordenados.

Definiciones. Llamaremos *intercepción* de una superficie sobre un eje coordenado a la coordenada correspondiente del punto de intersección de la superficie y el eje coordenado.

La *traza* de una superficie sobre un plano coordenado es la curva de intersección de la superficie y el plano coordenado.

Vamos a ver ahora cómo se obtienen las intercepciones y trazas de cualquier plano a partir de su ecuación. La intersección de un plano y el eje X es un punto que está sobre el eje X. Ambas coordenadas y y z de tal punto son cero. Por tanto, haciendo $y = z = 0$ en la ecuación (1) y despejando x, hallamos la intercepción de este plano sobre el eje X que es $-\frac{D}{A}$. Análogamente, las intercepciones sobre los ejes Y y Z son $-\frac{D}{B}$ y $-\frac{D}{C}$, respectivamente.

La intersección de un plano y el plano XY es una recta que está en el plano XY. La coordenada z de cualquier punto del plano XY es igual a cero. Por tanto, haciendo $z = 0$ en la ecuación (1), obtenemos la ecuación

$$Ax + By + D = 0.$$

Esta ecuación sola, sin embargo, no es suficiente para identificar la traza del plano (1) sobre el plano XY. Debemos indicar también que la traza está sobre el plano XY empleando la ecuación $z = 0$. Por tanto, la traza del plano (1) sobre el plano XY está representada analíticamente por las *dos* ecuaciones

$$Ax + By + D = 0, \quad z = 0.$$

Tenemos aquí el primer ejemplo del hecho de que una curva en el espacio se representa analíticamente por dos ecuaciones independientes. Análogamente, haciendo $y = 0$ en la ecuación (1), hallamos que las ecuaciones de la traza del plano (1) sobre el plano XZ son

$$Ax + Cz + D = 0, \quad y = 0;$$

y, haciendo $x = 0$ en la ecuación (1), hallamos que las ecuaciones de la traza sobre el plano YZ, son

$$By + Cz + D = 0, \quad x = 0.$$

Ejemplo 2. La ecuación de un plano es

$$4x + 6y + 3z - 12 = 0. \qquad (4)$$

Hallar sus intercepciones con los ejes coordenados y las ecuaciones de sus trazas sobre los planos coordenados. Construir la figura.

Solución. Haciendo $y = z = 0$ en la ecuación (4) y despejando x, hallamos que la intercepción con el eje X es 3. Similarmente hallamos que las intercepciones con los ejes Y y Z son 2 y 4, respectivamente.

Haciendo $z = 0$ en la ecuación (4), hallamos que las ecuaciones de la traza sobre el plano XY son

$$2x + 3y - 6 = 0, \quad z = 0.$$

Análogamente, se halla que las ecuaciones de las otras dos trazas son

$$4x + 3z - 12 = 0, \quad y = 0, \quad \text{sobre el plano } XZ;$$

$$2y + z - 4 = 0, \quad x = 0, \quad \text{sobre el plano } YZ.$$

Las intercepciones y trazas aparecen en la figura 165. Evidentemente, las trazas limitan aquella porción del plano situada en el primer octante. Como un

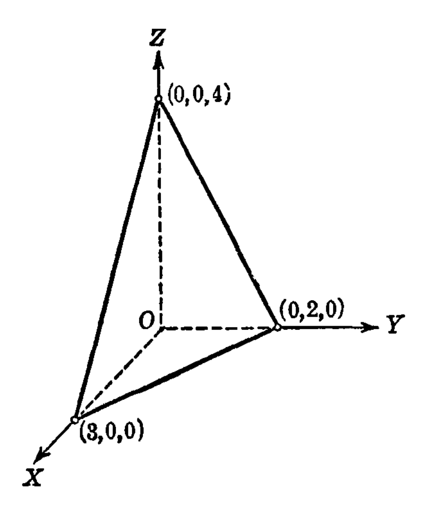


Fig. 165

plano es ilimitado en extensión, podemos trazar solamente una parte de él. La porción que aparece en la figura 165 será suficiente, en general, para nuestros propósitos.

EJERCICIOS. Grupo 53

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(5, -1, 3)$ y cuya normal tiene por números directores $[1, -4, 2]$.

2. Un plano pasa por el punto $(3, 3, -4)$, y los cosenos directores de su normal son $\frac{3}{13}$, $-\frac{12}{13}$, $-\frac{4}{13}$. Hallar la ecuación del plano.

3. El pie de la perpendicular trazada desde el origen a un plano es el punto $(1, -2, 1)$. Hallar la ecuación del plano.

4. Desde el punto $(5, 4, -7)$, se ha trazado una recta perpendicular a un plano. Si el pie de esta perpendicular es el punto $(2, 2, -1)$, hállese la ecuación del plano.

5. Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $(6, 4, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(7, -2, 3)$ y $(1, 4, -5)$.

En cada uno de los ejercicios 6 y 7, hallar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos dados. Usese el método del ejemplo 2 del Artículo 115.

6. $(-3, 2, 4)$, $(1, 5, 7)$, $(2, 2, -1)$.

7. $(1, 4, -4)$, $(2, 5, 3)$, $(3, 0, -2)$.

8. Resolver el ejercicio 6 por el método del ejemplo 1 del Artículo 116.

9. Un plano pasa por el punto $(5, -1, 3)$, y dos de los ángulos directores de su normal son $\alpha = 60°$ y $\beta = 45°$. Hállese la ecuación del plano. (Dos soluciones.)

10. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-4, 2, 9)$ y es perpendicular al eje Z.

11. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -5, 7)$ y es paralelo al plano XZ.

12. Hallar la ecuación del plano perpendicular al segmento $A(3, 2, -7)$ y $B(5, -4, 9)$ en su punto medio.

13. Demostrar que los cuatro puntos $(2, 1, 3)$, $(3, -5, -1)$, $(-6, 7, -9)$ y $(-2, 4, -3)$ son coplanares.

En cada uno de los ejercicios 14-19, partiendo de la ecuación dada del plano, hállense sus intercepciones con los ejes coordenados y las ecuaciones de sus trazas sobre los planos coordenados. Constrúyase la figura en cada caso.

14. $x + y + z - 1 = 0$.

15. $x + 2y - z - 2 = 0$.

16. $5x - 3y + 15z - 15 = 0$.

17. $x + y + z = 0$.

18. $x + 3y - 6 = 0$.

19. $2y - 5z + 5 = 0$.

20. Hallar el volumen del tetraedro formado por los planos coordenados y el plano $6x + 7y + 14z - 42 = 0$.

21. Si A, B, C y D son todos diferentes de cero, demuéstrese que el tetraedro formado por los planos coordenados y el plano $Ax + By + Cz + D = 0$ tiene un volumen igual a $\frac{1}{6}\left|\frac{D^3}{ABC}\right|$.

22. Construir el paralelepípedo rectangular formado por los planos coordenados y por los planos $x = 4$, $y = 3$ y $z = 2$. Hallar su volumen.

23. Construir el prisma triangular formado por los planos coordenados y por los planos $x + 2y - 4 = 0$ y $z - 5 = 0$. Hallar su volumen.

24. Construir el prisma formado por los planos coordenados y los planos $y + 3z - 6 = 0$ y $x - 7 = 0$. Hallar su volumen.

25. Construir el prisma limitado por los planos $z - y = 0$, $y + z = 4$, $z = 0$, $x = 0$ y $x = 5$. Hallar su volumen.

117. Otras formas de la ecuación del plano. Supongamos que el plano

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

tiene por intercepciones respectivas con los ejes X, Y y Z a los números a, b y c diferentes de cero, es decir, que determina sobre los ejes tres segmentos medidos en magnitud y signo por los números a, b y c. Entonces los tres puntos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$ están sobre el plano, y sus coordenadas satisfacen la ecuación (1). Por tanto, tenemos las tres ecuaciones

$$Aa + D = 0, \quad Bb + D = 0, \quad Cc + D = 0,$$

de donde,

$$A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

Sustituyendo estos valores de A, B y C en la ecuación (1), y dividiendo por $-D$, obtenemos la ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{2}$$

La ecuación (2) se conoce como la *forma simétrica* de la ecuación de un plano o *forma de las intercepciones*, o *forma segmentaria*. Es una forma restringida ya que no se puede aplicar, por ejemplo, a un plano que pasa por el origen. Este resultado conduce al siguiente

TEOREMA 3. *El plano cuyas intercepciones respectivas con los ejes* X, Y, *y* Z *son los números* a, b *y* c, *diferentes de cero, tiene como ecuación*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Consideremos ahora que el plano (1) contiene a los tres puntos no colineales $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y $P_3(x_3, y_3, z_3)$. Entonces deben cumplirse las tres condiciones siguientes

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0,$$

$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0.$$

Estas tres ecuaciones, juntas con la ecuación (1), constituyen un sistema de cuatro ecuaciones lineales homogéneas en A, B, C y D. Dicho sistema tiene una solución diferente de cero, solamente en el caso de ser cero el determinante del sistema (Apéndice IB, 6; teorema), es decir, el determinante de los coeficientes.

Según esto debe verificarse la igualdad :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

El estudiante debe demostrar que la ecuación (3) es la ecuación del plano que pasa por los tres puntos P_1, P_2 y P_3, por medio del método empleado en la deducción del teorema 13, Artículo 35. Tenemos entonces el siguiente

Teorema 4. *La ecuación del plano que pasa por los tres puntos dados no colineales*, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y $P_3(x_3, y_3, z_3)$, *en forma de determinante es*

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nota. La ecuación (3) se conoce también con el nombre de *forma de los tres puntos* de la ecuación de un plano.

118. Posiciones relativas de dos planos. En este artículo vamos a considerar las posiciones relativas que pueden ocupar dos planos cualesquiera cuyas ecuaciones, en su forma general, son :

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0. \qquad (2)$$

El *ángulo formado por dos planos* se *define* como el ángulo que forman sus normales respectivas. Por tanto, hay dos valores para este ángulo, suplementarios entre sí. Si los núneros directores respectivos de las normales a los planos (1) y (2) son $[A, B, C]$ y $[A', B', C']$, resulta, como una consecuencia directa del teorema 7 del Artículo 112, el siguiente

Teorema 5. *El ángulo θ formado por los dos planos*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad y \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

está determinado por la fórmula

$$\cos \theta = \pm \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Si los planos (1) y (2) son paralelos, sus normales son paralelas. Luego, por el corolario 1 del teorema 7, Artículo 112, una condición necesaria y suficiente para el paralelismo de dos planos está dada por las relaciones

$$A = kA', \quad B = kB', \quad C = kC', \tag{3}$$

en donde k es una constante diferente de cero.

Si los planos (1) y (2) son perpendiculares, sus normales son perpendiculares. Por tanto, por el corolario 2 del teorema 7, Artículo 112, una condición necesaria y suficiente para la perpendicularidad está dada por la relación

$$AA' + BB' + CC' = 0. \tag{4}$$

Dos planos son idénticos o coincidentes solamente en el caso de ser paralelos y tener un punto común. Supongamos que los planos (1) y (2) son paralelos y que tienen el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ común. Por ser paralelos se deben cumplir las relaciones (3), y podemos escribir la ecuación (1) en la forma

$$kA'x + kB'y + kC'z + D = 0. \tag{5}$$

Multiplicando la ecuación (2) por k, obtenemos

$$kA'x + kB'y + kC'z + kD' = 0. \tag{6}$$

Como el punto P_1 está sobre ambos planos, sus coordenadas (x_1, y_1, z_1) deben satisfacer a las ecuaciones (1) y (2), y, por tanto, también a las ecuaciones (5) y (6), de las cuales tenemos, respectivamente,

$$kA'x_1 + kB'y_1 + kC'z_1 + D = 0, \tag{7}$$

$$kA'x_1 + kB'y_1 + kC'z_1 + kD' = 0. \tag{8}$$

Como los primeros miembros de ambas ecuaciones (7) y (8) son constantes e iguales a cero, son iguales entre sí, de donde

$$D = kD'.$$

Combinando este último resultado con las relaciones (3) anteriores, tenemos, como una condición necesaria y suficiente para la coincidencia de los planos (1) y (2), las relaciones

$$A = kA', \quad B = kB', \quad C = kC', \quad D = kD'; \quad (k \neq 0). \tag{9}$$

Un resumen de los resultados anteriores viene dado en el siguiente

TEOREMA 6. *Dados dos planos*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad y \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

son condiciones necesarias y suficientes para

a) *Paralelismo, que* $A = kA'$, $B = kB'$, $C = kC'$, $(k \neq 0)$;
b) *Perpendicularidad, que* $AA' + BB' + CC' = 0$;
c) *Coincidencia, que* $A = kA'$, $B = kB'$, $C = kC'$, $D = kD'$, $(k \neq 0)$.

NOTA. El estudiante debe comparar este teorema con el teorema 6 del Artículo 30.

Ahora estamos en posibilidad de considerar los casos especiales de la forma general de la ecuación de un plano,

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

en la que uno, por lo menos, de los coeficientes A, B y C es diferente de cero.

Consideremos primero el caso en que $C = 0$, de manera que la ecuación (1) toma la forma especial

$$Ax + By + D = 0. \tag{10}$$

Los números directores de la normal al plano (10) son $[A, B, 0]$. Los números directores del eje z son $[0, 0, 1]$, y el eje z es normal al plano XY. El plano (10) y el plano XY satisfacen la condición de perpendicularidad dada en el apartado (b) del teorema 6, ya que

$$A(0) + B(0) + 0(1) = 0.$$

Análogamente, podemos demostrar que los planos $Ax + Cz + D = 0$ y $By + Cz + D = 0$ son perpendiculares a los planos XZ y YZ, respectivamente. Se desprende en cada caso, también, que el plano es paralelo al eje coordenado a lo largo del cual se mide la variable que no aparece en la ecuación. Este resultado se expresa mediante el siguiente

TEOREMA 7. *Una ecuación lineal que contiene únicamente dos variables representa un plano perpendicular al plano coordenado de esas dos variables, y es paralelo al eje coordenado a lo largo del cual se mide la variable que no aparece en la ecuación, y recíprocamente.*

NOTA. Por lo estudiado en la Geometría analítica plana, el lector puede pensar que la ecuación (10) representa una línea recta. Debe observar, sin

embargo, que aquí y en nuestro estudio posterior de la Geometría analítica de tres dimensiones, una sola ecuación en una, dos o tres variables, si tiene un lugar geométrico, representa en el espacio una superficie y *no* una curva.

Consideremos ahora la ecuación lineal homogénea en dos variables, es decir, una ecuación en la cual falte el término constante. Entonces, para $D = 0$, la ecuación (10) toma la forma

$$Ax + By = 0. \qquad (11)$$

Este plano pasa por el origen, y como es perpendicular al plano XY, debe pasar también por el eje Z. Análogamente, podemos demostrar que los planos $Ax + Cz = 0$ y $By + Cz = 0$ pasan por los ejes Y y X, respectivamente. Por tanto, tenemos el siguiente

COROLARIO. *Una ecuación lineal homogénea en dos variables representa un plano que pasa por el eje coordenado a lo largo del cual se mide la variable que no aparece en la ecuación, y recíprocamente.*

Finalmente, consideremos la ecuación lineal en una variable solamente. Supuesto $B = C = 0$, la ecuación (1) toma la forma

$$Ax + D = 0. \qquad (12)$$

Los números directores de la normal al plano (12) son $[A, 0, 0]$ o $[1, 0, 0]$. Los números directores del eje X son $[1, 0, 0]$. Por tanto, el plano (12) es perpendicular al eje X y, en consecuencia, es paralelo al plano YZ. Análogamente, podemos demostrar que el plano $By + D = 0$ es perpendicular al eje Y y paralelo al plano XZ, y que el plano $Cz + D = 0$ es perpendicular al eje Z y paralelo al plano XY. Por tanto, tenemos el siguiente

TEOREMA 8. *Una ecuación lineal en una sola variable representa un plano perpendicular al eje coordenado a lo largo del cual se mide esa variable y paralelo al plano de las dos variables que no figuran en la ecuación, y recíprocamente.*

COROLARIO. *Las ecuaciones* $x = 0$, $y = 0$ *y* $z = 0$ *representan, respectivamente, a los planos coordenados* YZ, XZ y XY, *y recíprocamente.*

El estudiante debe tabular los resultados de los teoremas 7 y 8 y sus corolarios y observar la simetría en las letras x, y y z. (Véase el ejercicio 6 del grupo 50, Art. 109.)

Ejemplo 1. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2, 1, -3)$ y es paralelo al plano $5x - 2y + 4z - 9 = 0$.

Solución. Por el teorema 6 del Artículo 118, la ecuación buscada es

$$5x - 2y + 4z + k = 0, \tag{13}$$

en donde k es una constante cuyo valor debe determinarse. Como este plano pasa por el punto P las coordenadas $(2, 1, -3)$ deben satisfacer la ecuación (13), y tenemos

$$5 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 4(-3) + k = 0,$$

de donde $k = 4$. Por tanto, la ecuación buscada es

$$5x - 2y + 4z + 4 = 0.$$

Ejemplo 2. Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano XY y que pasa por los puntos $P_1(1, 5, -3)$ y $P_2(-5, -4, 11)$.

Solución. Como el plano buscado es perpendicular al plano XY, su ecuación, por el teorema 7 del Artículo 118, debe ser de la forma

$$Ax + By + D = 0. \tag{14}$$

Como el plano (14) pasa por los puntos P_1 y P_2, las coordenadas de estos puntos deben satisfacer a la ecuación (14), y tenemos las dos ecuaciones

$$A + 5B + D = 0, \tag{15}$$

$$-5A - 4B + D = 0. \tag{16}$$

La solución de las ecuaciones (15) y (16) para A y B en términos de D da $A = \frac{3}{7}D$, $B = -\frac{2}{7}D$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (14) y dividiendo por $D \neq 0$, hallamos la ecuación buscada

$$3x - 2y + 7 = 0.$$

Ejemplo 3. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(5, 2, -3)$ y es perpendicular a cada uno de los planos $2x - y + 2z - 9 = 0$ y $x + 3y - 5z + 3 = 0$.

Solución. Podríamos usar el método del ejemplo 2, pero aquí seguiremos otro método.

Primero vamos a hallar los números directores de la normal al plano buscado. Esta normal es perpendicular a cada una de las normales a los planos dados. Por tanto, por el artificio de los números directores (Art. 113), sus números directores son

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 12, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

Por tanto, la ecuación del plano que pasa por el punto $P(5, 2, -3)$ y tiene una normal cuyos números directores son $[1, -12, -7]$ es

$$1(x - 5) - 12(y - 2) - 7(z + 3) = 0$$

o sea,

$$x - 12y - 7z - 2 = 0.$$

EJERCICIOS. Grupo 54

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar la ecuación del plano cuyas intercepciones respectivas con los ejes X, Y y Z son -5, 3 y 1.

2. La ecuación de un plano es $2x - 3y + 9z = 1$. Escribir la ecuación en la forma simétrica.

3. Escribir en forma de determinante la ecuación del plano que pasa por los tres puntos $(6, 2, 0)$, $(4, -1, 2)$ y $(3, 4, -1)$. A partir de ella hállese la forma general de la ecuación del plano.

4. Si de los cuatro puntos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) y (x_4, y_4, z_4) no hay tres que sean colineales, demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que sean coplanares está dada por el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(Véase el corolario del teorema 12, Art. 34.)

5. Demostrar que los cuatro puntos $(1, 0, -4)$, $(2, -1, 3)$ $(-2, 3, 5)$ y $(-1, 2, 4)$ son coplanares.

6. Hallar el ángulo agudo formado por los planos $3x + y - z + 3 = 0$ y $x - y + 4z - 9 = 0$.

7. Hallar el ángulo agudo formado por el plano $5x + 4y - z + 8 = 0$ y el plano XY.

8. Deducir el apartado (a) del teorema 6 directamente del teorema 5 del Artículo 118.

9. Deducir el punto (b) del teorema 6 directamente del teorema 5 del Artículo 118.

10. Obtener el corolario del teorema 8, Artículo 118, considerando las coordenadas de un punto que está en un plano coordenado.

11. Construir las figuras respectivas para ilustrar cada uno de los planos especificados en los teoremas 7 y 8 y en sus corolarios (Art. 118).

12. Si dos planos son paralelos, demuéstrese que sus trazas sobre cualquiera de los planos coordenados son dos rectas paralelas.

13. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -2, 6)$ y es paralelo al plano $4y - 3z + 12 = 0$.

14. Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano XY y que pasa por los dos puntos $(2, -2, 11)$ y $(-7, -8, -3)$.

15. Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano $4x - 3y + 2z - 9 = 0$ y que pasa por los dos puntos $(2, -6, 4)$ y $(3, -7, 5)$.

16. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(4, -2, 1)$ y es perpendicular a cada uno de los planos

$$x - 3y + 4z - 9 = 0 \quad \text{y} \quad 2x + 2y - z + 11 = 0.$$

17. Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano XZ y que pasa por los dos puntos $(4, -7, 2)$ y $(12, -11, 7)$.

18. Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano $3x - 2y + 5z - 1 = 0$ y que pasa por los dos puntos $(4, -2, 2)$ y $(1, 1, 5)$.

19. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -1, 0)$ y es perpendicular a cada uno de los planos

$$4x - y - z - 1 = 0 \quad \text{y} \quad 2x + y + 3z - 6 = 0.$$

20. Hallar la ecuación del plano que pasa por el eje Y y por el punto $(8, 4, -6)$.

21. Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano YZ y que pasa por los dos puntos $(2, -1, 4)$ y $(1, 3, -7)$.

22. Hallar la ecuación del plano que pasa por el eje Z y por el punto $(4, -1, 7)$.

23. Un plano pasa por el punto $(3, 1, -1)$, es perpendicular al plano $2x - 2y + z + 4 = 0$, y su intercepción con el eje Z es igual a -3. Hállese su ecuación.

24. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 3, 0)$ y $(4, 0, 0)$ y forma un ángulo de $30°$ con el plano $x+y+z-1=0$. (Dos soluciones.)

25. Un plano es paralelo a cada una de las rectas que tienen por números directores respectivos $[1, -3, 2]$ y $[3, 7, -1]$. Hallar la ecuación del plano si, además, pasa por el punto $(5, 1, -1)$.

26. Determinar el valor de k para que los dos planos $kx - 2y + 2z - 7 = 0$ y $4x + ky - 6z + 9 = 0$ sean perpendiculares entre sí.

27. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 0, -1)$ y $(2, 0, 2)$ y forma un ángulo de $60°$ con el plano $2x - 2y + z + 6 = 0$. (Dos soluciones.)

28. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-2, 3, -1)$ y es paralelo a las dos rectas que tienen por números directores respectivos $[2, -3, 0]$ y $[-1, 2, 3]$.

29. Un plano pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y es perpendicular al plano $Ax + By + Cz + D = 0$. Demostrar que su ecuación puede escribirse en la forma

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

30. Un plano pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y es perpendicular a cada uno de los planos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Demostrar que la ecuación puede escribirse en la forma

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

119. Forma normal de la ecuación del plano. Sean el origen O y el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ los extremos de un segmento dirigido de longitud dada p y cuyos ángulos directores son α, β, γ (fig. 166).

Adoptaremos el convenio de que el segmento OP_1 está dirigido de O a P_1 y que su longitud p es un número positivo. Vamos, pues, a obtener la ecuación del único plano que pasa por P_1 y es perpendicular a OP_1.

Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano, diferente de P_1. Tracemos el segmento P_1P. Por el teorema 3 del Artículo 110, las coordenadas del punto P_1 son

$$x_1 = p \cos \alpha, \quad y_1 = p \cos \beta, \quad z_1 = p \cos \gamma.$$

Por tanto, por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 111, un sistema de números directores para P_1P es $[x - p \cos \alpha, \ y - p \cos \beta, \ z - p \cos \gamma]$. También un sistema de números directores para OP_1 es

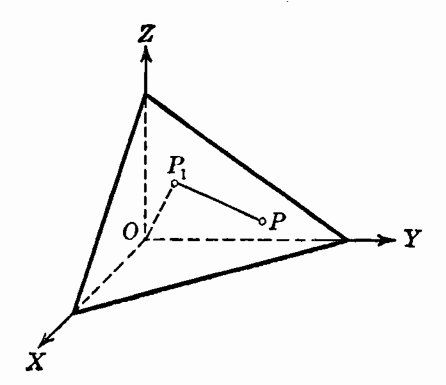


Fig. 166

$[\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$. Ahora bien, si el punto P está sobre el plano los segmentos OP_1 y P_1P son perpendiculares entre sí. Por tanto, por el corolario 2 del teorema 7, Artículo 112, las coordenadas del punto P deben satisfacer la condición necesaria y suficiente expresada por la relación

$$\cos \alpha (x - p \cos \alpha) + \cos \beta (y - p \cos \beta) + \cos \gamma (z - p \cos \gamma) = 0,$$

que es la ecuación buscada del plano. Desarrollando el primer miembro, obtenemos

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 0,$$

la cual, por el teorema 4 del Artículo 110, se reduce a

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Esta ecuación se llama *forma normal* de la ecuación del plano, y de aquí el teorema siguiente.

TEOREMA 9. *La forma normal de la ecuación de un plano es*

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

en donde p *es un número positivo numéricamente igual a la longitud de la normal trazada por el origen al plano, y* α, β *y* γ *son los ángulos directores de dicha normal dirigida del origen hacia el plano.*

Vamos a considerar ahora el paso de la forma general de la ecuación del plano

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

a su forma normal,

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \tag{2}$$

Si las ecuaciones (1) y (2) representan el mismo plano, entonces, de acuerdo con el apartado (*c*) del teorema 6, Artículo 118, se deben cumplir las cuatro relaciones siguientes entre sus coeficientes correspondientes:

$$\cos \alpha = kA, \tag{3}$$

$$\cos \beta = kB, \tag{4}$$

$$\cos \gamma = kC, \tag{5}$$

$$-p = kD, \tag{6}$$

en donde k es una constante diferente de cero.

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de cada una de las ecuaciones (3), (4) y (5), y sumamos, obtenemos

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = k^2(A^2 + B^2 + C^2),$$

la cual, por el teorema 4 del Artículo 110, se reduce a

$$1 = k^2(A^2 + B^2 + C^2),$$

de donde,

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Por tanto, si multiplicamos la ecuación (1) por este valor de k, se deduce, de las relaciones (3), (4), (5) y (6), que la forma normal de la ecuación (1) está dada por

$$kAx + kBy + kCz + kD = 0, \tag{7}$$

en donde $k = \pm \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Como la normal al plano es una recta dirigida y tiene, por tanto, un sistema único de cosenos directores, es evidente que no podemos usar ambos signos de k en la ecuación (7). Para determinar el signo que se ha de usar, adoptamos ciertos convenios que establecemos a continuación en el siguiente

TEOREMA 10. *La forma general de la ecuación de un plano*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

puede reducirse a la forma normal,

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

dividiendo cada término de (1) *por* $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, *en donde el signo que precede al radical* r *se escoge como sigue:*

a) *Si* $D \neq 0$, r *es de signo contrario a* D.

b) *Si* $D = 0$ *y* $C \neq 0$, r *y* C *son del mismo signo.*

c) *Si* $D = C = 0$ *y* $B \neq 0$, r *y* B *son del mismo signo.*

d) *Si* $D = C = B = 0$, *entonces* $A \neq 0$, *y* r *y* A *son del mismo signo.*

NOTA. El estudiante debe comparar este teorema con el teorema 8 del Artículo 32.

Ejemplo. La ecuación de un plano es $2x - y + 2z - 6 = 0$. Reducir dicha ecuación a la forma normal, y hallar la longitud y ángulos directores de la normal.

Solución. Para la ecuación dada, $A = 2$, $B = -1$, $C = 2$ y $D = -6$. Por tanto, $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \pm 3$. Como D es negativo, dividimos la ecuación dada por 3. Esto nos da la forma normal

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 2 = 0.$$

Luego la longitud de la normal es 2 y sus ángulos directores son

$$\alpha = \text{arc cos } \tfrac{2}{3} = 48^\circ\, 11',$$

$$\beta = \text{arc cos } (-\tfrac{1}{3}) = 109^\circ\, 28'$$

$$\gamma = \text{arc cos } \tfrac{2}{3} = 48^\circ\, 11'.$$

El estudiante debe dibujar la figura correspondiente a este ejemplo.

120. Aplicaciones de la forma normal. a) *Distancia de un punto a un plano.* Sea δ (fig. 167) el plano y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ el punto. Vamos a determinar la distancia d de P_1 a δ.

Supongamos que la forma normal de la ecuación de δ es

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \qquad (1)$$

Sea δ' el plano que pasa por P_1 y es paralelo a δ, y sea p' la longitud de la normal trazada desde el origen a δ'. Como se ha convenido, p y p' se considerarán como números positivos.

Como se indicó en el problema análogo de la distancia de un punto a una recta en Geometría analítica plana (Art. 33), hay seis casos posibles para las posiciones relativas de P_1, δ y el origen. Solamente uno de estos casos aparece en la figura 167. Para llegar a un resultado

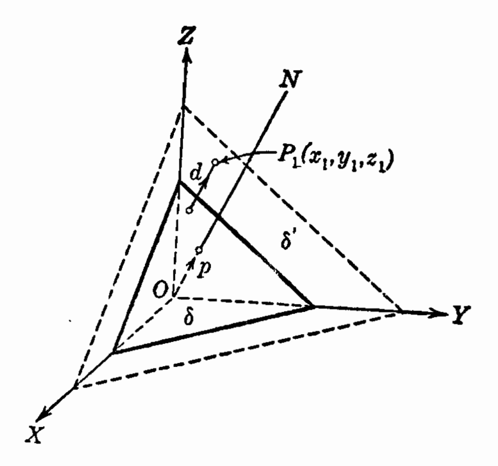


Fig. 167

común a todos los casos, emplearemos distancias *dirigidas*. Según esto, vamos a asignar la dirección positiva a la normal ON trazada *desde* el origen *al* plano δ. La distancia d será considerada siempre como dirigida *del* plano δ *hacia* el punto P_1 y, por tanto, será positiva o negativa según que esta dirección sea igual o no a la dirección ON. Entonces, para cada uno de los seis casos posibles de posición de P_1, δ y O, tenemos, como en el Artículo 33, ya sea la relación

$$p' = p + d \qquad (2)$$

o la relación

$$p' = -(p + d). \qquad (3)$$

Por ejemplo, la relación (2) es verdadera para el caso representado en la figura 167 en donde los ángulos directores de la normal a δ' son idénticos a los ángulos directores correspondientes de la normal a δ.

Por tanto, por el teorema 9 del Artículo 119, la forma normal de la ecuación del plano δ' es

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p' = 0,$$

la cual, en virtud de la relación (2), puede escribirse en la forma

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - (p + d) = 0. \tag{4}$$

Si, en cambio, el punto P_1 está localizado del lado opuesto del origen, es decir, de tal manera que el plano δ' que pasa por él y es paralelo a δ esté de lado opuesto del origen con respecto a δ, entonces se verifica la relación (3). Pero en este caso los ángulos directores de la normal a δ' son $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ y $\pi - \gamma$, de manera que la forma normal de la ecuación del plano δ' es ahora

$$x \cos(\pi - \alpha) + y \cos(\pi - \beta) + z \cos(\pi - \gamma) - p' = 0,$$

la cual, en vista de la relación (3), puede escribirse en la forma

$$-x \cos \alpha - y \cos \beta - z \cos \gamma + (p + d) = 0.$$

Pero esta última ecuación es idéntica a la ecuación (4). Análogamente, podemos demostrar que para los cuatro arreglos restantes la ecuación (4) representa al plano δ'.

Como el punto P_1 está sobre δ', sus coordenadas satisfacen a la ecuación (4), y tenemos

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - (p + d) = 0,$$

de donde

$$d = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p. \tag{5}$$

Comparando este resultado con la ecuación (1), vemos que la distancia dirigida d puede obtenerse, en magnitud y signo, sustituyendo las coordenadas del punto P_1 en el primer miembro de la forma normal de la ecuación de δ.

Si el plano δ no pasa por el origen, una investigación de los seis arreglos posibles muestra que la distancia dirigida d es positiva o negativa según que el punto P_1 y el origen estén de lados opuestos o del mismo lado del plano δ. Si el plano δ pasa por el origen, el signo de δ debe de interpretarse de acuerdo con las convenciones establecidas en el teorema 10 del Artículo 119.

Como la ecuación de un plano se da usualmente en la forma general

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

el resultado de la ecuación (5) puede expresarse en la forma

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Un resumen de los resultados precedentes lo establece el teorema siguiente.

TEOREMA 11. *La distancia dirigida* d *del punto* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *al plano* $Ax + By + Cz + D = 0$ *se obtiene por la fórmula*

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

en donde el signo del radical se elige de acuerdo con el teorema 10, Artículo 119.

Si el plano no pasa por el origen, d *es positiva o negativa, según que el punto* P_1 *y el origen estén de lados opuestos o del mismo lado del plano.*

Si el plano dado pasa por el origen, el signo de d *se interpreta de acuerdo con las convenciones adoptadas en el teorema 10, Artículo 119, para la dirección de la normal al plano y usadas para la determinación del signo radical.*

NOTAS. 1. El estudiante debe comparar este teorema con el teorema 10 del Artículo 33.

2. Si se requiere solamente la distancia de un punto a un plano, tomamos el valor absoluto de d.

Ejemplo 1. Hallar la distancia dirigida del punto $P(-3, -4, 2)$ al plano $3x + 12y - 4z - 39 = 0$. Interpretar el signo de esta distancia.

Solución. Por el teorema 11 anterior, la distancia buscada es

$$d = \frac{3(-3) + 12(-4) - 4(2) - 39}{\sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2}} = \frac{-104}{13} = -8.$$

El signo negativo indica que el punto y el origen están del mismo lado del plano.

b) *Ecuaciones de los planos bisectores de los ángulos diedros suplementarios formados por dos planos que se cortan.* Supongamos que los dos planos son

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Las ecuaciones de los planos bisectores se determinan por el mismo método empleado en el problema análogo de la Geometría analítica

plana, a saber, la determinación de las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por dos rectas que se cortan (apartado [b], Art. 33). Por tanto, se deja al estudiante como ejercicio la demostración de que las ecuaciones de los planos bisectores son

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

y

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

en donde los signos de los radicales se escogen de acuerdo con el teorema 10, Artículo 119. La distancia entre estos dos planos puede calcularse por medio del teorema 11, Artículo 120.

Ejemplo 2. Hallar las ecuaciones de los planos bisectores de los ángulos diedros suplementarios formados por los dos planos $6x - 7y + 6z - 22 = 0$ y $2x + 6y - 3z + 14 = 0$.

Solución. Las formas normales de las ecuaciones de los dos planos dados son

$$\frac{6x - 7y + 6z - 22}{\sqrt{36 + 49 + 36}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{2x + 6y - 3z + 14}{-\sqrt{4 + 36 + 9}} = 0.$$

Por tanto, la ecuación de uno de los planos bisectores es

$$\frac{6x - 7y + 6z - 22}{11} = \frac{2x + 6y - 3z + 14}{-7},$$

o sea,

$$64x + 17y + 9z = 0,$$

y la ecuación del otro es

$$\frac{6x - 7y + 6z - 22}{11} = -\frac{2x + 6y - 3z + 14}{-7},$$

o sea,

$$20x - 115y + 75z - 308 = 0.$$

EJERCICIOS. Grupo 55

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. La normal a un plano tiene una longitud de 5 y dos de sus ángulos directores son $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$. Hallar la ecuación del plano. (Dos soluciones.)

En cada uno de los ejercicios 2-5, redúzcase la ecuación dada a la forma normal, y hállense la longitud y los ángulos directores de la normal.

2. $8x + 4y - z + 18 = 0.$

3. $6x + 6y + 7z - 22 = 0.$

4. $3x + 4y - 12z = 0.$

5. $3x - 4y - 10 = 0.$

6. Obtener la forma normal de cada uno de los planos especificados en los teoremas 7 y 8 y sus corolarios (Art. 118). Tabular los resultados.

7. Hallar la ecuación del plano cuya distancia del origen es 5 y cuya normal tiene por números directores $[-2, 6, 3]$. (Dos soluciones.)

8. Hallar el valor de k para que la distancia del origen al plano

$$3x - 6y + kz + 14 = 0$$

sea igual a 2.

9. Hallar la forma normal de la ecuación del plano que es paralelo al plano $4x + y - 8z + 11 = 0$ y que pasa por el punto $(3, -2, -1)$.

10. Hallar la distancia del origen a cada uno de los planos paralelos

$$4x - 4y + 7z - 18 = 0 \quad \text{y} \quad 4x - 4y + 7z + 27 = 0.$$

De aquí hallar la distancia entre estos dos planos.

11. La ecuación de un plano δ es $2x - y + z - 18 = 0$, y las coordenadas de un punto P son $(2, 1, 6)$. Hallar la ecuación del plano que pasa por P y es paralelo a δ. Después hallar la distancia de P a δ.

En cada uno de los ejercicios 12-14, hállese la distancia del punto dado al plano dado, e interprétese el signo de la distancia.

12. $x + 2y - 2z + 12 = 0$; $(3, -2, 7)$.

13. $4x - 3y + 12z = 0$; $(-5, -10, -3)$.

14. $5y + 12z + 26 = 0$; $(3, 2, -1)$.

15. Hallar la distancia entre los planos paralelos $8x - 4y + z + 9 = 0$ y $8x - 4y + z - 36 = 0$ calculando la distancia de un punto de un plano al otro.

16. Hallar la distancia entre los planos paralelos

$$6x + 3y - 2z + 14 = 0 \quad \text{y} \quad 6x + 3y - 2z - 35 = 0.$$

17. Demostrar que la distancia d entre los planos paralelos

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0 \quad \text{y} \quad Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

está dada por la fórmula

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Usese este resultado para comprobar el ejercicio 16.

18. La base de un tetraedro es el triángulo cuyos vértices son $(1, -2, 1)$, $(-4, 2, -1)$ y $(-5, 5, 3)$. Si el cuarto vértice es el punto $(4, 2, -3)$, hállese la longitud de la altura trazada desde el vértice a la base.

19. Hallar el volumen del tetraedro del ejercicio 18.

20. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al de la ecuación

$$2x - y + 2z - 9 = 0$$

y está a 2 unidades de él. (Dos soluciones.)

21. Hallar el valor del coeficiente k en la ecuación $kx - 2y + 6z + 14 = 0$ de un plano, para que la distancia del punto $(1, 1, 1)$ al plano sea igual a -3.

22. Si la distancia de un plano al origen es p y sus intercepciones con los ejes coordenados son a, b y c, demuéstrese que $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

23. Deducir las ecuaciones de los dos planos bisectores de los ángulos diedros suplementarios formados por los dos planos

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

En cada uno de los ejercicios 24 y 25, hállense las ecuaciones de los planos bisectores de los ángulos diedros suplementarios formados por los dos planos cuyas ecuaciones se dan.

24. $x - 4y + 8z - 9 = 0$ y $2x + y - 2z + 6 = 0$.

25. $7x - 4y + 4z + 18 = 0$ y $6x + 7y - 6z - 22 = 0$.

26. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del plano $2x - y + 2z - 6 = 0$ es igual al doble de su distancia del plano $x + 2y - 2z + 3 = 0$. (Dos soluciones.)

En los ejercicios 27-31, los vértices de un triángulo T son $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y $P_3(x_3, y_3, z_3)$, su área es A y los ángulos directores de la normal a su plano son α, β y γ.

27. La proyección ortogonal de T sobre el plano XY es otro triángulo cuyos vértices son $(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, y_2, 0)$ y $(x_3, y_3, 0)$. Por tanto, por el teorema 12 del Artículo 34, el área proyectada es

$$A_z = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Demostrar, análogamente, que las áreas proyectadas sobre los planos XZ y YZ son, respectivamente,

$$A_y = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad A_x = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

En todos los casos se toma el valor absoluto del determinante.

28. Por medio del teorema 6, Artículo 112, demostrar que los ángulos formados por el plano de T y los planos XY, XZ y YZ son γ, β y α, respectivamente. Demostrar, por tanto, que

$$A_z = |A \cos \gamma|, \quad A_y = |A \cos \beta|, \quad A_x = |A \cos \alpha|.$$

29. Partiendo del resultado del ejercicio 28 y el teorema 4, del Artículo 110, demostrar que $A^2 = A^2_x + A^2_y + A^2_z$.

30. Mediante los resultados de los ejercicios 27 y 29 demostrar que el área de T está dada por

$$A = \tfrac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}.$$

31. Sea $P_4(x_4, y_4, z_4)$ un punto cualquiera no contenido en el plano de T. Por medio del teorema 4, Artículo 117, y por el teorema 11, Artículo 120, demostar que la distancia d del punto P_4 al plano de T está dada por

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}},$$

en donde se debe tomar el valor absoluto del numerador.

32. Por medio de los resultados de los ejercicios 30 y 31, demostrar que el volumen de un tetraedro cuyos vértices son $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ y $P_4(x_4, y_4, z_4)$ está dado por

$$V = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

debiéndose tomar el valor absoluto del determinante.

33. Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son $(-4, 6, 3)$, $(8, -3, 5)$, $(4, 0, -1)$ y $(5, 3, 9)$.

34. Usar el resultado del ejercicio 32 para resolver el ejercicio 4 del grupo 54, Artículo 118.

35. Usar el resultado del ejercicio 30 para resolver el ejemplo del Artículo 112.

121. Familias de planos. De la misma manera que en Geometría analítica plana consideramos familias de curvas, podemos considerar familias de planos. En el Artículo 116 vimos que un plano y su ecuación están cada uno perfectamente determinados por tres condiciones independientes. Según esto, un plano que satisfaga menos de esas tres condiciones no está determinado, es decir, no es único. La ecuación de un plano que satisface solamente dos condiciones independientes contiene una sola constante arbitraria independiente o parámetro y, por tanto, representa una *familia de planos monoparamétrica*.

Un ejemplo de familia de planos con un solo parámetro es la ecuación

$$Ax + By + Cz + k = 0, \tag{1}$$

en donde A, B y C son constantes fijas y el parámetro k puede tomar todos los valores reales. Esta ecuación representa a la familia de planos que son paralelos al plano dado

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Una familia de planos particularmente útil es el sistema de planos que pasan por la intersección de dos planos dados cuyas ecuaciones pueden tomarse en las formas

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (2)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (3)$$

Cualquier punto cuyas coordenadas satisfagan ambas ecuaciones (2) y (3) está sobre su recta de intersección. Evidentemente, las coordenadas de tal punto satisfacen también la ecuación

$$k_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + k_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (4)$$

en donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias que pueden tomar todos los valores reales exceptuando el caso en que ambas sean cero simultáneamente. Además, como la ecuación (4) es lineal, representa todos los planos que pasan por la intersección de los planos dados (2) y (3). Procediendo como en el caso de una familia de rectas que pasan por la intersección de dos rectas dadas (Art. 36), vamos a eliminar el plano (3) de la familia (4) con el fin de obtener la ecuación más simple

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (5)$$

en donde el parámetro k puede tomar todos los valores reales. Se dice que la ecuación (5) representa un *haz de planos*, y a su recta común de intersección se le llama *eje* o *arista del haz*.

Ejemplo. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2, 5, -1)$ y por la recta de intersección de los planos

$$4x + y - 2z - 8 = 0 \quad y \quad 3x - y + 4z - 4 = 0.$$

Solución. Por la ecuación (5) anterior, el plano buscado es un elemento del haz de planos que tiene por ecuación

$$4x + y - 2z - 8 + k(3x - y + 4z - 4) = 0. \quad (6)$$

Como el plano buscado pasa por el punto P, las coordenadas $(2, 5, -1)$ de P deben satisfacer la ecuación (6), y tenemos

$$4 \cdot 2 + 5 - 2(-1) - 8 + k(3 \cdot 2 - 5 + 4(-1) - 4) = 0,$$

de donde $k = 1$. Sustituyendo este valor de k en la ecuación (6) y simplificando, tenemos, como ecuación del plano que se busca

$$7x + 2z - 12 = 0.$$

El estudiante debe dibujar la figura para este ejemplo.

En el Artículo 115, vimos que la ecuación de cualquier plano que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ es

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \tag{7}$$

Por tanto, esta ecuación representa a la familia de planos que pasan por el punto dado, $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Tal sistema se llama una *radiación de planos*, teniendo al punto P_1 como *vértice de la radiación*. Como uno, por lo menos, de los coeficientes A, B y C es diferente de cero, la ecuación (7) contiene solamente dos constantes arbitrarias independientes; representa, por lo tanto, una *familia de planos biparamétrica*.

Como con esto se concluye nuestro estudio del plano, se recomienda al estudiante que haga un resumen de los resultados de este capítulo.

EJERCICIOS. Grupo 56

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Determinar el valor del parámetro k de tal manera que un plano de la familia $kx - 3y + kz - 22 = 0$ pueda pasar por el punto $(3, -4, 2)$. Hallar la ecuación del plano.

2. Determinar el valor del parámetro k de tal manera que un plano de la familia $2x + ky - kz + 7 = 0$ sea perpendicular al plano $3x + 6y - 12 = 0$. Hallar la ecuación del plano.

3. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(4, -1, 1)$ y es paralelo al plano $4x - 2y + 3z - 5 = 0$.

4. Hallar la ecuación del plano paralelo al plano $x + 3y - 2z + 14 = 0$ y tal que la suma de sus intercepciones con los ejes coordenados sea igual a 5.

5. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al que tiene por ecuación

$$x - 2y + 2z + 12 = 0$$

y cuya distancia del origen es igual a 2. (Dos soluciones.)

6. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al que tiene por ecuación

$$7x + 3y - 2z + 2 = 0$$

y cuya intercepción con el eje Z es 4.

7. El volumen del tetraedro formado por un cierto plano y los planos coordenados es 12. Hallar la ecuación del plano sabiendo que es paralelo al de ecuación $3x + 2y + 4z + 6 = 0$. (Dos soluciones.)

8. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -1, 4)$ y también por la recta de intersección de los planos

$$x + 2y - z = 4 \quad \text{y} \quad 2x - 3y + z = 6.$$

9. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $3x + y - 2z + 2 = 0$ y $x - 3y - z + 3 = 0$ y es perpendicular al plano XY.

10. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $2x - y + 3z = 2$ y $4x + 3y - z = 1$ y es perpendicular al plano

$$3x - 4y - 7z = 9.$$

11. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $2x - y - z = 2$ y $x + y - 3z + 4 = 0$ y tal que su distancia al origen sea igual a 2. (Dos soluciones.)

12. La distancia de un plano al origen es igual a 3. Si el plano pasa también por la intersección de los planos $x + y + z - 11 = 0$ y $x - 4y + 5z - 10 = 0$. hállese su ecuación. (Dos soluciones.)

13. Un plano es paralelo al de ecuación $2x + 2y + z - 1 = 0$, y el punto $(2, 2, 2)$ es equidistante de ambos planos. Hállese la ecuación del plano.

14. La distancia de un plano al punto $(1, 0, 2)$ es 1. Si el plano pasa por la intersección de los planos $4x - 2y - z + 3 = 0$ y $2x - y + z - 2 = 0$, hállese su ecuación. (Dos soluciones.)

15. Un plano pasa por el punto $(5, 2, -1)$ y su traza con el plano XY es la recta $x - 2y + 2 = 0$, $z = 0$. Hállese su ecuación.

16. Un plano pasa por el punto $(1, 6, -2)$ y tiene la misma traza sobre el plano XY que el plano $3x - y - 8z + 7 = 0$. Hállese su ecuación.

17. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $x - y + 2z + 4 = 0$ y $2x + y + 3z - 9 = 0$ y es paralelo a la recta cuyos números directores son $[1, 3, -1]$.

18. La ecuación de un plano es $Ax + By + Cz + D = 0$. Hallar las condiciones que deben satisfacer sus coeficientes para que pertenezca al haz de planos representado por la ecuación

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

19. Demostrar que los tres planos

$$2x - y + 2z - 8 = 0,\ 8x - y + 13z - 21 = 0 \text{ y } 4x + y + 9z - 5 = 0$$

pertenecen al mismo haz.

20. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que los tres planos $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, tengan uno y solamente un punto común es

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

21. Demostrar que los tres planos

$$3x + 2y - z - 3 = 0,\ 2x - 3y - 3z - 4 = 0 \text{ y } x + 7y - 2z + 7 = 0$$

tienen solamente un punto común, y hallar sus coordenadas.

22. Supongamos que los tres planos

$$A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

tienen uno y solamente un punto P en común. Demostrar que la radiación de planos cuyo vértice es P tiene por ecuación

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k_1(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + k_2(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0.$$

en donde k_1 y k_2 son los parámetros.

23. Demostrar que los cuatro planos $4x+3y-4z-8=0$, $2x-8y+7z+5=0$, $x-3y-2z-3=0$ y $3x+y+z-2=0$ pertenecen a la misma radiación y hallar las coordenadas de sus vértices.

24. Un plano pasa por los dos puntos $(3, 0, -1)$, $(2, -3, -3)$ y pertenece a la radiación determinada por los planos $2x-3y+2z-9=0$, $x+4y-z+3=0$ y $3x-2y-2z-6=0$. Hallar la ecuación del plano por el método paramétrico y comprobar el resultado por otro método.

25. Hallar la ecuación del plano de la radiación del ejercicio 24 que pasa por el punto $(1, 1, -3)$ y es perpendicular al plano $x+y-2z+12=0$.

CAPITULO XV

LA RECTA EN EL ESPACIO

122. Introducción. En el capítulo anterior hicimos un estudio del plano como la más sencilla de todas las superficies. Podríamos continuar nuestro trabajo estudiando superficies más complicadas antes de considerar las curvas en el espacio. Pero la línea recta en el espacio, considerada como la intersección de dos planos diferentes, se presenta tan naturalmente después del estudio del plano, que dedicamos completo el presente capítulo a su estudio. El siguiente capítulo lo reservaremos para tratar el problema general de las superficies.

123. Forma general de las ecuaciones de la recta. Sea l la recta de intersección de dos planos diferentes cualesquiera, cuyas ecuaciones, en la forma general, son

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\,, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Cualquier punto cuyas coordenadas satisfagan *ambas* ecuaciones del sistema (1) está sobre cada uno de los planos y, por lo tanto, está sobre su intersección l. Recíprocamente, cualquier punto que esté sobre l debe estar sobre cada uno de los planos, y sus coordenadas deben satisfacer, por lo tanto, ambas ecuaciones. Según esto, las dos ecuaciones del sistema (1), *consideradas simultáneamente*, son *las ecuaciones de una recta en el espacio*. El sistema (1) es llamado, apropiadamente, *forma general de las ecuaciones de la recta*.

En seguida observemos el hecho importante de que las ecuaciones de cualquier recta particular en el espacio *no son únicas*. En efecto, podemos considerar, como en el Artículo 121, que la recta l, representada por el sistema (1), es la arista del haz de planos

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0\,, \qquad (2)$$

en donde el parámetro k puede tomar todos los valores reales. Por tanto, las ecuaciones de dos planos diferentes cualesquiera de la familia (2) pueden servir como ecuaciones de la recta l. Geométricamente, también, una recta está completamente determinada por dos planos diferentes cualesquiera que pasen por ella.

124. Forma simétrica de las ecuaciones de la recta; ecuación de la recta que pasa por dos puntos, y ecuaciones paramétricas de la recta. Para muchos problemas, la forma general de las ecuaciones de una recta no es tan conveniente como otras ciertas formas que vamos a deducir a continuación. Vamos a basarnos en que una recta queda perfectamente determinada por uno de sus puntos y su dirección, o por dos cualesquiera de sus puntos. La deducción de las ecuaciones se basará en lo dicho en el Artículo 25 sobre la ecuación de una recta, dado uno de sus puntos y la pendiente. *Definiremos* a la línea recta como una curva del espacio caracterizada por la propiedad de que sus números directores sean idénticos a (o proporcionales a) los números directores correspondientes de cualquier segmento de la recta.

Sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto dado cualquiera de la recta l cuyos números directores son $[a, b, c]$. Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera de l diferente de P_1. Entonces, por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 111, un sistema de números directores para l está dado por $[x - x_1, y - y_1, z - z_1]$. Por tanto, por nuestra definición de línea recta, las coordenadas de P deben satisfacer las relaciones

$$x - x_1 = ka, \quad y - y_1 = kb, \quad z - z_1 = kc, \tag{1}$$

en donde k es una constante diferente de cero. Estas relaciones son, por tanto, las ecuaciones de la recta l que pasa por un punto dado y tiene una dirección dada.

Si los números directores $[a, b, c]$ de l son todos diferentes de cero, se acostumbra escribir las ecuaciones (1) en la *forma simétrica*

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}. \tag{2}$$

Si α, β, γ son los ángulos directores de l, entonces (Art. 111) la forma simétrica (2) puede escribirse también en la forma

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}, \tag{3}$$

siempre que ningún coseno director sea igual a cero.

Cada una de las formas (1), (2) y (3) consta de tres ecuaciones, pero en cada caso solamente dos de estas ecuaciones son independientes.

Si uno o dos de los números directores $[a, b, c]$ de l son cero, no podemos usar ni la forma (2) ni la (3). En tales casos, debemos emplear las relaciones (1). Por ejemplo, digamos que $a = 0$, pero b y a son ambos diferentes de cero. Entonces por las relaciones (1), tenemos, para las ecuaciones de l,

$$x = x_1, \quad y - y_1 = kb, \quad z - z_1 = kc,$$

las cuales, de acuerdo con la forma simétrica (2), pueden escribirse como

$$x = x_1, \quad \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

Para $a = 0$, la recta l es perpendicular al eje X y, por tanto, es paralela al plano YZ. Debe estar, en consecuencia, sobre un plano paralelo al plano YZ. Esto se indica analíticamente por la ecuación $x = x_1$. El estudiante debe obtener y discutir las ecuaciones de una recta para todas las combinaciones posibles de uno o dos números directores iguales a cero.

Vamos a hacer un resumen de los resultados precedentes en el siguiente

TEOREMA 1. *La recta que pasa por el punto dado* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *y cuyos números directores son* $[a, b, c]$ *tiene por ecuaciones*

$$x - x_1 = ka, \quad y - y_1 = kb, \quad z - z_1 = kc,$$

en donde k *es una constante diferente de cero.*

Si los números directores $[a, b, c]$ *son todos diferentes de cero, estas ecuaciones pueden escribirse en la forma simétrica*

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

NOTA. Es importante para el estudiante observar que los números directores de una recta pueden obtenerse directamente de la forma simétrica, *solamente* si el coeficiente de cada una de las variables x, y y z es la *unidad positiva.*

Ejemplo. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(-3, 2, 1)$ y es perpendicular al plano $4x + 3y - 12 = 0$.

Solución. Por el teorema 2 del Artículo 115, los números directores de la recta son $[4, 3, 0]$. Por tanto, por el teorema 1 anterior, las ecuaciones de la recta son

$$\frac{x + 3}{4} = \frac{y - 2}{3}, \quad z = 1.$$

El estudiante debe dibujar la figura para este ejemplo. Debe demostrar también que la recta es perpendicular al eje Z y que está en un plano paralelo al plano XY.

En seguida deduciremos las ecuaciones de la recta l que pasa por los puntos dados $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 111, un sistema de números directores para l está dado por $[x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$. Por tanto, por el teorema 1 anterior, las ecuaciones de l son

$$x - x_1 = k(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = k(y_2 - y_1), \quad z - z_1 = k(z_2 - z_1), \qquad (4)$$

en donde k es una constante diferente de cero.

Si todas las coordenadas correspondientes de P_1 y P_2 son diferentes entre sí, es decir, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$, podemos escribir las ecuaciones (4) en la siguiente forma

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (5)$$

Vamos a hacer un resumen de los resultados precedentes en el siguiente

TEOREMA 2. *La recta que pasa por los dos puntos dados* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *tiene por ecuaciones*

$$x - x_1 = k(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = k(y_2 - y_1), \quad z - z_1 = k(z_2 - z_1),$$

en donde k *es una constante diferente de cero.*

Si las coordenadas de P_1 *y* P_2 *son tales que* $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$, *estas ecuaciones pueden escribirse en la forma*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Consideremos ahora la recta l que pasa por el punto dado $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y tiene los ángulos directores dados α, β, γ. Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera de l, y t la longitud del segmento de recta variable PP_1. Vamos a considerar a t positivo o negativo según que P esté de un lado o del otro de P_1, como aparece en la figura 168. Según esto, la variable t puede tomar todos los valores reales incluyendo el valor cero cuando P coincide con P_1. Evidentemente, para cada valor asignado a t, la posición de P queda perfectamente definida con respecto al punto fijo P_1.

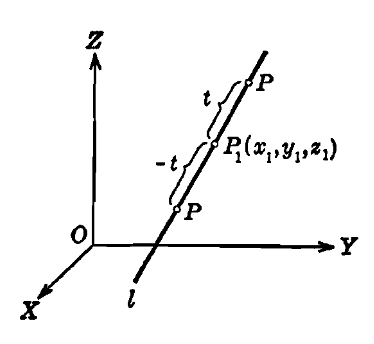


Fig. 168

Por el teorema 3 del Artículo 110, tenemos las relaciones

$$\cos \alpha = \frac{x - x_1}{t}, \quad \cos \beta = \frac{y - y_1}{t}, \quad \cos \gamma = \frac{z - z_1}{t},$$

de donde

$$x = x_1 + t \cos \alpha, \quad y = y_1 + t \cos \beta, \quad z = z_1 + t \cos \gamma. \qquad (6)$$

Observando las ecuaciones (6), vemos que, asignando un valor particular a t, los valores de x, y y z quedan determinados. Pero estos son las coordenadas de un punto P de l. Se sigue por esto (Art. 89) que las ecuaciones (6) son las *ecuaciones paramétricas* de la recta l, siendo la variable auxiliar t el *parámetro*. De aquí el siguiente

TEOREMA 3. *La recta que pasa por el punto* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *y tiene los ángulos directores* α, β, γ, *tiene por ecuaciones paramétricas*

$$x = x_1 + t \cos \alpha, \quad y = y_1 + t \cos \beta, \quad z = z_1 + t \cos \gamma,$$

en donde el parámetro t *representa la longitud dirigida de* P_1 *a un punto cualquiera* $P(x, y, z)$ *de la recta.*

NOTA. Anotamos previamente que una recta en el espacio se representa analíticamente por *dos* ecuaciones independientes. Aquí observamos que una recta en el espacio se representa por *tres* ecuaciones paramétricas. Pero si eliminamos al parámetro t entre estas tres ecuaciones, obtenemos las dos ecuaciones independientes usuales.

EJERCICIOS. Grupo 57

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Las ecuaciones de una recta l son

$$3x - 2y + 4z - 9 = 0 \quad \text{y} \quad x + y - 2z + 5 = 0.$$

Obtener otro par de ecuaciones para l. Comprobar el resultado hallando las coordenadas de dos puntos que estén sobre l partiendo de las ecuaciones dadas y demostrando entonces que estas coordenadas satisfacen al nuevo par de ecuaciones.

2. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(2, -1, 4)$ y tiene por números directores $[3, -1, 6]$.

3. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(4, 0, 5)$ y es paralela a la recta cuyos números directores son $[1, -1, 3]$.

4. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(-3, 2, 7)$ y es perpendicular al plano $2x - 3y + z = 0$.

5. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(-2, 4, 3)$ y cuyos números directores son $[2, 0, -3]$.

6. Una recta pasa por el punto $(6, 3, -2)$ y es perpendicular al plano $4y + 7z - 9 = 0$. Hallar sus ecuaciones.

7. Dos de los ángulos directores de una recta son $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$. Si la recta pasa por el punto $(4, -1, 4)$, hállense sus ecuaciones. (Dos soluciones.)

8. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(3, -2, 7)$ y corta al eje X perpendicularmente.

9. Una recta es perpendicular al plano XY y contiene al punto $(3, -4, -14)$. Hallar sus ecuaciones.

10. Los números directores de una recta son $[0, 0, 1]$ y la recta pasa por el punto $(-2, 1, 7)$. Hallar sus ecuaciones.

En cada uno de los ejercicios 11-16, una recta pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y tiene por números directores $[a, b, c]$. Hallar las ecuaciones de la recta cuando sus números directores son los que se indica. Interpretar los resultados analítica y geométricamente.

11. $a = 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0.$

12. $a \neq 0, \quad b = 0, \quad c \neq 0.$

13. $a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c = 0.$

14. $a = 0, \quad b = 0, \quad c \neq 0.$

15. $a = 0, \quad b \neq 0, \quad c = 0.$

16. $a \neq 0, \quad b = 0, \quad c = 0.$

17. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(-7, 3, -5)$ y es perpendicular a cada una de las dos rectas cuyos números directores son $[4, -2, 3]$ y $[1, 2, -2]$.

18. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(-6, 5, 3)$ y es paralela a la recta $\frac{x+4}{-2} = \frac{3-y}{2} = \frac{3z+5}{6}$.

19. Hallar las ecuaciones de las recta que pasa por el punto $(3, -3, 4)$ y es perpendicular a cada una de las rectas

$$\frac{2x+4}{4} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{5} \quad \text{y} \quad \frac{x-3}{1} = \frac{2y-7}{2} = \frac{3-z}{-3}.$$

20. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas

$$\frac{x-1}{-7} = \frac{y}{3} = \frac{2z+3}{-4} \quad \text{y} \quad \frac{x+5}{3} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z+9}{4}.$$

21. Demostrar que si una recta está en el plano XY, sin ser perpendicular ni al eje X ni al Y, y contiene al punto $P_1(x_1, y_1, 0)$, sus ecuaciones pueden escribirse en la forma $\frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\cos\beta}$, $z = 0$. (Ver el ejercicio 21 del grupo 14, Art. 37.)

22. Hallar las ecuaciones: *a*) del eje X; *b*) del eje Y; *c*) del eje Z.

En cada uno de los ejercicios 23-26, hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los dos puntos dados.

23. $(0, 0, 0)$, $(2, -1, 5)$.

24. $(5, 0, 7)$, $(5, -3, 11)$.

25. $(1, -7, 2)$, $(1, -7, -3)$.

26. $(2, 3, -4)$, $(-5, 3, -4)$.

En cada uno de los ejercicios 27-32, hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, cuando las coordenadas

correspondientes de P_1 y P_2 están relacionadas como se indica. Interpretar los resultados analítica y geométricamente.

27. $x_1 = x_2, \quad y_1 \neq y_2, \quad z_1 \neq z_2.$
28. $x_1 \neq x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 \neq z_2.$
29. $x_1 \neq x_2, \quad y_1 \neq y_2, \quad z_1 = z_2.$
30. $x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 \neq z_2.$
31. $x_1 = x_2, \quad y_1 \neq y_2, \quad z_1 = z_2.$
32. $x_1 \neq x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2.$

33. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(6, -4, 2)$ y tiene por ángulos directores $\alpha = 60°$, $\beta = 135°$. (Dos soluciones.)

34. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(5, -3, 0)$ y tiene por números directores $[2, -2, 1]$.

35. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los dos puntos $(1, 2, -3)$ y $(2, 6, 5)$.

36. Demostrar que si una recta pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y tiene por números directores $[a, b, c]$, sus ecuaciones paramétricas pueden escribirse en la forma

$$x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt, \quad z = z_1 + ct,$$

en donde t es el parámetro. ¿Qué relación guarda este parámetro con el parámetro t del teorema 3, Artículo 124?

37. Escribir las ecuaciones paramétricas de una recta que está situada: *a*) en el plano XY; *b*) en el plano XZ; *c*) en el plano YZ.

38. Las ecuaciones paramétricas de una recta son

$$x = 2 + 4t, \quad y = t - 4, \quad z = 7 - 8t.$$

Reducir estas ecuaciones a la forma simétrica. Hallar las coordenadas de dos puntos de la recta y construir dicha recta.

39. Reducir la forma simétrica del teorema 1 a la forma paramétrica del teorema 3, Artículo 124.

40. Reducir la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dada en el teorema 2 a la forma paramétrica del teorema 3, Artículo 124.

125 Planos proyectantes de una recta. Supongamos las ecuaciones de una recta l dadas en la forma general

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (1)$$

Hemos visto (Art. 123) que la recta l puede representarse también por dos planos diferentes cualesquiera de la familia de un haz de planos

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \quad (2)$$

Dado que hay un número infinito de pares de planos que definen a la recta l como su intersección, es natural que escojamos aquellos planos que sean más útiles para nuestros propósitos. Estos son los planos que pasan por l y son perpendiculares a los planos coordenados; llamados, apropiadamente, los *planos proyectantes* de la recta.

Por el teorema 7 del Artículo 118, un plano perpendicular a un plano coordenado se representa por una ecuación lineal que contiene solamente dos variables, las variables del plano coordenado particular. Por tanto, para obtener un plano proyectante determinado de la recta (1), asignamos un valor tal al parámetro k en la ecuación (2) de manera que la ecuación resultante contenga solamente las dos variables deseadas. Este procedimiento consiste, evidentemente, en la eliminación de una de las variables de las dos ecuaciones de la recta (1).

Ejemplo 1. Hallar las ecuaciones de los tres planos proyectantes de la recta l: $2x + 3y - z = 4$, $x - y + z = 4$. Construir la recta por medio de estos planos proyectantes.

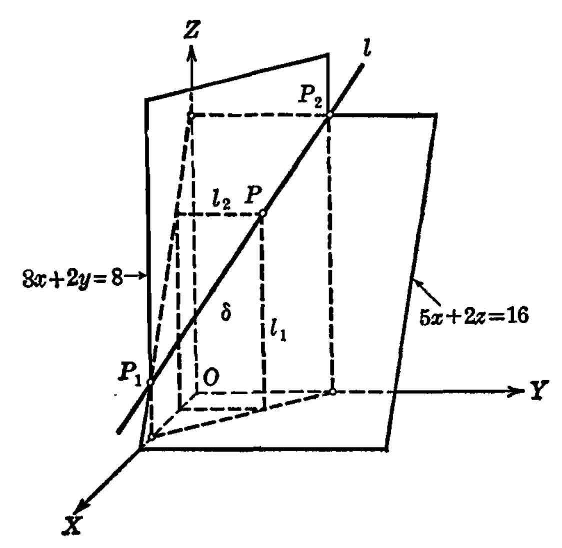


Fig. 169

Solución. Para eliminar la variable z basta sumar las ecuaciones dadas. Esto nos da

$$3x + 2y = 8, \tag{3}$$

que es la ecuación del plano proyectante de la recta dada sobre el plano XY.

La variable y puede eliminarse multiplicando la segunda ecuación de la recta por 3 y sumándola a la primera ecuación. Esto nos da

$$5x + 2z = 16, \tag{4}$$

que es la ecuación del plano proyectante sobra el plano XZ.

Análogamente, eliminando la variable x, obtenemos

$$5y - 3z + 4 = 0, \tag{5}$$

para ecuación del plano proyectante sobre el plano YZ.

Dos cualesquiera de los tres planos proyectantes son suficientes para determinar la recta l. Usemos, por ejemplo, los planos proyectantes (3) y (4) para construir la recta l, tal como se ve en la figura 169. Dos de los puntos de l, P_1 y P_2, determinados por estos planos, están sobre los planos coordenados; estos puntos se llaman *puntos de penetración* o *trazas* de la recta l.

El método para localizar cualquier punto P de la recta l también está indicado en la figura 169. Esto se logra haciendo pasar un plano δ paralelo al plano YZ. El plano δ corta a los planos proyectantes en dos rectas, l_1 y l_2; el punto P es entonces el punto de intersección de l_1 y l_2. Este método es de considerable importancia para localizar cualquier punto sobre una curva del espacio; será considerado más adelante en el Capítulo XVII.

Las ecuaciones de dos de los planos proyectantes de la recta (1) pueden escribirse en la forma

$$\left.\begin{aligned} y &= mx + b, \\ z &= nx + c. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Se les llama *forma proyección* de las ecuaciones de una recta. Esta forma es útil para ciertos tipos de problemas; el siguiente ejemplo es una ilustración de esto.

Supongamos que las ecuaciones de una recta l se nos dan en la forma general (1). Queremos demostrar que l está en un plano particular cuya ecuación puede escribirse en la forma

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \qquad (7)$$

Un método, por supuesto, es obtener las coordenadas de dos de los puntos de l y demostrar que satisfacen a la ecuación (7). Un segundo método consiste en demostrar que l es perpendicular a la normal al plano (7) y que uno de sus puntos está sobre ese plano. Un tercer método consiste en demostrar que la ecuación (7) se convierte en una identidad en x cuando y y z son reemplazadas por sus valores deducidos de la forma proyección (6) de l. Un cuarto método es demostrar que el plano (7) es un miembro de la familia de planos (2). En el siguiente ejemplo vamos a aplicar el tercer método.

Ejemplo 2. Demostrar que la recta

$$3x + 4y - 2z + 7 = 0, \quad x - y - 3z + 3 = 0, \qquad (8)$$

está contenida en el plano

$$x + 6y + 4z + 1 = 0. \qquad (9)$$

Solución. Eliminando las variables z y y sucesivamente de las ecuaciones (8), hallamos que las ecuaciones de la recta en función de los planos proyectantes (forma proyección) son

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{15}{14}, \quad z = \frac{1}{2}x + \frac{19}{14}.$$

Sustituyendo estos valores de y y z en la ecuación (9), obtenemos

$$x - 3x - \frac{45}{7} + 2x + \frac{38}{7} + 1 = 0,$$

una identidad para todos los valores de x. Esto muestra que las coordenadas de todos los puntos de la recta (8) satisfacen a la ecuación (9) del plano.

Los planos proyectantes de una recta son una simple ilustración de un concepto importante en el estudio y construcción de las curvas generales en el espacio. Este tema será considerado más ampliamente en el Capítulo XVII.

126. Reducción de la forma general a la forma simétrica. Es claro que la forma simétrica de las ecuaciones de una recta es, frecuentemente, más conveniente que la forma general. Por ejemplo, dada una recta, por su forma simétrica, es posible obtener inmediatamente los números directores de la recta y las oordenadas de uno de sus puntos. Además, la forma simétrica da también, inmediatamente, las ecuaciones de los planos proyectantes; dada la forma general, es necesario, casi siempre, eliminar una o más variables. Por esto, vamos a considerar ahora el problema de reducir la forma general a la forma simétrica. Este método quedará mejor explicado por medio de un ejemplo.

Ejemplo 1. Las ecuaciones de una recta son

$$x + 3y - z - 4 = 0, \quad 2x - y + z + 6 = 0 \qquad (1)$$

Hallar la forma simétrica.

Solución. Del sistema (1), despejando x en función de y se obtiene

$$x = \frac{2y + 2}{-3},$$

y despejando x en función de z, resulta

$$x = \frac{2z + 14}{-7}.$$

Igualando estos resultados, tenemos

$$x = \frac{2y + 2}{-3} = \frac{2z + 14}{-7}.$$

Como en la forma simétrica los coeficientes de las variables deben ser unitarios y positivos, vamos a escribir estas ecuaciones en la forma

$$x = \frac{y + 1}{-3/2} = \frac{z + 7}{-7/2},$$

o, para mayor claridad, en la forma

$$\frac{x}{2} = \frac{y + 1}{-3} = \frac{z + 7}{-7}.$$

La forma simétrica muestra que los números directores de la recta (1) son $[2, -3, -7]$ y que el punto $(0, -1, -7)$ está sobre ella.

Se pueden obtener formas simétricas de la recta (1) despejando y en función de x y z, o z en función de x y y. En cada caso se obtendrán los mismos números directores, pero las coordenadas del punto serán diferentes.

La reducción puede efectuarse también hallando las coordenadas de dos puntos de la recta (1) y aplicando la fórmula de las ecuaciones de la recta que pasa por los dos puntos.

Cuando se necesita obtener solamente los números directores de una recta partiendo de su forma general, es conveniente emplear el artificio de los números directores (Art. 113). Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Demostrar que la recta

$$x - y + 2z - 8 = 0, \quad x + 2y + 8z - 20 = 0, \tag{2}$$

es paralela al plano

$$3x - 2y + 8z - 5 = 0. \tag{3}$$

Solución. Como la recta (2) está en cada uno de los planos que la definen, es perpendicular a cada una de las normales de estos planos. Los números directores de estas normales son $[1, -1, 2]$ y $[1, 2, 8]$. Por tanto, por el artificio de los números directores, los números directores de la recta (2) son

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -12, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

o sea $[4, 2, -1]$. Los números directores de la normal al plano (3) son $[3, -2, 8]$. Entonces, como

$$4 \cdot 3 + 2(-2) - 1 \cdot 8 = 0,$$

se sigue que la recta (2) es perpendicular a la normal al plano (3) y, por tanto, es paralela al plano.

EJERCICIOS. Grupo 58

Dibujar una figura para cada ejercicio.

En cada uno de los ejercicios 1-5, hallar los planos proyectantes de la recta cuyas ecuaciones se dan. Usense estos planos proyectantes para construir la recta.

1. $x + y + z = 6, \quad 3x - y - z = 2.$
2. $2x - y + 4z = 8, \quad x + 3y - 5z = 9.$
3. $3x + 2y - z = 4, \quad 4x - y + 7z = 14.$
4. $x - y - z = 2, \quad 3x + 2y + z = 6.$
5. $4x + 3y - 2z = 12, \quad x - 5y + 10z = 5.$

6. Las ecuaciones de una recta son

$$4x + 2y - 3z + 8 = 0, \quad 2x - y + 2z - 11 = 0.$$

Hallando las coordenadas de dos de los puntos de esta recta, demuéstrese que está en el plano $2x + 7y - 12z + 49 = 0$.

7. Las ecuaciones de una recta son

$$x - 4y + 5z - 3 = 0, \quad x + 3y - 3z + 2 = 0.$$

Poniendo estas ecuaciones en función de los planos proyectantes, demuéstrese que esta recta está en el plano $3x + 2y - z + 1 = 0$.

8. Las ecuaciones de una recta son

$$5x - 4y + 2z - 9 = 0, \quad 2x + y + 2z - 4 = 0.$$

Empleando el haz de planos que tiene a esta recta por eje, demuéstrese que está en el plano $x - 6y - 2z - 1 = 0$.

9. Demostrar que la recta $\frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+7}{2}$ está en el plano $x - 2y - 3z - 8 = 0$.

10. Las ecuaciones de una recta l son

$$4x - 2y + 7z - 2 = 0, \quad 3x + y - z + 4 = 0,$$

y la ecuación de un plano δ es $6x - 8y + 23z - 14 = 0$. Obtener las ecuaciones paramétricas de l y sustituir estos valores de x, y y z en la ecuación de δ. Demostrar que la ecuación resultante es una identidad en el parámetro t y, por tanto, que l está en δ.

11. Demostrar que la recta $7x - y - z + 8 = 0$, $3x + 5y - 2z - 3 = 0$, está en el plano $5x - 17y + 4z + 25 = 0$ empleando las ecuaciones paramétricas de la recta.

12. Si una recta es paralela a uno de los planos coordenados, demuéstrese que tiene solamente dos planos proyectantes diferentes.

13. Hallar la ecuación del plano determinado por la recta

$$2x + 2y - z + 3 = 0, \quad x - y + 2z + 2 = 0,$$

y el punto $(3, -1, 2)$.

14. Hallar la ecuación del plano determinado por la recta

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{3z-2}{6}$$

y el punto $(2, 0, -4)$.

15. Las ecuaciones de una recta son

$$4x + 3y - z - 11 = 0, \quad x - 3y + 2z + 1 = 0.$$

Hallar las coordenadas de cada uno de sus puntos de penetración o trazas en los planos coordenados.

En cada uno de los ejercicios 16 y 17, redúzcase la forma general dada a una forma simétrica de las ecuaciones de la recta.

16. $x - y + 3z = 4$, $2x + y + 3z = 12$.

17. $9x + 2y - 3z = 18$, $x - 3y - 5z = 15$.

18. Demostrar que la recta $x + 3y + z + 9 = 0$, $4x + 3y - 2z + 12 = 0$, es paralela al plano $2x - 3y - 4z + 6 = 0$.

19. Demostrar que la recta $x - 2y - z + 7 = 0$, $2x - 10y + z + 5 = 0$, es perpendicular al plano $4x + y + 2z - 5 = 0$.

20. Demostrar que las rectas $2x + y + z = 0$, $x - 4y + 2z + 12 = 0$, y $\frac{x+7}{2} = \frac{3y+4}{-3} = \frac{9-z}{3}$ son paralelas.

21. Demostrar que las rectas $2x + y - 2z + 10 = 0$, $y + 2z - 4 = 0$, y $\frac{4-x}{4} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+11}{2}$ son perpendiculares.

22. Hallar el ángulo obtuso que forman las rectas $\frac{2x+3}{4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{-3}$ y $x + y - 2z + 11 = 0$, $2x - y + z - 9 = 0$.

23. Demostrar que las rectas $6x + 5y + 5z = 0$, $x + y + 2z - 1 = 0$, y $7x + 6y + 7z - 2 = 0$, $7x + 2y - 21z - 86 = 0$, son paralelas.

24. Demostrar que las rectas $4x + y - z + 15 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$, y $2x + y + z + 1 = 0$, $x - y + 2z - 7 = 0$, son perpendiculares.

25. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas $2x + y - 4z - 2 = 0$, $4x - 3y + 2z - 4 = 0$, y $x + 5y + z + 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$.

127. Posiciones de una recta y un plano. En este artículo consideraremos primero las posiciones que pueden ocupar una recta l cuyos números directores son $[a, b, c]$ y un plano δ cuya ecuación es $Ax + By + Cz + D = 0$.

La recta l y el plano δ son paralelos si y solamente si l es perpendicular a la normal a δ. Por tanto, por el corolario 2 del teorema 7, Artículo 112, una condición necesaria y suficiente para el paralelismo de l y δ está dada por la relación

$$Aa + Bb + Cc = 0. \quad (1)$$

La recta l y el plano δ son perpendiculares entre sí si y solamente si l es normal a δ. Por tanto, por el corolario 1 del teorema 7, Artículo 112, una condición necesaria y suficiente para la perpendicularidad de l y δ está dada por las relaciones

$$A = ka, \quad B = kb, \quad C = kc, \quad (2)$$

en donde k es una constante diferente de cero.

Un resumen de estos resultados lo expone el siguiente

TEOREMA 4. *La condición necesaria y suficiente para que la recta cuyos números directores son* $[a, b, c]$ *y el plano cuya ecuación es* $Ax + By + Cz + D = 0$,

a) *sean paralelos, es* $Aa + Bb + Cc = 0$;

b) *sean perpendiculares,* $A = ka$, $B = kb$, $C = kc$, $(k \neq 0)$.

Vamos a considerar ahora el caso (fig. 170) en que la recta l no es ni paralela ni perpendicular al plano δ. Sea l' la proyección de l sobre δ. El ángulo formado por la recta l y el plano δ se define como el ángulo agudo ϕ formado por la recta l y su proyección l' sobre δ. Sea n la normal a δ en P, punto de intersección de l y δ. Entonces las rectas n, l y l' están en un mismo plano y el ángulo ϕ

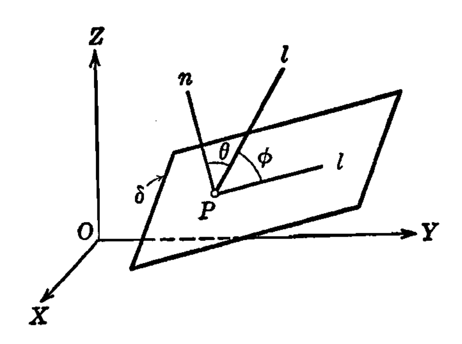


Fig. 170

es el complemento de θ, el ángulo agudo formado por n y l. Pero, por el teorema 7 del Artículo 112, el ángulo agudo θ está determinado por la relación

$$\cos\theta = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (3)$$

Por tanto, como $\cos\theta = \operatorname{sen}(90^\circ - \theta) = \operatorname{sen}\phi$, se sigue que sen ϕ está determinado por el segundo miembro de la ecuación (3). De aquí el siguiente

TEOREMA 5. *El ángulo ϕ formado por la recta cuyos números directores son* $[a, b, c]$ *y el plano* $Ax + By + Cz + D = 0$ *es el ángulo agudo determinado por la fórmula*

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

NOTA. El teorema 4 puede obtenerse directamente del teorema 5. Esta deducción se deja como ejercicio al estudiante. (Ver los ejercicios 3 y 4 del grupo 59 al final de este capítulo.)

Ahora vamos a considerar la determinación de la distancia d (fig. 171) de un punto dado P_1 a una recta dada l en el espacio.

Por el punto P_1 hagamos pasar un plano δ perpendicular a l y sea P' el punto de intersección. Entonces la longitud del segmento $P'P_1$ es la distancia buscada d. Vamos a ilustrar el procedimiento con un ejemplo numérico.

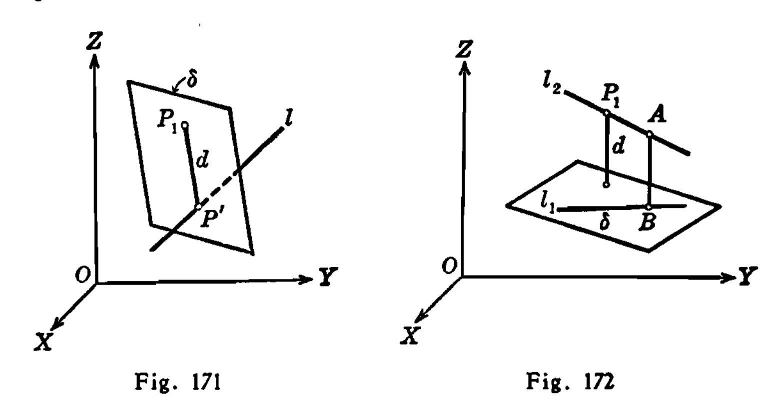


Fig. 171 Fig. 172

Ejemplo 1. Hallar la distancia del punto $P_1(6, -3, 3)$ a la recta l:

$$2x + 2y + z = 0, \quad 4x - y - 3z - 15 = 0.$$

Solución. Por el artificio de los números directores (Art. 113) hallamos que los números directores de l son $[1, -2, 2]$. Por tanto, la ecuación del plano δ que pasa por $P_1(6, -3, 3)$ y es perpendicular a l es

$$1(x - 6) - 2(y + 3) + 2(z - 3) = 0,$$

o sea,

$$x - 2y + 2z - 18 = 0.$$

Las coordenadas del punto P', intersección de l y δ, son la solución común $(4, -5, 2)$ de las ecuaciones de l y δ. Por tanto, la distancia buscada es

$$d = |\overline{P'P_1}| = \sqrt{(6-4)^2 + (-3+5)^2 + (3-2)^2} = 3.$$

La distancia entre dos rectas paralelas puede hallarse como la distancia de cualquier punto de una de las rectas a la otra recta.

Se demuestra en Geometría elemental que dadas dos rectas que se cruzan puede trazarse una y solamente una perpendicular común, y que esta perpendicular es la distancia más corta que existe entre las dos rectas. Vamos a determinar esta distancia. Sean l_1 y l_2 (figura 172) dos rectas cruzadas cualesquiera, y AB su perpendicular común. Por l_1 hagamos pasar un plano δ paralelo a l_2. Sea P_1 un punto cualquiera de l_2. Entonces la distancia de P_1 a δ es la distancia buscada $d = |\overline{AB}|$. Evidentemente, d es también la distancia entre el plano δ y el plano que pasando por l_2 es paralelo a l_1. Vamos a ilustrar la determinación de d por un ejemplo numérico.

Ejemplo 2. Hallar la distancia más corta entre las dos rectas cruzadas

$$l_1:\ 2x - y + z + 3 = 0,\quad x + y + 2z + 3 = 0;$$

y

$$l_2:\ x - y - z - 1 = 0,\quad 3x - z - 7 = 0.$$

Solución. Por el Artículo 121, la familia de planos que pasan por l_1 es

$$2x - y + z + 3 + k(x + y + 2z + 3) = 0. \tag{4}$$

Por el artificio de los números directores (Art. 113), los números directores de l_2 son $[1,\ -2,\ 3]$. Por tanto, por el teorema 4 anterior, para que un plano de la familia (4) sea paralelo a l_2 debemos tener

$$1(2 + k) - 2(-1 + k) + 3(1 + 2k) = 0,$$

de donde, $k = -\frac{7}{5}$. Sustituyendo este valor de k en la ecuación (4), obtenemos que la ecuación del plano que pasa por l_1 y es paralelo a l_2, es

$$x - 4y - 3z - 2 = 0. \tag{5}$$

Las coordenadas de un punto P_1 de l_2 son $(0,\ 6,\ -7)$. La distancia buscada d es la distancia de P_1 al plano (5). Por el teorema 11 del Artículo 120, esta distancia es

$$d = \frac{|0 - 4\cdot 6 - 3(-7) - 2|}{\sqrt{1 + 4^2 + 3^2}} = \frac{5}{26}\sqrt{26}.$$

EJERCICIOS. Grupo 59

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar el ángulo que forman la recta $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$ y el plano $2x + 3y - z + 11 = 0$.

2. Hallar el ángulo formado por la recta

$$x - 2y + z + 4 = 0,\quad x + 2y + 3z - 4 = 0,$$

y el plano $3x - 7y + 8z - 9 = 0$.

3. Partiendo del teorema 5, obtener la condición para el paralelismo de una recta y un plano, dada por el teorema 4 del Artículo 127. (Ver el corolario 2 del teorema 7, Art. 112.)

4. Partiendo del teorema 5, obtener la condición para la perpendicularidad de una recta y un plano, dada por el teorema 4 del Artículo 127. (Ver el corolario 1 del teorema 7, Art. 112.)

5. Hallar la distancia del punto $(-1,\ 2,\ 3)$ a la recta

$$\frac{x-7}{6} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{3}.$$

6. Hallar la distancia del punto $(7,\ 7,\ 4)$ a la recta

$$6x + 2y + z - 4 = 0,\quad 6x - y - 2z - 10 = 0.$$

7. Demostrar que las rectas

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{8-z}{4} \quad \text{y} \quad \frac{x-1}{3}=\frac{2-y}{-4}=\frac{z+3}{-4}$$

son paralelas, y hallar la distancia entre ellas.

8. Demostrar que las rectas $x+7y-z-16=0$, $x-y+z-4=0$, y $x+11y-2z=0$, $x-5y+2z-4=0$, son paralelas, y hallar la distancia entre ellas.

9. Hallar la distancia más corta entre las dos rectas que se cruzan

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{1} \quad \text{y} \quad \frac{x+2}{-3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}.$$

10. Hallar la distancia más corta entre las dos rectas cruzadas

$$x+y+2z-1=0, \quad x-2y-z-1=0,$$

y

$$2x-y+z-3=0, \quad x+y+z-1=0.$$

11. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -1, 7)$ y es perpendicular a la recta $\frac{x+2}{-3}=\frac{3-y}{-1}=\frac{z}{2}$.

12. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 4, -1)$ y es paralelo a cada una de las rectas

$$\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+2}{2} \quad \text{y} \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-7}{-1}.$$

13. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(7, -2, 9)$ y es perpendicular a cada una de las rectas

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{3} \quad \text{y} \quad \frac{x+4}{1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z}{-2}.$$

14. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(5, 0, -3)$ y es paralela a la recta $\frac{x+6}{3}=\frac{y+2}{-8}=\frac{4-3z}{9}$.

15. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(6, 4, -2)$ y es paralela a cada uno de los planos $x+2y-3z+8=0$ y $2x-y+z-7=0$.

16. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{4}$ y es paralelo a la recta $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+7}{5}$.

17. Hallar la ecuación del plano determinado por la recta

$$\frac{x}{1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+3}{-1}$$

y el punto $(4, -3, 2)$.

18. Demostrar que la recta $\frac{x-2}{6}=\frac{3y+1}{-6}=\frac{1-z}{3}$ y el plano

$$2x-3y+6z+3=0$$

son paralelos y determinar la distancia que hay entre ellos.

19. Demostrar que las rectas

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{4} \quad \text{y} \quad \frac{x-3}{2}=\frac{3-2y}{2}=\frac{1-z}{-4}$$

son paralelas, y hallar la ecuación del plano determinado por ellas.

20. Demostrar que las rectas

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{2} \quad \text{y} \quad \frac{x-2}{-1}=\frac{y-8}{3}=\frac{z-11}{4}$$

se cortan, y hallar la ecuación del plano determinado por ellas.

21. Demostrar, analíticamente, que si dos planos paralelos son cortados por un tercer plano, las rectas de intersección son paralelas.

22. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(6, -1, 3)$ y es perpendicular a la recta $2x+2y+z-4=0$, $x-3y+4z+2=0$.

23. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 2, -4)$ y es paralelo a cada una de las rectas $x+y-z+11=0$, $x-y+2z-7=0$, y $2x-3y-2z+8=0$, $x+2y+z-9=0$.

24. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(5, 1, -1)$ y es paralela a cada uno de los planos $3x-y+2z-5=0$ y $2x+2y-3z+9=0$.

25. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1, 6, -5)$ y es perpendicular a cada una de las rectas $3x-2y+3z+9=0$, $x+y-2z+13=0$, y $2x+2y-5z+10=0$, $x-y-z+3=0$.

26. Hallar la ecuación del plano determinado por la recta

$$2x-y-z+8=0, \quad x+6y-2z-7=0,$$

y el punto $(1, -2, 2)$.

27. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta

$$5x-3y+2z+1=0, \quad x+3y-z+11=0,$$

y es paralelo a la recta de ecuaciones

$$x+4y-3z-2=0, \quad 3x-y+4z-9=0.$$

28. Demostrar que la recta

$$3x-y-z+1=0, \quad 7x-2y-3z+3=0,$$

y el plano $x+y-3z+8=0$ son paralelos, y hallar la distancia que hay entre ellos.

29. Demostrar que las rectas $x-2y+2z-4=0$, $x+4y+8z+8=0$, y $x+y+5z-5=0$, $x+8y+12z-12=0$, son paralelas, y hallar la ecuación del plano que determinan.

30. Determinar la distancia d del plano δ: $3x-12y+4z-3=0$ al punto $P_1(3, -1, 2)$ por el siguiente procedimiento. Hállense las coordenadas del punto P', pie de la perpendicular trazada de P_1 a δ. Luego determínese d como la longitud del segmento $P'P_1$.

CAPITULO XVI

SUPERFICIES

128. Introducción. El presente capítulo lo dedicaremos al estudio de la ecuación rectangular en tres variables,

$$F(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

En primer lugar vamos a extender al espacio tridimensional algunos de los conceptos fundamentales relativos a la ecuación

$$f(x, y) = 0,$$

como representación analítica de un lugar geométrico, estudiados en el Capítulo II.

Vimos en en el Capítulo XIV que todo plano se representa analíticamente por una *única* ecuación lineal de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

De una manera más general, veremos que, si existe una representación analítica de una figura geométrica considerada por nosotros como una superficie, tal representación consistirá en una *única* ecuación rectangular de la forma (1). Por ejemplo, se puede demostrar fácilmente, por medio de la fórmula de la distancia entre dos puntos (teorema 1, Art. 108), que la superficie esférica de radio r y con centro en el origen se representa, analíticamente, por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

De acuerdo con lo anterior, vamos a establecer la siguiente

DEFINICIÓN. Se llama *superficie* al conjunto de puntos, y *solamente* de aquellos puntos, cuyas coordenadas satisfacen una *sola* ecuación de la forma (1).

El lector debe notar cuidadosamente lo que implica esta definición. Como de ordinario, las coordenadas de un punto están restringidas a

valores *reales*. La definición establece que, si una ecuación de la forma (1) representa un lugar geométrico, ese lugar geométrico es una superficie. Y recíprocamente, si una superficie puede representarse analíticamente, tal representación es una sola ecuación de la forma (1).

Aunque la ecuación (1) contiene tres variables, la ecuación de una superficie puede contener solamente una o dos variables. Por ejemplo, vimos anteriormente que una ecuación de la forma $x = k$, en que k es una constante cualquiera, representa un plano paralelo al plano YZ. Además, veremos más adelante que una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 = 4, \qquad (2)$$

considerada en el espacio, representa un cilindro circular recto. Al trabajar en tres dimensiones, el lector debe cuidarse de referirse a la ecuación (2) como una circunferencia. Con el fin de evitar tal ambigüedad, generalmente es mejor referirse a la ecuación (2) como a "la superficie $x^2 + y^2 = 4$" o "el cilindro $x^2 + y^2 = 4$".

Toda ecuación de la forma (1) no representa necesariamente una superficie. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 7 = 0$$

tiene un número infinito de soluciones o ternas de valores para x, y y z. Pero en ninguna de las ternas son reales los tres valores. Por tanto, en nuestra Geometría *real*, decimos que esta ecuación *no representa ningún lugar geométrico*. Podemos anotar también que la ecuación

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 0$$

tiene solamente una solución real, que es $x = y = z = 0$, y, por tanto, su lugar geométrico está constituído por un solo punto, el origen.

129. Discusión de la ecuación de una superficie. En la construcción de curvas planas (Art. 19), vimos que era particularmente ventajoso discutir la ecuación de una curva antes de trazar su gráfica correspondiente. Análogamente, es ventajoso discutir la ecuación de una superficie antes de construirla. Limitaremos nuestra discusión a los cinco pasos siguientes:

1. Intercepciones con los ejes coordenados.
2. Trazas sobre los planos coordenados.
3. Simetría con respecto a los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.
4. Secciones por planos paralelos a los planos coordenados.
5. Extensión de la superficie.

Los dos primeros pasos fueron definidos y discutidos en el Artículo 116. Por tanto, dedicaremos el resto de este artículo a una discusión de los tres pasos restantes.

En el Artículo 16 dimos las definiciones para la simetría de una curva con respecto a una recta y con respecto a un punto. Estas definiciones no cambian cuando la palabra ''curva'' es reemplazada por la palabra ''superficie''. Queda por defininir la simetría con respecto a un plano.

DEFINICIÓN. Se dice que dos puntos diferentes son *simétricos con respecto a un plano* si y solamente si el plano es perpendicular al segmento que los une en su punto medio.

Así, los puntos P_1 y P_2 (fig. 173) son simétricos con respecto al plano δ siempre que el plano sea perpendicular al segmento P_1P_2 en su punto medio. El plano δ se llama *plano de simetría*.

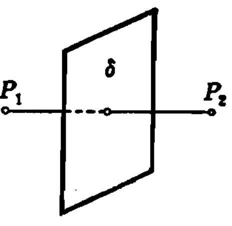


Fig. 173

DEFINICIÓN. Se dice que una superficie es *simétrica con respecto a un plano de simetría* δ si el simétrico de *cada* punto de la superficie, respecto al plano δ, *es también* un punto de la superficie.

Las pruebas para determinar la simetría de una superficie a partir de su ecuación pueden obtenerse por los mismos métodos empleados para deducir las pruebas análogas para las curvas planas (Art. 16). De acuerdo con esto, el estudiante debe verificar los resultados dados en la siguiente tabla.

Si la ecuación de la superficie no se altera cuando las variables x, y y z son reemplazadas por	La superficie es simétrica con respecto al
$-x,\ y,\ z$	plano YZ
$x,\ -y,\ z$	plano XZ
$x,\ y,\ -z$	plano XY
$-x,\ -y,\ z$	eje Z
$-x,\ y,\ -z$	eje Y
$x,\ -y,\ -z$	eje X
$-x,\ -y,\ -z$	origen

Los tres siguientes teoremas constituyen un resumen de estos resultados.

TEOREMA 1. *Si la ecuación de una superficie no se altera cuando se cambia el signo de una de las variables, la superficie es simétrica con respecto al plano coordenado a partir del cual se mide esa variable, y recíprocamente.*

TEOREMA 2. *Si la ecuación de una superficie no se altera cuando se les cambia el signo a dos de sus variables, la superficie es simétrica con respecto al eje coordenado a lo largo del cual se mide la variable cuyo signo no se cambió, y recíprocamente.*

TEOREMA 3. *Si la ecuación de una superficie no se altera cuando sus tres variables cambian de signo, la superficie es simétrica con respecto al origen, y recíprocamente.*

Supongamos que la ecuación de una superficie es

$$F(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Se puede obtener una buena idea de la forma de esta superficie estudiando la naturaleza de sus secciones planas. Tales secciones pueden determinarse convenientemente cortando la superficie por una serie de planos paralelos a los planos coordenados. Por ejemplo, los planos paralelos al plano XY pertenecen a la familia cuya ecuación es $z = k$, en donde k es una constante arbitraria o parámetro. Entonces, de la ecuación (1), tenemos que

$$F(x, y, k) = 0, \quad z = k, \tag{2}$$

son las ecuaciones de la curva de intersección del plano con la superficie, correspondiendo a cada valor asignado a k una curva determinada. Y como la curva (2) está en el plano $z = k$, puede determinarse su naturaleza por los métodos de la Geometría analítica plana.

El concepto de la extensión de una superficie es análogo al de la extensión de una curva plana ya estudiado en el Artículo 17. Si se da la ecuación de una superficie en la forma (1), se puede ver de despejar una de las variables en función de las otras dos. Si, por ejemplo, despejamos z en función de x y y podemos escribir la ecuación en la forma

$$z = f(x, y). \tag{3}$$

Una ecuación en la forma explícita (3) nos permite obtener los intervalos de variación de los valores reales que las variables pueden tomar. Esta información es útil para determinar la localización general de la superficie en el espacio coordenado; también indica si la superficie es cerrada o indefinida en extensión.

130. Construcción de una superficie. En este artículo vamos a ilustrar la discusión de la ecuación de una superficie y la construcción de la misma mediante varios ejemplos.

Ejemplo 1. Discutir la superficie cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 - 4z = 0. \qquad (1)$$

Construir la superficie.

Solución. 1. *Intercepciones.* Las únicas intercepciones con los ejes coordenados están dadas por el origen.

2. *Trazas.* La traza sobre el plano XY es un solo punto, el origen. La traza sobre el plano XZ es la parábola $x^2 = 4z$, $y = 0$. La traza sobre el plano YZ es la parábola $y^2 = 4z$, $x = 0$.

3. *Simetría.* La superficie es simétrica con respecto al plano YZ, al plano XZ y al eje Z.

4. *Secciones.* Los planos $z = k$ cortan a la superficie (5) en las curvas

$$x^2 + y^2 = 4k, \quad z = k,$$

que constituye una familia de circunferencias, para todos los valores de $k > 0$.

Los planos $y = k$ cortan a la superficie (1) en las parábolas

$$x^2 = 4\left(z - \frac{k^2}{4}\right), \quad y = k;$$

y los planos $x = k$ cortan a la superficie (1) en las parábolas

$$y^2 = 4\left(z - \frac{k^2}{4}\right), \quad x = k.$$

5. *Extensión.* La ecuación (1) muestra que las variables x y y pueden tomar todos los valores reales, pero la variable z está restringida a valores positivos. Por tanto, ninguna parte de la superficie aparece abajo del plano XY, sino que se extiende indefinidamente hacia arriba del plano XY.

En la figura 174 se ha trazado una parte de la superficie. Todas las secciones paralelas al plano XY son circunferencias cuyo radio crece a medida que se alejan del plano XY. La parte que está en el primer octante aparece en línea gruesa. Esta superficie se llama *paraboloide de revolución*.

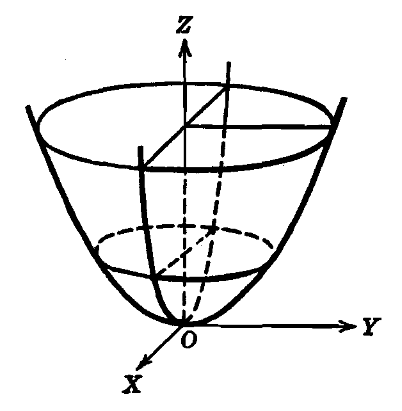


Fig. 174

Ejemplo 2. Discutir la superficie cuya ecuación es

$$x^2 + z - 2 = 0. \qquad (2)$$

Construir la superficie.

Solución. 1. *Intercepciones.* Las intercepciones con el eje X son $\pm\sqrt{2}$. Con el eje Y no hay intercepción. La intercepción con el eje Z es 2.

2. *Trazas.* Las trazas sobre el plano XY son las rectas $x = \sqrt{2}$, $z = 0$, y $x = -\sqrt{2}$, $z = 0$. La traza sobre el plano XZ es la parábola $x^2 = -(z - 2)$, $y = 0$. La traza sobre el plano YZ es la recta $z = 2$, $x = 0$.

3. *Simetría.* La superficie es simétrica con respecto al plano YZ.

4. *Secciones.* Si cortamos la superficie (2) por los planos $z = k$ se obtienen las rectas $x = \pm\sqrt{2 - k}$, $z = k$, siempre que $k \leq 2$. Los planos $y = k$ cortan a la superficie en las parábolas $x^2 = -(z - 2)$, $y = k$. Los planos $x = k$ cortan a la superficie en las rectas $z = 2 - k^2$, $x = k$.

5. *Extensión.* Por la ecuación (2) vemos que no hay restricciones para los valores que x y y pueden tomar. Pero la variable z no puede tomar valores mayores de 2. Por tanto, la superficie está en su totalidad abajo o en el plano $z = 2$ y es indefinida en extensión.

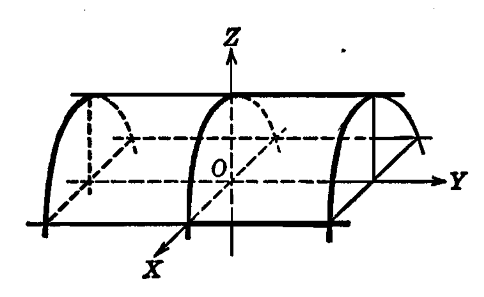


Fig. 175

En la figura 175 aparece una parte de la superficie. Dicha superficie es, evidentemente, un cilindro cuyas generatrices son paralelas al eje Y y cuyas secciones paralelas al plano XZ son parábolas congruentes. En vista de esta última propiedad, la superficie se llama *cilindro parabólico*.

EJERCICIOS. Grupo 60

En cada uno de los ejercicios 1-24, estudiar y trazar la superficie cuya ecuación se da.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
2. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$.
3. $x^2 + y^2 = 25$.
4. $x^2 + y^2 - 9z^2 = 9$.
5. $9x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 36$.
6. $x^2 + 4z^2 = 16$.
7. $y^2 - z^2 = 25$.
8. $x^2 + z^2 - 9y = 0$.
9. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
10. $y^2 - 4x = 0$.
11. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0$.
12. $y^2 + z^2 = 9$.
13. $9x^2 + 36y^2 + 16z^2 = 144$.
14. $9x^2 - 4y^2 + 3z^2 = 36$.
15. $3x^2 - 6y^2 + 2z^2 = 6$.
16. $y^2 - 4z + 4 = 0$.
17. $x^2 - 4x + 2y + 12 = 0$.
18. $3x^2 + z^2 - 12x - 6y + 12 = 0$.
19. $x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$.
20. $x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2x = 1$.
21. $y^2 - x^3 = 0$.
22. $z^2 + 4x - 4z = 4$.
23. $x^2 - 3y^2 - 4z^2 = 0$.
24. $x^2 - y^2 - 2z = 0$.

25. Explicar cómo se deducen los teoremas 1, 2 y 3 del Artículo 129.

26. Demostrar que si una superficie es simétrica con respecto a dos de los planos coordenados también lo es con respecto al eje coordenado contenido en ambos planos.

27. Demostrar que si una superficie es simétrica con respecto a cada uno de los planos coordenados también lo es con respecto al origen.

28. Por medio de un ejemplo, demostrar que el recíproco del teorema del ejercicio 27, no es necesariamente verdadero.

29. Demostrar que si una superficie es simétrica con respecto a cualquiera de los planos coordenados y al eje coordenado perpendicular a ese plano, también lo es con respecto al origen.

30. Demostrar que la ecuación $y^2 - z^2 = 0$ representa dos planos que se cortan. Trazar estos planos.

131. Ecuación de la superficie esférica. En nuestro estudio analítico de la esfera, sólo nos interesa su superficie. Por esto, algunas veces, usaremos como sinónimos los términos esfera y superficie esférica. El estudiante debe observar en este artículo la estrecha analogía que existe entre las características de la superficie esférica y los resultados previamente obtenidos para la circunferencia en la Geometría analítica plana (Capítulo IV).

La *superficie esférica* se *define* como el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo. La distancia constante se llama *radio* y el punto fijo *centro*. De esta definición y del teorema 1 del Artículo 108 obtenemos el siguiente teorema (ver el teorema 1 del Artículo 39).

TEOREMA 4. *La ecuación de la superficie esférica cuyo centro es el punto* (h, k, l) *y cuyo radio es la constante* r *es*

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2. \qquad (1)$$

COROLARIO. *La superficie esférica cuyo centro es el origen y cuyo radio es la constante dada* r *tiene por ecuación*

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

La ecuación (1) del teorema 4 se conoce como *forma ordinaria* de la ecuación de la esfera. Si desarrollamos esta ecuación y ordenamos los términos, obtenemos una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + K = 0. \qquad (2)$$

La ecuación (2) es la llamada *forma general* de la ecuación de la esfera. Contiene cuatro constantes arbitrarias independientes; por tanto, una superficie esférica queda perfectamente determinada por cuatro condiciones independientes. Así, por ejemplo, cuatro puntos no coplanares determinan una superficie esférica.

132. Coordenadas esféricas. En este artículo vamos a considerar un nuevo sistema de coordenadas en el espacio que está estrechamente asociado con la superficie esférica.

Sea $P(x, y, z)$ (fig. 176) un punto cualquiera de una superficie esférica de centro el origen y radio r. La ecuación de la superficie es, evidentemente,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \qquad (1)$$

La porción de la esfera comprendida en el primer octante aparece en la figura 176. Por el punto P y el eje Z pasa un plano que corta al

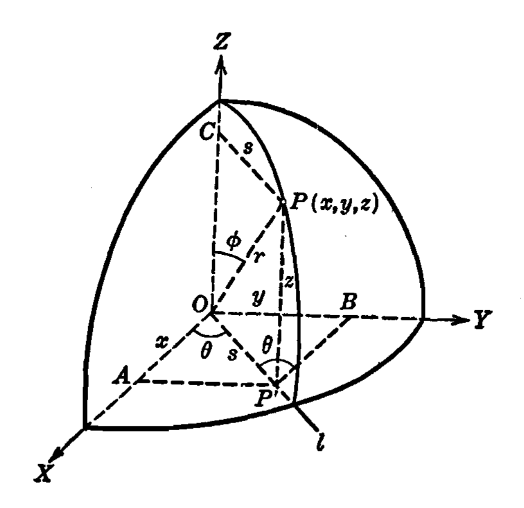


Fig. 176

plano XY en la recta l. Denotemos por θ el ángulo formado por l y la parte positiva del eje X, y por ϕ el formado por el radio OP y la parte positiva del eje Z. Designemos por P', A, B y C, respectivamente, las proyecciones del punto P sobre el plano XY y sobre los ejes X, Y y Z. Sea $|\overline{OP'}| = |\overline{CP}| = s$.

Del triángulo rectángulo OPC tenemos

$$s = r \operatorname{sen} \phi.$$

De los triángulos rectángulos OAP', OBP' y $OP'P$, tenemos, respectivamente,

$$x = s \cos \theta = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta,$$

$$y = s \operatorname{sen} \theta = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta,$$

$$z = \overline{P'P} = r \operatorname{sen} (90° - \phi) = r \cos \phi.$$

Evidentemente, de las relaciones

$$x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = r \cos \phi, \qquad (2)$$

es posible localizar cualquier punto P sobre la superficie esférica (1) cuando se conocen los valores de r, ϕ y θ. Por esto estas cantidades se llaman *coordenadas esféricas* del punto P y se escriben así: (r, ϕ, θ). De una manera más general, si dos rectas cualesquiera, intersectantes y perpendiculares en el espacio, tales como los ejes X y Z, y su intersección O, se toman como elementos de referencia, entonces con las coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) se puede localizar cualquier punto en el espacio. Tenemos así un nuevo sistema llamado *sistema de coordenadas esféricas*.

Considerado como un punto de la superficie de la Tierra, P se localiza por su latitud, el complemento del ángulo ϕ, y su longitud θ medida a partir del eje X como una recta en el plano del meridiano principal. De acuerdo con esto, las coordenadas ϕ y θ se llaman, respectivamente, *colatitud* y *longitud* del punto P. La coordenada r se llama *radio vector* del punto P.

La longitud θ puede medirse, como en Trigonometría, tomando la parte positiva del eje X como lado inicial (Apéndice IC, 1). Para que las coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) representen un punto único en el espacio, restringimos sus valores a los intervalos

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \phi < \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Eliminando ϕ y θ de las relaciones (2), obtenemos la ecuación (1). Como el radio r de una esfera dada es una constante fija, vemos que las relaciones (2) son las *ecuaciones paramétricas* de una superficie esférica de centro el origen y radio r, siendo las variables ϕ y θ los parámetros.

Las relaciones (2) pueden emplearse como ecuaciones de transformación entre los sistemas coordenados rectangular y esférico. Si despejamos r, ϕ y θ, obtenemos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = \operatorname{arc} \cos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}, \quad (3)$$

las cuales pueden emplearse también como ecuaciones de transformación entre los dos sistemas.

Los resultados precedentes se resumen en el siguiente

TEOREMA 5. *Las coordenadas rectangulares* (x, y, z) *y las coordenadas esféricas* (r, ϕ, θ) *de un punto en el espacio están ligadas por las relaciones*

$$x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = r \cos \phi.$$

Las transformaciones entre los dos sistemas coordenados pueden efectuarse por medio de estas ecuaciones y de las siguientes relaciones obtenidas de ellas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = arc\ cos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \theta = arc\ tg \frac{y}{x}.$$

Las variaciones para r, ϕ *y* θ *están dadas por los intervalos*

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

EJERCICIOS. Grupo 61

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar el teorema 4 y su corolario dados en el Artículo 131.
2. Hallar la ecuación de la superficie esférica cuyo centro es el punto (3, 2, − 2) y que es tangente al plano $x + 3y - 2z + 1 = 0$.
3. Hallar la ecuación de la superficie esférica cuyo centro está sobre el eje X y que pasa por los dos puntos (3, − 4, 2) y (6, 2, − 1).
4. Hallar el centro y radio de la superficie esférica cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y - 12z + 12 = 0.$$

5. Hallar el área de la superficie esférica cuya ecuacion es

$$9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 36x + 12y - 18z + 13 = 0.$$

6. La ecuación de una superficie esférica es

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0.$$

Hallar la ecuación de la superficie esférica concéntrica con ella que es tangente al plano $2x - 3y + 2z + 4 = 0$.

7. Obtener la ecuación de la superficie esférica que pasa por cuatro puntos dados no coplanares en forma de determinante. (Ver el teorema 3, Art. 41.)
8. Hallar la ecuación de la superficie esférica que pasa por los cuatro puntos (8, 2, 2), (− 4, 3, − 3), (− 1, 2, 5) y (4, 3, − 7).
9. Demostrar que el plano tangente a la superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

en el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ tiene por ecuación $x_1x + y_1y + z_1z = r^2$.

10. Hallar la ecuación de la superficie esférica que pasa por el punto (− 1, 6, − 3) y es tangente al plano $4x + 4y + 7z - 96 = 0$ en el punto (7, 3, 8).
11. La traza de una superficie esférica con el plano XY es la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$, $z = 0$. Hallar la ecuación de la superficie si pasa por el punto (3, 4, 2).

Los ejercicios 12-17 se refieren a las esferas

$$S_i \equiv x^2 + y^2 + z^2 + G_ix + H_iy + I_iz + K_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

12. Demostrar que para todos los valores de k diferentes de -1, la ecuación $S_1 + kS_2 = 0$ representa la *familia de esferas* que pasan por la intersección de las esferas $S_1 = 0$ y $S_2 = 0$, con excepción de la esfera $S_2 = 0$.

13. Si las esferas $S_1 = 0$ y $S_2 = 0$, no son concéntricas, demuéstrese que la ecuación $S_1 + kS_2 = 0$ representa un plano para $k = -1$. Este plano se llama *plano radical* de las dos esferas.

14. Si las esferas $S_1 = 0$ y $S_2 = 0$ son tangentes entre sí, demuéstrese que para todos los valores de k diferentes de -1, la ecuación $S_1 + kS_2 = 0$ representa a todas las esferas que son tangentes a las dos dadas en su punto común, con excepción de la esfera $S_2 = 0$.

15. Demostrar que el plano radical de dos esferas tangentes es su plano tangente común.

16. Si de las tres esferas, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, no hay dos que sean concéntricas, y si no tienen una línea de centros común, demuéstrese que sus tres planos radicales se cortan en una recta común. Esta recta se llama *eje radical* de las tres esferas.

17. Si los centros de cuatro esferas no son coplanares, y si de las cuatro esferas no hay dos que sean concéntricas, demuéstrese que sus planos radicales se cortan en un punto común. Este punto se llama *centro radical* de las esferas.

18. Hallar la ecuación del plano radical de las dos esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 10 = 0$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 2y + 4z + 12 = 0.$$

19. Hallar las ecuaciones del eje radical de las tres esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 6z + 25 = 0,$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y + 6z + 18 = 0.$$

20. Hallar las coordenadas del centro radical de las cuatro esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 13 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y - 4z + 11 = 0$$

y

$$x^2 + u^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z + 25 = 0.$$

21. Hallar la ecuación de la superficie esférica que pasa por la circunferencia de intersección de las dos superficies esféricas

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 10 = 0,$$

y que también pasa por el punto $(-2, 4, 0)$.

22. Hallar la ecuación de la superficie esférica que pasa por la circunferencia de intersección de las superficies esféricas

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 6z + 12 = 0$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z - 12 = 0,$$

y es tangente al plano $x + 2y - 2z = 3$. (Dos soluciones.)

23. Eliminando los parámetros θ y ϕ, demostrar que

$$x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = r \cos \phi$$

son las ecuaciones paramétricas de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

24. Obtener las relaciones (3) a partir de las relaciones (2) del Artículo 132.

25. Trazar los dos puntos cuyas coordenadas esféricas son (1, 60°, 30°) y (2, 45°, 120°). Hallar las coordenadas rectangulares de cada uno de estos puntos.

26. Hallar las coordenadas esféricas de cada uno de los puntos cuyas coordenadas rectangulares son (3, − 4, 0) y (6, 3, 2).

27. La ecuación rectangular de una superficie esférica es

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4y.$$

Hallar su ecuación en coordenadas esféricas.

28. Transformar las siguientes ecuaciones rectangulares de superficies a coordenadas esféricas: *a*) $x + 4y = 0$; *b*) $y - 2 = 0$; *c*) $x^2 + y^2 = 4$; *d*) $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$; *e*) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

29. Hallar e identificar la ecuación rectangular de la superficie cuya ecuación en coordenadas esféricas es: *a*) $r = 3$; *b*) $\theta = \frac{\pi}{4}$; *c*) $r - 2 \cos \phi = 0$.

30. Transformar las siguientes ecuaciones de coordenadas esféricas a rectangulares: *a*) $r = 4$; *b*) $r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 7$; *c*) $r = 3 \cos \phi$.

133. Ecuación de una superficie cilíndrica. Se llama *superficie cilíndrica* a la generada por una recta que se mueve de tal manera que

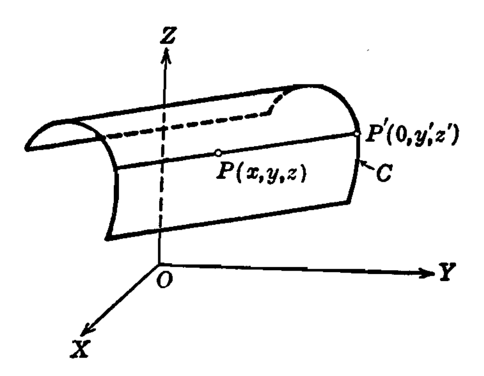


Fig. 177

que se mantiene siempre paralela a una recta fija dada y pasa siempre por una curva fija dada.

La recta móvil se llama *generatriz* y la curva fija *directriz* de la superficie cilíndrica.

En nuestro estudio de la superficie cilíndrica consideraremos que la directriz es una curva contenida en uno de los planos coordenados. Por ejemplo, sea C (fig. 177) una porción de la directriz contenida en el plano YZ, y sean $[a, b, c]$ los números directores de la generatriz de la superficie cilíndrica. Podemos escribir entonces las ecuaciones de la curva C en la forma

$$f(y, z) = 0, \quad x = 0. \qquad (1)$$

Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera de la superficie, y supongamos que la generatriz que pasa por P corta a C en el punto $P'(0, y', z')$. Entonces, las ecuaciones de esta generatriz son

$$\frac{x}{a} = \frac{y - y'}{b} = \frac{z - z'}{c}. \qquad (2)$$

Además, como P' está sobre C, sus coordenadas satisfacen a las ecuaciones (1), y tenemos

$$f(y', z') = 0, \quad x' = 0. \qquad (3)$$

Por la definición de superficie cilíndrica, el punto P puede estar sobre la superficie si y solamente si sus coordenadas (x, y, z) satisfacen a las ecuaciones (2) y (3) las cuales constituyen un sistema de cuatro ecuaciones independientes. De estas cuatro ecuaciones podemos eliminar las tres cantidades x', y' y z' considerándolas como parámetros (véase el Artículo 95). El resultado es una sola ecuación en las tres variables x, y y z, y ésta es la ecuación buscada de la superficie cilíndrica.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz es la parábola

$$x^2 = 4y, \quad z = 0 \qquad (4)$$

contenida en el plano XY, y cuyas generatrices tienen por números directores [1, 1, 3].

Solución. Supongamos que la generatriz que pasa por un punto cualquiera $P(x, y, z)$ (fig. 178) de la superficie corta a la directriz en el punto $P'(x', y', 0)$. Entonces, las ecuaciones de esta generatriz son

$$\frac{x - x'}{1} = \frac{y - y'}{1} = \frac{z}{3}. \qquad (5)$$

También, como P' está sobre la parábola (4), tenemos

$$x'^2 = 4y', \quad z' = 0. \qquad (6)$$

Fig. 178

Eliminando x', y', z' de las ecuaciones (5) y (6) por sustitución de los valores de x' y y' dados por las ecuaciones (5) en la primera de las ecuaciones (6), obtenemos

$$9x^2 + z^2 - 6xz - 36y + 12z = 0, \qquad (7)$$

que es la ecuación buscada de la superficie. El estudiante debe observar que la traza de la superficie (7) sobre el plano XY es la directriz (4).

Acabamos de considerar la determinación de la ecuación de una superficie cilíndrica a partir de las ecuaciones de su directriz y de los números directores de sus generatrices. Para el problema inverso, a saber, encontrar las ecuaciones de la directriz y los números directores de las generatrices de una superficie cilíndrica, a partir de su ecuación, podemos proceder como se ilustra en el siguiente ejemplo. Más adelante (Art. 137, ejemplo 3), consideraremos otro método que es aplicable en algunos casos.

Ejemplo 2. Demostrar que la ecuación

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1 \tag{8}$$

representa una superficie cilíndrica, y hallar las ecuaciones de su directriz y los números directores de sus generatrices.

Solución. De la definición de superficie cilíndrica se deduce que las secciones hechas por planos paralelos al plano de la directriz son curvas congruentes con la directriz. Así, las secciones de la superficie (8) hechas por los planos $z = k$ son las curvas

$$x^2 + y^2 + 2k^2 + 2kx - 2ky = 1, \quad z = k,$$

las cuales pueden escribirse en la forma

$$(x + k)^2 + (y - k)^2 = 1, \quad z = k. \tag{9}$$

Las ecuaciones (9) son todas circunferencias de radio 1, cualquiera que sea el valor de k. En particular, para $k = 0$, tenemos la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0. \tag{10}$$

Por tanto, la superficie (8) es una superficie cilíndrica circular cuya directriz es la circunferencia (10).

Evidentemente, la recta que une el centro $(-k, k, k)$ de cualquiera de las circunferencias (9) y el centro $(0, 0, 0)$ de la directriz (10) es paralela a las generatrices. Como los números directores de esta recta son $[-1, 1, 1]$, éstos son también los números directores de las generatrices.

El estudiante debe construir la superficie (8).

Si las generatrices de una superficie cilíndrica son perpendiculares al plano de su directriz, se llama *recta* y, en caso contrario, *oblicua*. Las superficies cilíndricas rectas son de gran importancia, como veremos más adelante en el Capítulo XVII. Por el método empleado en el ejemplo 1, podemos fácilmente demostrar que la ecuación de una superficie cilíndrica recta, cuyas generatrices son perpendiculares al plano coordenado de su directriz, carece de la variable no medida en ese plano coordenado. Además, el *lugar geométrico plano* de esta ecuación es la directriz. Por ejemplo, la superficie cilíndrica recta cuya directriz es la circunferencia $y^2 + z^2 = 9$, $x = 0$, se representa por la ecuación $y^2 + z^2 = 9$.

Recíprocamente, por el método del ejemplo 2, acabado de explicar, podemos demostrar que una ecuación que carezca de una variable representa una superficie cilíndrica recta cuyas generatrices son perpendiculares al plano coordenado en el cual no se mide la variable ausente, y cuya directriz es el lugar geométrico plano de esta ecuación. Por ejemplo, la ecuación $x^2 - y^2 = 4$ representa una superficie cilíndrica recta cuyas generatrices son perpendiculares al plano XY y cuya directriz es la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$, $z = 0$.

Vamos a resumir estos resultados en el siguiente

TEOREMA 6. *Una ecuación representa una superficie cilíndrica recta, cuyas generatrices son perpendiculares al plano coordenado que contiene a la directriz, si y solamente si carece de la variable no medida en ese plano. El lugar geométrico plano de esta ecuación es la directriz.*

Si la directriz de una superficie cilíndrica es una circunferencia, la superficie se llama *circular*. Análogamente, tenemos superficies cilíndricas parabólicas, elípticas e hiperbólicas. Puede también anotarse que un plano es una superficie cilíndrica cuya directriz es una recta.

134. Coordenadas cilíndricas. En este artículo estudiaremos las coordenadas cilíndricas, que, como las coordenadas esféricas (Artículo 132), son muy útiles en ciertas partes de otras ramas de las Matemáticas.

Sea $P(x, y, z)$ (fig. 179) un punto cualquiera de la superficie de un cilindro circular recto de radio r cuyo eje es el eje Z. La ecuación de la superficie es, evidentemente,

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (1)$$

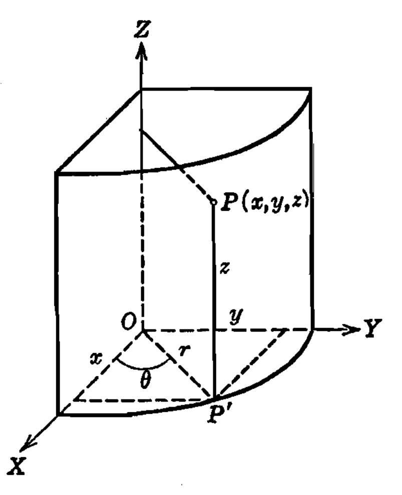


Fig. 179

Una parte de la superficie que queda en el primer octante se ha representado en la figura 179. Por el punto P y el eje Z hagamos pasar un plano que cortará a la superficie en una generatriz cuyo punto de intersección con el plano XY será el punto P'. Sea $|\overline{OP'}| = r$, y designemos por θ el ángulo formado por OP' y la parte positiva del eje X. Entonces tenemos las relaciones

$$x = r \operatorname{sen} \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z, \qquad (2)$$

las cuales, evidentemente, permiten localizar cualquier punto de la superficie cilíndrica (1) cuando se conocen los valores de r, θ y z. Por esto, estas cantidades se llaman *coordenadas cilíndricas* del punto P y se escriben (r, θ, z). De una manera más general, si un punto fijo (el origen O), una recta fija (el eje X) y un plano dado (el plano XY) son tomados como elementos de referencia, entonces, con las coordenadas cilíndricas (r, θ, z), se puede localizar cualquier punto en el espacio. Tenemos así el *sistema de coordenadas cilíndricas*.

El ángulo θ puede medirse, como en Trigonometría, con la parte positiva del eje X como lado inicial. Para que las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) representen un punto único en el espacio, restringimos los valores de r y θ a los intervalos

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

La coordenada z no se sujeta a ninguna restricción, sino que puede tomar cualquier valor real.

Eliminando θ y z de las relaciones (2), obtenemos la ecuación (1). Por tanto, las ecuaciones (2) son las *ecuaciones paramétricas* de la superficie cilíndrica circular recta (1), siendo las variables θ y z los parámetros.

Las relaciones (2) pueden emplearse como ecuaciones de transformación entre los sistemas de coordenadas rectangulares y cilíndricas. De las dos primeras de estas relaciones obtenemos, como en el sistema de coordenadas polares de la Geometría analítica plana (Art. 81), las relaciones

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}, \quad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

las cuales pueden emplearse como ecuaciones de transformación entre los dos sistemas.

Vamos a hacer un resumen de los resultados anteriores en el siguiente

TEOREMA 7. *Las coordenadas rectangulares* (x, y, z) *y las coordenadas cilíndricas* (r, θ, z) *de un punto en el espacio están ligadas por las relaciones*

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta, \quad z = z.$$

Se pueden efectuar las transformaciones entre los dos sistemas coordenados por medio de estas ecuaciones y de las siguientes relaciones obtenidas de ellas.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = arc\ tg\ \frac{y}{x}, \quad sen\ \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$cos\ \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Las variaciones para r *y* θ *están dadas por los intervalos*

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

NOTA. El sistema de coordenadas cilíndricas es, evidentemente, una extensión al espacio del sistema de coordenadas polares del plano.

EJERCICIOS. Grupo 62

1. Demostrar el teorema 6 del Artículo 133.

En cada uno de los ejercicios 2-9 discutir y trazar la superficie cilíndrica recta cuya ecuación se da.

2. $y^2 + z^2 = 4$.
3. $x^2 - 4z = 0$.
4. $9x^2 + 4y^2 = 36$.
5. $9y^2 - 4z^2 = 36$.
6. $y^2 + z = 2$.
7. $x^2 + y^2 - 2y = 0$.
8. $x^{1/2} + z^{1/2} = 2$.
9. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

En cada uno de los ejercicios 10-14, se dan las ecuaciones de la directriz y los números directores de las generatrices de una superficie cilíndrica. Hallar la ecuación de la superficie y efectuar su representación gráfica.

10. $y^2 = 4x, \quad z = 0; \quad [1, -1, 1]$.
11. $x^2 + z^2 = 1, \quad y = 0; \quad [2, 1, -1]$.
12. $x^2 - y^2 = 1, \quad z = 0; \quad [0, 2, -1]$.
13. $x^2 + y = 1, \quad z = 0; \quad [2, 0, 1]$.
14. $4x^2 + z^2 + 4z = 0, \quad y = 0; \quad [4, 1, 0]$.

En cada uno de los ejercicios 15-17, demuéstrese que la ecuación dada representa una superficie cilíndrica, y hállense las ecuaciones de su directriz y los números directores de sus generatrices. Constrúyase la superficie.

15. $x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xz + 4yz - 4 = 0$.
16. $17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0$.
17. $xz + 2yz - 1 = 0$.

18. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del plano XY es siempre igual a la mitad del cuadrado de su distancia del eje Y. Construir la superficie.

19. Un punto se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual a su distancia del plano $x - z = 1$. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.

20. Trazar los dos puntos cuyas coordenadas cilíndricas son $(1, 45°, -2)$ y $(2, 120°, 4)$. Hallar las coordenadas rectangulares de cada uno de estos puntos.

21. Hallar las coordenadas cilíndricas de cada uno de los puntos cuyas coordenadas rectangulares son $(3, 4, -7)$ y $(5, -12, 8)$.

22. Transformar las siguientes ecuaciones rectangulares de superficies a coordenadas cilíndricas: *a*) $2x = y$; *b*) $x^2+y^2-2y=0$; *c*) $x^2+y^2+z^2=4$; *d*) $x^2 - z^2 = 4$; *e*) $y^2 = 4z$.

23. Transformar las siguientes ecuaciones de superficies de coordenadas cilíndricas a rectangulares: *a*) $r = 2$; *b*) $r = z$; *c*) $r = 4 \cos \theta$; *d*) $r(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) - z = 4$; *e*) $r^2 \operatorname{sen}^2 \theta = 4(1 - z^2)$.

24. Sean $r = k_1$, $\theta = k_2$, $z = k_3$, en donde k_1, k_2 y k_3 son constantes arbitrarias independientes o parámetros, las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de un punto cualquiera del espacio. Identificar la familia de superficies representadas por cada una de estas tres ecuaciones. Demostrar que por cada punto del espacio no contenido en el eje Z pasa una y solamente una superficie de cada una de estas familias.

En cada uno de los ejercicios 25-30, demuéstrese que la ecuación dada en coordenadas cilíndricas representa una superficie cilíndrica, y constrúyase dicha superficie.

25. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$.

26. $2r + r \cos \theta = 1$.

27. $r - 2r \cos \theta = 1$.

28. $r - r \operatorname{sen} \theta = 2$.

29. $r = 2(1 + \cos \theta)$.

30. $r^2 = 2 \cos 2\theta$.

135. Ecuación de una superficie cónica. Se llama *superficie cónica* la engendrada por una línea recta que se mueve de tal manera que pasa siempre por una curva fija y por un punto fijo, no contenido en el plano de esa curva.

La recta móvil se llama *generatriz*, la curva fija dada *directriz* y el punto fijo dado *vértice* de la superficie cónica. Las diversas posiciones de la generatriz forman las generatrices de la superficie cónica. Evidentemente, el vértice divide a la superficie en dos porciones distintas; cada una de las cuales es una *hoja* o *rama* de la superficie cónica.

Si se conocen las ecuaciones de la directriz y las coordenadas del vértice, se puede obtener la ecuación de la superficie, como para la superficie cilíndrica (Art. 133), por el método de los parámetros.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la superficie cónica cuya directriz es la elipse

$$4x^2 + z^2 = 1, \quad y = 4, \tag{1}$$

y cuyo vértice es el punto $V(1, 1, 3)$.

Solución. Supongamos que la generatriz que pasa por un punto cualquiera $P(x, y, z)$ de la superficie corta a la directriz en el punto $P'(x', y', z')$, tal como aparece en la figura 180. Las ecuaciones de esta generatriz son

$$\frac{x-1}{x'-1} = \frac{y-1}{y'-1} = \frac{z-3}{z'-3}. \tag{2}$$

Además, como P' está sobre la elipse (1), tenemos

$$4x'^2 + z'^2 = 1, \quad y' = 4. \qquad (3)$$

De las cuatro relaciones dadas por las ecuaciones (2) y (3), podemos eliminar las tres cantidades x', y' y z', considerándolas como parámetros. Esta eliminación puede efectuarse convenientemente sustituyendo primero el valor $y' = 4$ de las ecuaciones (3) en las ecuaciones (2). Después, de estas últimas ecuacio-

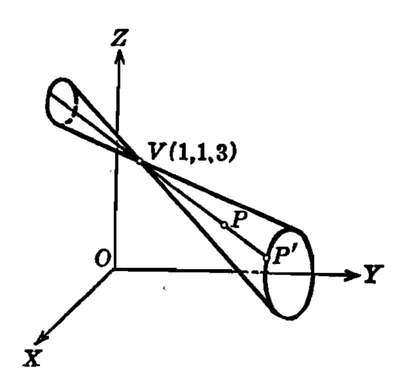


Fig. 180

nes se despeja x' en función de x y y, y z' en función de y y z, y se sustituyen los resultados en la primera de las ecuaciones (3). Después de ordenar los términos, resulta

$$36x^2 + 12y^2 + 9z^2 + 24xy + 18yz - 96x - 102y - 72z + 207 = 0,$$

que es la ecuación buscada de la superficie.

El estudiante debe observar que una superficie cónica puede construirse trazando las generatrices, o sea, las rectas que unen el vértice con puntos de la directriz.

En el estudio de una superficie cónica, no se pierde generalidad tomando el vértice en el origen. Vamos a demostrar ahora que la ecuación de una superficie tal es homogénea en las tres variables x, y y z.

Se dice que un polinomio algebraico, en dos o más variables, es *homogéneo*, si todos sus términos son del mismo grado. Así, la función

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + 2y^2 - 3z^2 \qquad (4)$$

es homogénea y de segundo grado.

Hay una *prueba sencilla para averiguar la homogeneidad de una función*. Si la función es $f(x, y, z)$, consiste en sustituir las variables x, y y z por kx, ky y kz, respectivamente, en donde k es una constante diferente de cero. Si obtenemos la identidad

$$f(kx, ky, kz) \equiv k^m f(x, y, z),$$

entonces $f(x, y, z)$ es una función homogénea de grado m. Así, para la función (4), tenemos

$$f(kx, ky, kz) \equiv (kx)^2 + 2(ky)^2 - 3(kz)^2$$
$$\equiv k^2(x^2 + 2y^2 + 3z^2) \equiv k^2 f(x, y, z),$$

de manera que la función es homogénea y de grado 2. Esta prueba se presenta en algunos libros como *definición* de la homogeneidad de una función.

A una función homogénea igualada a cero se le llama *ecuación homogénea*. Sea $f(x, y, z) = 0$ una ecuación homogénea. Entonces, de la discusión precedente, tenemos el hecho importante de que, si esta ecuación tiene la solución diferente de cero $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, también tiene las soluciones $x = kx_1$, $y = ky_1$, $z = kz_1$, en donde k es una constante cualquiera.

Consideremos ahora una superficie cónica de vértice en el origen y cuya directriz sea la curva

$$f(x, y) = 0, \quad z = c, \tag{5}$$

en donde c es una constante diferente de cero. Supongamos que la generatriz que pasa por un punto cualquiera $P(x, y, z)$ de la superficie corta a la directriz en el punto $P'(x', y', z')$. Como esta generatriz pasa por el origen, sus ecuaciones son

$$x' = kx, \quad y' = ky, \quad z' = kz, \tag{6}$$

en donde k es una constante diferente de cero. También, como P' está sobre la directriz (5), tenemos

$$f(x', y') = 0, \quad z' = c. \tag{7}$$

De las últimas igualdades de las ecuaciones (6) y (7), se deduce que $k = \frac{c}{z}$, valor que sustituído en las dos primeras de las ecuaciones (6), da $x' = \frac{cx}{z}$ y $y' = \frac{cy}{z}$. Si sustituímos estos valores de x' y y' en la primera de las ecuaciones (7), obtenemos

$$f\left(\frac{cx}{z}, \frac{cy}{z}\right) = 0, \tag{8}$$

como ecuación de la superficie cónica. Si reemplazamos en la ecuación (8) x, y y z por $k'x$, $k'y$ y $k'z$, respectivamente, en que k' es una constante diferente de cero, la ecuación permanece invariable y, por tanto, es homogénea. Hemos demostrado así que una superficie

cónica de vértice en el origen se representa por una ecuación homogénea en las tres variables x, y y z.

Recíprocamente, consideremos a la superficie representada por la ecuación

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (9)$$

que es homogénea en las tres variables x, y y z. En consecuencia de esto, el origen O está sobre esta superficie. Sea $P(x_1, y_1, z_1)$ otro punto cualquiera de la superficie; sus coordenadas satisfacen, por tanto, a la ecuación (9). Como esta ecuación es homogénea, tiene también la solución kx_1, ky_1, kz_1, en donde k es una constante cualquiera, de manera que el punto $P'(kx_1, ky_1, kz_1)$ está también sobre la superficie. Pero, evidentemente, el punto P' está sobre ambas, la recta OP y la superficie, para todos los valores de k, y, en consecuencia, OP está sobre la superficie. De acuerdo con esto, se sigue que la ecuación (9) representa una superficie cónica con vértice en el origen y una de cuyas generatrices es la recta OP.

Vamos a hacer un resumen de los resultados precedentes en el siguiente

TEOREMA 8. *Una ecuación representa una superficie cónica con vértice en el origen, si y solamente si es homogénea en las tres variables* x, y, z *y es de grado no menor que dos.*

NOTAS. 1. El teorema implica que una ecuación *lineal* homogénea en x, y y z no representa un cono, y recíprocamente. Ya vimos que tal ecuación representa un plano que pasa por el origen. Pero un plano no puede clasificarse como un cono de acuerdo con nuestra definición, que excluye el caso en que el vértice esté en el plano de la directriz.

2. El estudiante debe observar, en relación al teorema 8, que una ecuación homogénea debe en realidad representar una superficie, antes de que pueda clasificarse como una superficie cónica con vértice en el origen. Así, la ecuación $x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 0$ es homogénea en x, y y z, pero no representa una superficie cónica sino que representa solamente un punto, el origen (ver el Art. 128).

Ejemplo 2. Identificar y construir la superficie cuya ecuación es

$$x^2 + yz = 0. \qquad (10)$$

Solución. Además de la solución $x = y = z = 0$, la ecuación (10) tiene un número infinito de soluciones reales. En efecto, si asignamos a y y z un par cualquiera de valores reales diferentes de cero que sean de signos contrarios, la solución correspondiente para x constará de dos valores reales. Por tanto, por el teorema 8 anterior, la ecuación (10) representa una superficie cónica cuyo vértice está en el origen.

Para construir la superfie es necesario solamente obtener una directriz. Así, para $z = 2$, obtenemos de la ecuación (10) la directriz

$$x^2 = -2y, \quad z = 2,$$

que es una parábola que está en el plano $z = 2$. Trazando varias generatrices (rectas que pasan por el origen y por puntos de esta curva) podemos obtener una figura adecuada. Una porción de la superficie se ha trazado en la figura 181 junto con otra directriz, $x^2 = 2y$, $z = -2$. Evidentemente, el eje Z es también una generatriz de esta superficie cónica.

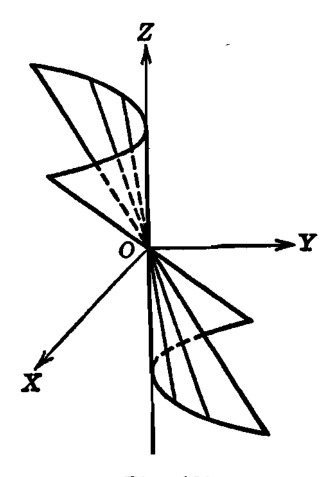


Fig. 181

EJERCICIOS. Grupo 63

En cada uno de los ejercicios 1-5, se dan las ecuaciones de la directriz y las coordenadas del vértice de una superficie cónica. Hallar la ecuación de la superficie y construirla.

1. $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$; $(0, 0, 0)$.
2. $z^2 = 4y$, $x = 0$; $(2, 0, 0)$.
3. $y^2 + z^2 = 9$, $x = 2$; $(-1, 1, 0)$.
4. $x^2 - 4z^2 = 4$, $y = 3$; $(-1, 1, 1)$.
5. $y = x^3$, $z = 2$; $(0, 0, 0)$.

En cada uno de los ejercicios 6-13, identifíquese y constrúyase la superficie cuya ecuación se da.

6. $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$.
7. $x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 0$.
8. $2x^2 - 4y^2 - z^2 = 0$.
9. $y^2 + xz = 0$.
10. $x^2 - 2yz = 0$.
11. $4z^3 - x^2y = 0$.
12. $8x^4 - yz^3 = 0$.
13. $xy + xz + yz = 0$.

14. Demostrar el siguiente teorema: La ecuación $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$ representa una superficie cónica si y solamente si todos sus coeficientes son diferentes de cero y no son del mismo signo. Su eje está entonces sobre el eje coordenado correspondiente a la variable cuyo coeficiente es de signo contrario al de los otros dos coeficientes.

15. Verificar el teorema del ejercicio 14 para la superficie cónica

$$x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 0.$$

16. Completando los cuadrados, demuéstrese que la ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 4z + 1 = 0$$

representa una superficie cónica cuyo vértice es el punto $(1, 2, -2)$.

17. Si la ecuación de una superficie es homogénea en las cantidades $x - h$, $y - k$ y $z - l$, en donde h, k y l son constantes, demuéstrese que la superficie es un cono con vértice en (h, k, l). (Ver el ejercicio 16.)

18. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se mantiene siempre equidistante del plano XZ y del eje Y. Construir el lugar geométrico.

19. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los planos coordenados es siempre igual a su distancia del origen. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.

20. Calcular el volumen limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 - 4z^2 = 0 \quad \text{y} \quad z = 2.$$

21. Calcular el área de aquella porción de la superficie cónica

$$x^2 - y^2 + z^2 = 0$$

comprendida entre su vértice y el plano $y = 3$.

En cada uno de los ejercicios 22 y 23, transfórmese la ecuación rectangular dada de una superficie cónica en: *a*) coordenadas esféricas; *b*) coordenadas cilíndricas.

22. $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$. 23. $x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$.

24. Describir la familia de superficies cónicas representada por la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \phi = 0$, en donde el parámetro ϕ, llamado *ángulo generador* del cono, puede tomar todos los valores comprendidos en el intervalo $0 < \phi < \pi$ excepto $\frac{\pi}{2}$. ¿Qué representa ϕ geométricamente?

25. Las coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) de un punto cualquiera en el espacio, son

$$r = k_1, \quad \phi = k_2, \quad \theta = k_3,$$

en donde k_1, k_2 y k_3 son constantes arbitrarias independientes o parámetros. Identificar la familia de superficies representada por cada una de estas tres ecuaciones. Demostrar que, por cada punto del espacio no contenido en un eje coordenado, pasa una y solamente una superficie de cada una de estas familias. (Ver el ejercicio 24 del grupo 62, Art. 134.)

136. Superficies de revolución. Una *superficie de revolución* es la engendrada por la rotación de una curva plana en torno de una recta fija contenida en el plano de esa curva.

La curva plana se llama *generatriz*, y la recta fija *eje de revolución* o, simplemente, *eje* de la superficie. Cualquier posición de la

generatriz se llama *sección meridiana* o *meridiano*, y cada circunferencia descrita por un punto de la generatriz se llama *paralelo* de la superficie

De estas definiciones, tenemos de inmediato los siguientes hechos:

a) Toda sección meridiana es congruente con la generatriz y es la intersección de la superficie con un plano que pasa por el eje.

b) Todo paralelo tiene su centro sobre el eje y está contenido en un plano perpendicular al eje.

El estudiante observará que las superficies de los cuerpos estudiados en Geometría elemental —la esfera, el cilindro circular recto y el cono circular recto— son superficies de revolución.

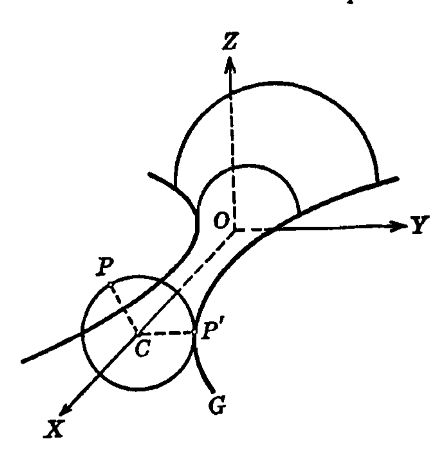


Fig. 182

En la determinación de la ecuación de una superficie de revolución, no se pierde generalidad si se toma la generatriz en uno de los planos coordenados y como eje de revolución uno de los ejes coordenados contenidos en ese plano. Este procedimiento, además, conduce a un resultado muy simple, como veremos ahora. Según esto, supongamos que la generatriz G (fig. 182) contenida en el plano XY tiene por ecuaciones

$$f(x, y) = 0, \quad z = 0, \tag{1}$$

y supongamos que el eje de revolución es el eje X, tal como aparece en la figura. Vamos a determinar la ecuación de esta superficie de revolución por el método de parámetros.

Sea $P(x, y, z)$, un punto cualquiera de la superficie. El paralelo que pasa por P corta a G en un punto del plano XY, digamos $P'(x', y', z')$, y su centro C está sobre el eje X. Por ser radios del mismo paralelo, $|\overline{CP}| = |\overline{CP'}|$. Pero como $|\overline{CP}| = \sqrt{y^2 + z^2}$ y $\overline{CP'} = y'$, tenemos la relación

$$y' = \pm\sqrt{y^2 + z^2}. \tag{2}$$

También, como P y P' están en el mismo plano,

$$x' = x. \tag{3}$$

Además, como el punto P' está sobre G, tenemos, de las ecuaciones (1),

$$f(x', y') = 0, \quad z' = 0. \tag{4}$$

Eliminando los tres parámetros x', y', z' entre las cuatro ecuaciones (2), (3) y (4), obtenemos

$$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0,$$

que es la ecuación buscada de la superficie de revolución.

Análogamente, haciendo girar la curva (1) en torno del eje Y, hallamos que la ecuación de la superficie de revolución correspondiente es

$$f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0.$$

Se obtienen resultados análogos cuando la generatriz está en cada uno de los otros planos coordenados y se le hace girar en torno de un eje coordenado contenido en dicho plano. Todos estos resultados se resumen en el siguiente

TEOREMA 9. *Sea* S *la superficie de revolución que tiene por generatriz a la curva* G *contenida en el plano coordenado* δ *y al eje coordenado* l *contenido en* δ *por eje de revolución. Entonces la ecuación de* S *se obtiene sustituyendo en la ecuación plana de* G *la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las dos variables no medidas a lo largo de* l *en lugar de aquella de estas dos variables que aparece en lo ecuación plana de* G.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la superficie engendrada por la rotación de la hipérbola

$$y^2 - 4x^2 = 4, \quad z = 0 \tag{5}$$

en torno del eje Y.

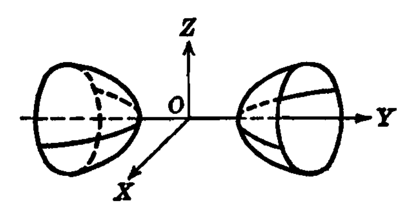


Fig. 183

Solución. Las variables no medidas a lo largo del eje Y son x y z. Por tanto, de acuerdo con el teorema 9, sustituímos $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ en lugar de x en la primera de las ecuaciones (5). El resultado

$$y^2 - 4x^2 - 4z^2 = 4,$$

es la ecuación buscada de la superficie. El estudiante debe discutir esta superficie por el método explicado en el Artículo 129. Una porción de la superficie aparece en la figura 183 y consta de dos *hojas* diferentes. Se le llama con toda propiedad *hiperboloide de revolución de dos hojas.*

Consideremos ahora el problema recíproco, a saber, dada la ecuación de una superficie, determinar si representa una superficie de revolución. Si uno de los ejes coordenados es el eje de revolución, la solución es comparativamente sencilla, porque entonces las secciones de la superficie por planos perpendiculares al eje son todas circunferencias cuyos centros están sobre dicho eje. Se dice entonces que la superficie se *extiende a lo largo del eje*.

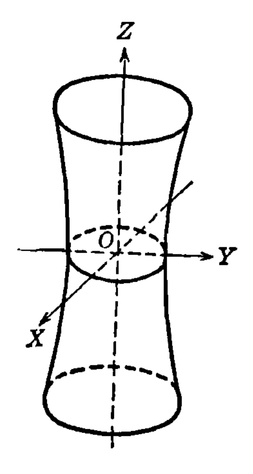


Fig. 184

Ejemplo 2. Demostrar que la ecuación

$$9x^2 + 9y^2 - z^2 = 9 \qquad (6)$$

representa una superficie de revolución. Hallar su eje de revolución y las ecuaciones de la generatriz en uno de los planos coordenados que contenga al eje.

Solución. Evidentemente, los planos $z = k$ cortan a la superficie (6) en las circunferencias

$$9x^2 + 9y^2 = 9 + k^2, \quad z = k,$$

cuyos centros, para todos los valores de k, están sobre el eje Z. Por tanto, la ecuación (6) representa una superficie de revolución cuyo eje de revolución es el eje Z. El eje Z está contenido en el plano YZ, y la traza de la superficie (6) sobre el plano es la generatriz

$$9y^2 - z^2 = 9, \quad x = 0, \qquad (7)$$

Evidentemente, la superficie (6) puede engendrarse haciendo girar la hipérbola (7) en torno del eje Z. Una parte de esta superficie aparece en la figura 184; se le llama apropiadamente *hiperboloide de revolución de una hoja*.

EJERCICIOS. Grupo 64

1. Establecer el teorema 9 del Artículo 136 cuando la generatriz está en el plano XZ y el eje de revolución es: *a*) el eje X; *b*) el eje Z.

2. Establecer el teorema 9 del Artículo 136, cuando la generatriz está en el plano YZ y el eje de revolución es: *a*) el eje Y; *b*) el eje Z.

3. Deducir la ecuación de la superficie esférica de radio r que se obtiene haciendo girar la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$, en torno del eje X.

4. Deducir la ecuación de la superficie del cilindro circular recto de radio r que se obtiene haciendo girar la recta $x = 0$, $y = r$, en torno del eje Z.

5. Deducir la ecuación de la superficie del cono circular recto que se obtiene haciendo girar la recta l en torno del eje Z, sabiendo que l está contenida en el plano YZ, pasa por el origen y forma un ángulo agudo ϕ con la parte positiva del eje Z. El ángulo ϕ se llama *ángulo generador* del cono. (Véase el ejercicio 24 del grupo 63, Art. 135.)

6. Deducir la ecuación de la superficie de revolución engendrada por rotación de la parábola $y^2 = 4px$, $z = 0$, en torno de su eje, el eje X. Construir la superficie así obtenida, la cual se llama *paraboloide de revolución*.

7. Hallar la ecuación de la superficie de revolución engendrada por rotación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, en donde $a > b$, en torno de su eje focal, el eje X. Construir la superficie. La superficie generada por rotación de una elipse en torno de uno cualquiera de sus ejes se llama *elipsoide de revolución*. Si es en torno del eje focal, se le llama también *elipsoide alargado*.

8. Deducir la ecuación de la superficie de revolución generada por rotación de la elipse del ejercicio 7 en torno de su eje normal, el eje Y. Construir la superficie. En este caso, el elipsoide de revolución también se llama *elipsoide achatado* o *esferoide*.

En cada uno de los ejercicios 9-20, hállese la ecuación de la superficie de revolución generada por rotación de la curva dada en torno del eje especificado. Constrúyase la superficie.

9. $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$; eje Z.
10. $y = 3x$, $z = 0$; eje X.
11. $z^2 = 2y$, $x = 0$; eje Y.
12. $y^2 - z^2 = 4$, $x = 0$; eje Y.
13. $9x^2 + 4y^2 = 36$, $z = 0$; eje Y.
14. $x^2 + 2y = 6$, $z = 0$; eje Y.
15. $y^2 - 2z^2 + 4z = 6$, $x = 0$; eje Z.
16. $\frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$, $x = 0$; eje Z.
17. $y^2 = 2z$, $x = 0$; eje Y.
18. $y = x^3$, $z = 0$; eje X.
19. $z = e^x$, $y = 0$; eje Z.
20. $yz = 1$, $x = 0$; eje Z.

En cada uno de los ejercicios 21-26. demostrar que la ecuación dada representa una superficie de revolución, y hallar su eje de revolución, y las ecuaciones de la generatriz en uno de los planos coordenados que contenga al eje. Trazar la superficie.

21. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
22. $x^2 + z^2 = 4$.
23. $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$.
24. $x^2 + y^2 - z^3 = 0$.
25. $y^6 - x^2 - z^2 = 0$.
26. $x^2 y^2 + x^2 z^2 = 1$.

27. Se hace girar la parábola $y^2 = 2z$, $x = 0$ en torno del eje Z. Hallar, en coordenadas esféricas, la ecuación de la superficie generada. Construir la superficie.

28. Se hace girar la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$, $z = 0$, en torno del eje X. Hallar, en coordenadas cilíndricas, la ecuación de la superficie generada. Construir la superficie.

29. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos $(2, 0, 0)$ y $(-2, 0, 0)$ es siempre igual a 6. Construir el lugar geométrico.

30. Deducir la ecuación de la superficie de revolución generada por rotación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2by + b^2 - a^2 = 0$, $z = 0$, en torno del eje X. Construir la superficie para $a = 2$ y $b = 3$. Cuando $b > a$, la superficie se llama *toro* o *anillo de ancla*.

137. Superficies regladas. Vamos a considerar ahora un tipo más general de superficies del cual son ejemplo el plano, la superficie cilíndrica y la cónica.

DEFINICIÓN. Una *superficie reglada* es aquella que puede ser engendrada por el movimiento de una línea recta.

La línea recta en movimiento, en cualquiera de sus posiciones, se llama *generatriz* de la superficie.

Se sigue de esta definición que una superficie cilíndrica es una superficie reglada cuyas generatrices son todas paralelas, mientras que la superficie cónica es una superficie reglada cuyas generatrices son todas concurrentes.

Como en el caso de la superficie cilíndrica (Art. 133) y cónica (Art. 135), las ecuaciones de las superficies regladas pueden obtenerse por el método del parámetro.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la superficie reglada generada por la familia de rectas

$$2x - y + kz = 0, \quad 2kx + ky - 4z = 0. \qquad (1)$$

Solución. Para cada valor del parámetro k, la recta correspondiente de la familia (1) debe estar en su totalidad sobre la superficie. Es decir, todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen las ecuaciones (1) deben estar sobre la superficie, cualquiera que sea el valor de k. Por tanto, las ecuaciones de la superficie deben ser independientes de k y pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (1) simplemente eliminando el parámetro k. Así, despejando k de cada una de estas ecuaciones, obtenemos

$$k = \frac{y - 2x}{z}, \quad k = \frac{4z}{2x + y},$$

de donde,

$$\frac{y - 2x}{z} = \frac{4z}{2x + y},$$

o sea,

$$4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0,$$

que es la ecuación buscada. Esta superficie reglada es, evidentemente, la superficie de un cono circular recto cuyo vértice está en el origen y cuyo eje se extiende a lo largo del eje Y.

Si no se dan las ecuaciones de las generatrices de una superficie reglada como en el ejemplo anterior, pueden obtenerse a partir de la forma en que se engendra la superficie. La ecuación de la superficie

puede determinarse entonces por el método de parámetros como se ilustró anteriormente para las superficies cilíndrica y cónica.

Consideremos ahora el problema recíproco, a saber, dada la ecuación de una superficie, determinar si representa o no una superficie reglada. Ilustraremos el método con un ejemplo.

Ejemplo 2. Demostrar que la ecuación

$$yz + 2x - 2z = 0 \tag{2}$$

representa una superficie reglada. Construir la superficie.

Solución. Si en la ecuación (2) hacemos $z = k$, hallamos que la intersección de la superficie y el plano es la línea recta

$$2x + ky - 2k = 0, \quad z = k. \tag{3}$$

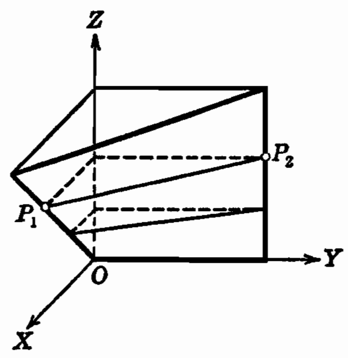


Fig. 185

Como las rectas de la familia (3) están sobre la superficie (2) para todos los valores de k, esta superficie es reglada y tiene a las rectas (3) por generatrices.

Antes de intentar la construcción de una superficie reglada es mejor, generalmente, determinar las direcciones de sus generatrices. Por el artificio de los números directores, se encuentra que los números directores de las generatrices (3) son $[k, -2, 0]$. Esto muestra que todas las generatrices son paralelas al plano XY pero no son paralelas entre sí, ya que los números directores dependen del parámetro k. Estos hechos sugieren un método de construir la superficie (2). Primero hallamos las trazas de la superficie sobre el plano XZ y sobre el YZ. Estas son, respectivamente,

$$x = z, \quad y = 0, \tag{4}$$

$$y = 2, \quad x = 0, \quad \text{y} \quad z = 0, \quad x = 0. \tag{5}$$

Para un valor común de z, sea P_1 el punto sobre la traza (4) y P_2 el punto sobre la traza (5). Entonces, evidentemente, la recta que pasa por P_1 y P_2 es una generatriz de la superficie (2). En la figura 185 aparecen trazadas varias de estas generatrices, y muestra una parte de la superficie comprendida en el primer octante. Esta superficie se llama *paraboloide hiperbólico*.

El procedimiento empleado en el ejemplo 2 sugiere otro método para determinar cuándo una ecuación dada representa una superficie cilíndrica. Vamos a ilustrar esto por medio de un ejemplo.

Ejemplo 3. Demostrar que la ecuación

$$xz + 2yz - 1 = 0 \tag{6}$$

representa una superficie cilíndrica, demostrando que su lugar geométrico es una superficie reglada cuyas generatrices son todas paralelas.

Solución. La intersección de la superficie (6) y el plano $z = k$ es la recta

$$kx + 2ky - 1 = 0, \quad z = k. \qquad (7)$$

Por tanto, la superficie (6) es una superficie reglada que tiene a la familia de rectas (7) por generatrices.

Los números directores de las generatrices (7) son $[2, -1, 0]$. Como estos números directores son independientes del parámetro k, todas las generatrices (7) son paralelas, y, por tanto, la superficie (6) es cilíndrica. El estudiante debe construir la superficie.

EJERCICIOS. Grupo 65

En cada uno de los ejercicios 1-6, hallar la ecuación de la superficie reglada generada por la familia de rectas dada, y construir la superficie.

1. $kx + 2ky - 4 = 0, \quad x - 2y - k = 0.$
2. $x - ky - 3z = 0, \quad kx + 3kz + y = 0.$
3. $x + ky - 2z - 2k = 0, \quad kx - y + 2kz = 2.$
4. $x - 3y + 3kz = 3k, \quad kx + 3ky - 3z = 3.$
5. $x + 2y - k = 0, \quad kx - 2ky - z = 0.$
6. $x + y - ky = 0, \quad x + kz = 0.$

7. Demostrar que la superficie del ejercicio 4 también es generada por la familia de rectas $kx - 3ky - 3z = 3$, $x + 3y + 3kz = 3k$. Demostrar también que ambas familias de rectas se cortan.

En cada uno de los ejercicios 8-13, demuéstrese que la ecuación dada representa una superficie cilíndrica demostrando que su lugar geométrico es una superficie reglada cuyas generatrices son todas paralelas. Constrúyase la superficie.

8. $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2.$
9. $z^2 - 2x - 2y = 0.$
10. $2x^2 + y - 2z = 0.$
11. $y^2 - x - z - 1 = 0$
12. $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy = 1.$
13. $x^2 + z^2 - 2xz - y + z = 0.$

En cada uno de los ejercicios 14-17, demuéstrese que la ecuación dada representa una superficie cónica demostrando que su lugar geométrico es una superficie reglada cuyas generatrices son todas concurrentes. Constrúyase la superficie.

14. $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0.$
15. $x^2 - 4y^2 + z^2 = 0.$
16. $y^2 - 4xz = 0.$
17. $x^2 + 2yz - 2y = 0.$

En cada uno de los ejercicios 18-21, demuéstrese que la ecuación dada representa una superficie reglada. Constrúyase dicha superficie.

18. $x^2 + y^2 - z^2 = 1.$
19. $x^2 - 4y^2 + z^2 = 4.$
20. $xy - x - y - z + 1 = 0.$
21. $x^2 - y^2 - z = 0.$

22. Hallar la ecuación de la superficie reglada engendrada por una recta que se mueve de tal manera que se mantiene siempre paralela al plano YZ y corta a la

recta $x + z = 1$, $y = 0$, y a la parábola $y^2 = x$, $z = 0$. Construir la superficie.

23. Hallar la ecuación de la superficie reglada generada por una recta que se mueve de tal manera que se mantiene siempre paralela al plano XY y se apoya en las curvas $y^2 = z$, $x = 0$ y $z^3 = x$, $y = 0$. Construir la superficie.

24. Un *conoide* es una superficie reglada engendrada por una recta que se mueve de tal manera que se mantiene siempre paralela a un plano fijo dado, corta a una recta fija dada, y satisface otra condición. En particular, si el plano fijo y la recta fija dados son perpendiculares entre sí, la superficie se llama *conoide recto*. Hallar la ecuación del conoide recto generado por una recta que se mueve paralela al plano XZ y corta a la recta $z = 2$, $x = 0$, y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.

25. Hallar la ecuación del conoide recto engendrado por una recta que se mueve paralela al plano XZ y corta a la recta $x = 3$, $z = 0$, y a la elipse

$$y^2 + 4z^2 = 4, \quad x = 0.$$

138. Transformación de coordenadas rectangulares en el espacio. En el Capítulo V y los capítulos subsiguientes de la Geometría analítica plana, vimos que, por medio de transformación de coordenadas, se puede frecuentemente simplificar la ecuación de un lugar geométrico plano, y estudiar así sus características con más facilidad. De modo análogo, las ecuaciones de los lugares geométricos en el espacio pueden simplificarse por una transformación de coordenadas. Como en Geometría analítica plana consideraremos aquí la transformación de coordenadas en el espacio asociada con una traslación y una rotación de los ejes coordenados.

Por una *traslación de los ejes coordenados rectangulares en el espacio*, entendemos la operación de mover los ejes coordenados a una posición diferente de manera que los nuevos ejes sean paralelos a los ejes originales, respectivamente, y de la misma dirección. Consideremos (fig. 186) una traslación de los ejes coordenados rectangulares tal que el origen $O(0, 0, 0)$ tome la nueva posición $O'(h, k, l)$, y que los ejes X, Y y Z, tomen las nuevas posiciones X', Y' y Z', respectivamente. Designemos por (x, y, z) y (x', y', z'), respectivamente, las coordenadas de un punto cualquiera P del espacio referido a los ejes originales y a los nuevos ejes.

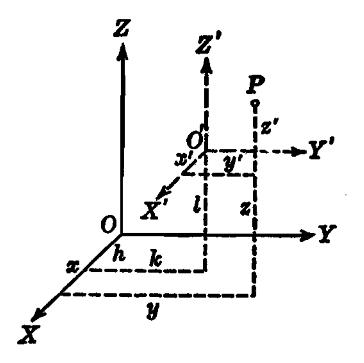


Fig. 186

Entonces, las relaciones entre las coordenadas originales de P y las nuevas coordenadas pueden obtenerse por el mismo método empleado

en la deducción de las relaciones análogas de la Geometría analítica plana (Art. 50, teorema 1). El resultado obtenido se expresa en el siguiente

TEOREMA 10. *Si los ejes rectangulares son trasladados a un nuevo origen* O′(h, k, l), *y si las coordenadas de un punto cualquiera* P *del espacio antes y después de la traslación son* (x, y, z) *y* (x′, y′, z′), *respectivamente, las ecuaciones de trasformación de las coordenadas originales a las nuevas son*

$$x = x' + h, \quad y = y' + k, \quad z = z' + l.$$

Por una *rotación de los ejes coordenados rectangulares en el espacio*, entendemos la operación de mover los ejes coordenados a una nueva posición haciéndolos girar en torno del origen como punto fijo de tal manera que los nuevos ejes permanezcan mutuamente perpendiculares entre sí y análogamente dirigidos uno con respecto al otro. Consideremos (fig. 187) una rotación de los ejes coordenados rectangulares tal que el origen O permanezca fijo, pero los ejes originales X, Y y Z tomen las nuevas posiciones especificadas por los ejes X', Y' y Z', respectivamente. Designemos por (x, y, z) y (x', y', z') las coordenadas de un punto cualquiera P del espacio referido a los ejes originales y a los nuevos ejes, respectivamente. Denotemos por α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2, y α_3, β_3, γ_3, respectivamente, los ángulos directores de los ejes X', Y' y Z', referidos a los ejes originales. Estos ángulos directores aparecen ordenados en la siguiente tabla:

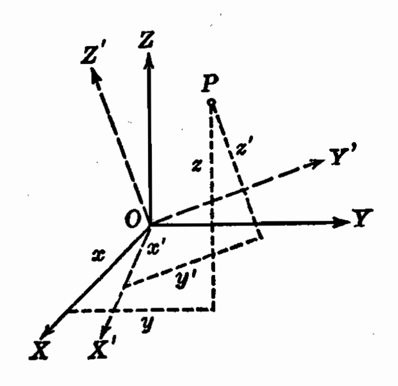


Fig. 187

Eje	X	Y	Z	
X'	α_1	β_1	γ_1	
Y'	α_2	β_2	γ_2	(1)
Z'	α_3	β_3	γ_3	

Leyendo esta tabla en sentido horizontal, obtenemos los ángulos directores de los nuevos ejes con respecto a los ejes originales, y leyendo en sentido vertical, obtenemos los ángulos directores de los ejes originales con respecto a los nuevos ejes.

De la tabla (1), los ángulos directores del eje X, con respecto a los nuevos ejes, son α_1, α_2, α_3. Entonces, como el eje X es normal al plano YZ, se sigue, por el teorema 9 (Art. 119) que la ecuación del plano YZ, con referencia a los nuevos ejes, está dada por

$$x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 = 0.$$

Por el teorema 11 (Art. 120) el primer miembro de esta ecuación representa la distancia del punto P al plano YZ. Pero esta distancia también está dada por la coordenada x. Por tanto, tenemos la relación

$$x = x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3. \qquad (2)$$

Análogamente, podemos obtener expresiones similares para cada una de las coordenadas y y z en función de las nuevas coordenadas. Vamos a agrupar juntas estas relaciones en el sistema

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3, \\ y &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3, \\ z &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Observamos en seguida que en el sistema (3) hay nueve cosenos directores o constantes. Estas constantes no son todas independientes, porque satisfacen las seis relaciones de los sistemas (4) y (5) que damos a continuación. Así, por el teorema 4 (Art. 110), tenemos las tres relaciones:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 &= 1, \\ \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 &= 1, \\ \cos^2 \alpha_3 + \cos^2 \beta_3 + \cos^2 \gamma_3 &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

También, como los nuevos ejes X', Y' y Z' son mutuamente perpendiculares, tenemos, por el corolario 2 del teorema 6 (Art. 112), las tres relaciones:

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 &= 0, \\ \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 &= 0, \\ \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

El sistema (3) expresa cada una de las coordenadas originales de P en función de sus nuevas coordenadas. Podemos, análogamente, obtener expresiones semejantes para las nuevas coordenadas en función de las coordenadas originales. Así, empleando la ecuación del plano $Y'Z'$, con respecto a los ejes originales, podemos, por el

mismo método empleado para deducir la ecuación (2) anterior, obtener la relación

$$x' = x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 .$$

Análogamente, obtenemos relaciones similares para y' y z' las cuales están agrupadas en el sistema

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 , \\ y' &= x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 , \\ z' &= x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3 . \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

El sistema (6) es el *recíproco* del sistema (3) y puede obtenerse también como una solución del sistema (3) para x', y' y z' (ver los ejercicios 23 y 24 del grupo 66 al final de este artículo).

Vamos a resumir los resultados precedentes en el siguiente

TEOREMA 11. *Si se hacen girar los ejes coordenados rectangulares en torno de su origen O como punto fijo de manera que los ángulos directores de los nuevos ejes X′, Y′ y Z′ con respecto a los ejes originales X, Y y Z sean α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2, y α_3, β_3, γ_3, respectivamente, y las coordenadas de un punto cualquiera P del espacio antes y después de la rotación son (x, y, z) y (x′, y′, z′), respectivamente, entonces las ecuaciones de transformación de las coordenadas originales a las nuevas son*

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 , \\ y &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3 , \\ z &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3 , \end{aligned}\right\}$$

y las ecuaciones de la transformación inversa de las coordenadas nuevas a las originales son

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 , \\ y' &= x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 , \\ z' &= x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3 . \end{aligned}\right\}$$

NOTAS. 1. El orden de los términos en el primer sistema de ecuaciones de transformación puede obtenerse leyendo hacia abajo, y para el segundo sistema, leyendo de izquierda a derecha, en la tabla (1).

2. Los ejes coordenados en el espacio pueden sujetarse a una traslación y una rotación, tomadas en cualquier orden. Como las ecuaciones de transformación para la traslación y para la rotación de ejes son relaciones lineales, podemos demostrar, como en la transformación de coordenadas en el plano (nota 1 del teorema 3, Art. 52), que *el grado de una ecuación no se altera por transformación de coordenadas en el espacio.*

EJERCICIOS. Grupo 66

1. Demostrar el teorema 10 del Artículo 138.

2. Como resultado de la traslación de los ejes coordenados al nuevo origen $O'(-4, 3, 5)$, las coordenadas de dos puntos son $P_1(6, -3, 2)$ y $P_2(-2, 1, 2)$ referidos a los nuevos ejes. Hallar las coordenadas de estos puntos referidos a los ejes originales. Ilustrar los resultados con una figura.

3. Hallar las nuevas coordenadas de los puntos $P_1(-2, 3, 4)$ y $P_2(1, -4, 5)$ en una traslación en que el nuevo origen es el punto $O'(2, 2, 7)$. Ilustrar los resultados con una figura.

4. Hallar la transformada de la ecuación

$$x^2 + y^2 - 4z^2 - 2x + 4y + 24z = 31$$

de una superficie al trasladar los ejes coordenados al nuevo origen $(1, -2, 3)$. Construir la superficie y trazar ambos sistemas de ejes.

5. Resolver el ejercicio 4 por el método de completar cuadrados.

En cada uno de los ejercicios 6-10, por una traslación de los ejes coordenados, transformar la ecuación dada de una superficie en otra ecuación que carezca de términos de primer grado. Construir la superficie y trazar ambos sistemas de ejes.

6. $2x^2 + 3z^2 + 16x - 6z + 29 = 0.$

7. $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 - 18x + 16y = 11.$

8. $x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6x - 8y + 8z + 9 = 0.$

9. $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y - 6z + 8 = 0.$

10. $y^3 - 3y^2 - z^2 + 3y - 4z = 5.$

11. Deducir las ecuaciones segunda y tercera del sistema (3) del Art. 138.

12. Deducir las tres ecuaciones del sistema (6) del Art. 138.

13. Demostrar que el grado de una ecuación no se altera por transformación de coordenadas en el espacio.

14. Hallar las nuevas coordenadas de un punto $P_1(6, -3, 3)$ cuando los ejes coordenados son girados de tal manera que los cosenos directores de los nuevos ejes con respecto a los ejes originales son

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3};\quad \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3};\quad \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}.$$

Ilústrese con una figura.

15. Si las nuevas coordenadas de un punto P_2 son $(3, 9, -6)$, con referencia a los ejes girados del ejercicio 14, hállense las coordenadas de P_2 con respecto a los ejes originales.

16. Si se hace girar a los ejes X y Y un ángulo agudo θ alrededor del eje Z como recta fija, demuéstrese que el sistema (3) del Artículo 138 toma la forma

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta, \quad y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta, \quad z = z'.$$

(Ver el teorema 2 del Art. 51.)

17. Bajo las condiciones del ejercicio 16, demuéstrese que el sistema (6) del Artículo 138 toma la forma

$$x' = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta, \quad y' = -x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta, \quad z' = z.$$

(Ver el ejercicio 19 del grupo 21, Art. 51.)

18. Hallar la transformada de la ecuación

$$23x^2 - 41y^2 - 31z^2 + 48xy - 72xz - 24yz = 0$$

al hacer girar los ejes coordenados de tal manera que los cosenos directores de los nuevos ejes con respecto a los originales sean

$$\frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{6}{7};\quad -\frac{6}{7},\ -\frac{2}{7},\ \frac{3}{7};\quad \frac{3}{7},\ -\frac{6}{7},\ \frac{2}{7}.$$

Construir la superficie.

19. Hallar la transformada de la ecuación

$$8x^2 + 11y^2 + 8z^2 - 4xy + 8xz + 4yz = 12$$

al hacer girar los ejes coordenados de tal manera que los cosenos directores de los nuevos ejes con respecto a los originales sean

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3};\quad \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3};\quad \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}.$$

Construir la superficie.

Los ejercicios 20-25 se refieren a la tabla (1) y a los sistemas (3), (4) y (6) del Artículo 138.

20. Usando el hecho de que el eje Z' es perpendicular a ambos ejes X' y Y' y seleccionando de la tabla (1) los ángulos directores convenientes, demostrar, por medio del artificio de los números directores (Art. 113), que los cosenos directores del eje Z' están dados por las relaciones

$$\cos\alpha_3 = \cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1,$$
$$\cos\beta_3 = \cos\alpha_2\cos\gamma_1 - \cos\alpha_1\cos\gamma_2,$$
$$\cos\gamma_3 = \cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1.$$

21. Análogamente, como en el ejercicio 20, demostrar que los cosenos directores del eje X' están dados por las relaciones

$$\cos\alpha_1 = \cos\beta_2\cos\gamma_3 - \cos\beta_3\cos\gamma_2,$$
$$\cos\beta_1 = \cos\alpha_3\cos\gamma_2 - \cos\alpha_2\cos\gamma_3,$$
$$\cos\gamma_1 = \cos\alpha_2\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_2.$$

22. Por medio del resultado del ejercicio 20 y la tercera relación del sistema (4), demostrar que el determinante del sistema (3) es igual a la unidad.

23. De los resultados de los ejercicios 21 y 22, demostrar, por medio de la regla de Cramer, que la solución del sistema (3) para x' está dada por la primera relación del sistema (6).

24. Análogamente, como en el ejercicio 23, demostrar que la solución del sistema (3) para y' y z' está dada por las relaciones segunda y tercera, respectivamente, del sistema (6).

25. Análogamente, como en el ejercicio 24, demostrar que la solución del sistema (6) está dada por el sistema (3).

139. Ecuación general de segundo grado con tres variables. De considerable importancia en la Geometría analítica de tres dimensiones es la ecuación general de segundo grado con tres variables,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0, \quad (1)$$

en donde uno, por lo menos, de los seis coeficientes A, B, C, D, E y F es diferente de cero. Una superficie cuya ecuación es de la forma (1), es decir, de segundo grado, se llama, apropiadamente, *superficie cuádrica* o simplemente una *cuádrica*. El estudiante observará que algunas de las superficies previamente estudiadas son superficies cuádricas. Por ejemplo, la superficie esférica es una cuádrica. También, las superficies cilíndrica y cónica cuyas ecuaciones sean de segundo grado, son cuádricas, tenemos así el *cilindro cuádrico* y el *cono cuádrico*. De manera semejante, cualquier superficie reglada representada por una ecuación de segundo grado se llama *cuádrica reglada*.

Vamos ahora a llamar la atención sobre una propiedad importante de las cuádricas. Supongamos que cortamos la cuádrica (1) por un plano cualquiera paralelo al plano XY, es decir, el plano $z = k$, en donde k es una constante real cualquiera. Las ecuaciones de la curva de intersección se obtienen sustituyendo z por k en la ecuación (1); éstas son

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + (Ek + G)x + (Fk + H)y + Ck^2 + Ik + K = 0, \quad z = k.$$

Por nuestro estudio previo de la ecuación plana general de segundo grado con dos variables (Capítulo IX), reconocemos esta curva como una sección cónica, o una forma límite de una sección cónica, contenida en el plano $z = k$. Más generalmente, podemos demostrar que, *si una superficie cuádrica es cortada por un plano cualquiera, la curva de intersección es una sección cónica o una forma límite de una sección cónica*. Vemos ahora que nuestra determinación previa de las secciones cónicas como secciones planas de un cono circular recto, hecha en el Artículo 78, es un caso especial de esta propiedad.

La ecuación general (1) de una cuádrica ocupa entre las superficies, en Geometría analítica del espacio, un lugar análogo al ocupado entre las curvas planas, en Geometría analítica plana, por la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (2)$$

que es la definición analítica de una sección cónica. En el Capítulo IX hicimos un estudio de la ecuación (2) y una clasificación de los lugares

geométricos representados por ella. Se puede hacer un estudio semejante de la ecuación (1) y una clasificación de sus lugares geométricos, pero, evidentemente, para tres variables la discusión es mucho más larga y complicada. Se demuestra en tratados avanzados que mediante una transformación apropiada de coordenadas, se puede transformar la ecuación (1) de manera que tome una de las dos formas tipo:

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R, \tag{I}$$

$$Mx^2 + Ny^2 = Sz. \tag{II}$$

Las superficies del tipo (I) tienen un centro de simetría, el origen, y por esto se llaman *cuádricas con centro*. Las superficies del tipo (II) no tienen centro de simetría y se llaman, por lo tanto, *cuádricas sin centro*.

En la página siguiente se da, en forma de tabla, una clasificación de las superficies representadas por ecuaciones de los tipos (I) y (II). La naturaleza de estas superficies dependerá, naturalmente, de los coeficientes, de los cuales uno o más pueden ser cero. Debe observarse, sin embargo, que el número de tales coeficientes nulos es limitado, porque, como hemos anotado previamente (nota 2 del teorema 11, Art. 138), el grado de una ecuación no se altera por una transformación de coordenadas en el espacio.

Por una simple observación de estas dos tablas vemos que, si uno o más coeficientes son cero, el lugar geométrico, si existe, está entre las superficies que hemos estudiado previamente. Estos lugares geométricos incluyen las superficies del cilindro y cono rectos y a ciertas formas degeneradas que constan de dos planos diferentes, dos planos coincidentes (o un solo plano), dos planos que se cortan, una sola recta (una forma límite de un cilindro), y un punto.

Si ningún coeficiente es cero, las tablas muestran que el lugar geométrico, si existe, es una superficie de la cual no hemos discutido anteriormente ningún detalle. Estas superficies son las tres cuádricas con centro: el elipsoide y los hiperboloides de una y dos hojas, y las dos cuádricas no centrales: los paraboloides elíptico e hiperbólico.

140. Cuádricas con centro. Vamos a considerar ahora las cuádricas con centro, representadas por la ecuación

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R,$$

en donde todos los coeficientes son diferentes de cero. Podemos entonces escribir esta ecuación en la forma

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

Clasificación de las cuádricas

TIPO (I). $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$

COEFICIENTES		LUGAR GEOMETRICO
R*	M, N, P	
>0	Todos positivos	Elipsoide
	Todos negativos	Ningún lugar geométrico
	Dos positivos, uno negativo	Hiperboloide de una hoja
	Uno positivo, dos negativos	Hiperboloide de dos hojas
	Uno cero, dos positivos	Cilindro elíptico (o circular) recto
	Uno cero, dos negativos	Ningún lugar geométrico
	Uno cero, uno positivo, uno negativo	Cilindro hiperbólico recto
	Dos cero, uno positivo	Dos planos paralelos diferentes
	Dos cero, uno negativo	Ningún lugar geométrico
$=0$	Todos del mismo signo	Un solo punto, el origen
	Dos positivos, uno negativo	Cono recto
	Uno cero, dos del mismo signo	Todos los puntos sobre un eje coordenado
	Uno cero, dos de signos contrarios	Dos planos que se cortan
	Dos cero	Un plano coordenado (dos planos coincidentes).

* Cuando $R < 0$, se invierten los signos de los coeficientes M, N y P; los lugares geométricos correspondientes estarán dados entonces como para $R > 0$.

TIPO (II). $Mx^2 + Ny^2 = Sz$

COEFICIENTES		LUGAR GEOMETRICO
S**	M, N	
>0	Del mismo signo	Paraboloide elíptico
	Signos opuestos	Paraboloide hiperbólico
	Uno cero	Cilindro parabólico recto
$=0$	Del mismo signo	Todos los puntos sobre un eje coordenado
	Signos opuestos	Dos planos que se cortan
	Uno cero	Un plano coordenado (dos planos coincidentes)

** Cuando $S < 0$, se invierten los signos de los coeficientes M y N; los lugares geométricos correspondientes estarán dados entonces como para $S > 0$.

llamada *forma canónica de una cuádrica con centro*. Como para las secciones cónicas, veremos que es más sencillo estudiar las cuádricas a partir de las formas canónicas de sus ecuaciones. De la ecuación (1) se deduce que cada cuádrica con centro tiene tres planos de simetría (los planos coordenados) llamados *planos principales*, tres ejes de simetría (los ejes coordenados) llamados *ejes principales*, y un centro de simetría (el origen) llamado *centro* de la superficie.

Si todos los coeficientes en la ecuación (1) son negativos, no hay lugar geométrico. Por tanto, solamente quedan tres casos por considerar, según que el número de coeficientes positivos sea tres, dos o uno. Tenemos entonces los tres siguientes tipos de superficies:

a) Elipsoide – todos los coeficientes positivos.

b) Hiperboloide de una hoja –dos coeficientes positivos, uno negativo.

c) Hiperboloide de dos hojas –un coeficiente positivo, dos negativos.

a) *Elipsoide*. La forma canónica de la ecuación del elipsoide es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2}$$

Podemos discutir esta ecuación de acuerdo con los métodos del Artículo 129. Las intercepciones con los ejes X, Y y Z son $\pm a$, $\pm b$ y $\pm c$, respectivamente. Los seis puntos de intersección del elipsoide y los ejes coordenados se llaman *vértices*. En la figura 188 se han designado por las letras A, A', B, B' y C, C'. Si $a > b > c$, los segmentos AA', BB' y CC' se llaman, respectivamente, *eje mayor*, *eje medio* y *eje menor* del elipsoide.

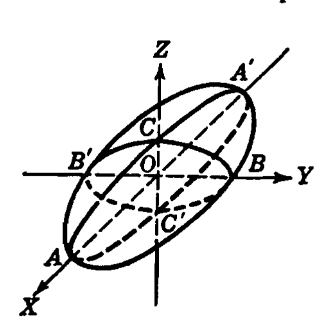


Fig. 188

Todas las trazas sobre los planos coordenados son elipses.

La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, a todos los ejes coordenados, y al origen.

Todas las secciones del elipsoide hechas por los planos paralelos a los coordenados son elipses dentro de los límites de la superficie, que es cerrada y está contenida en su totalidad dentro del paralelepípedo que tiene por caras los planos $x = \pm a$, $y = \pm b$ y $z = \pm c$.

Si dos cualesquiera de los coeficientes en la ecuación (2) son iguales, la superficie se llama *elipsoide de revolución*. En particular, si $a > b$ y $c = b$, tenemos el *elipsoide alargado*, una superficie de revolución que se obtiene haciendo girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, en torno de su eje mayor. También, si $a > b$ y $c = a$, tenemos el *elipsoide achatado* o *esferoide*, que es una superficie de revolución que se obtiene haciendo girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, en torno de su eje menor. Si $a = b = c$, la superficie (2) es una esfera de radio a; luego, la superficie esférica es un caso especial del elipsoide.

b) *Hiperboloide de una hoja*. Una forma canónica de la ecuación del hiperboloide de una hoja es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (3)$$

Las otras dos formas canónicas son

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{y} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Nuestra discusión de la ecuación (3) servirá también para estas dos últimas formas, ya que las tres superficies difieren solamente en sus posiciones con relación a los ejes coordenados.

Las intercepciones con los ejes X y Y son $\pm a$ y $\pm b$, respectivamente. No hay intercepciones con el eje Z.

Las trazas sobre los planos XY, XZ y YZ son, respectivamente, la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$, y la hipérbola $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$

La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.

Las secciones de la superficie por planos paralelos al XY son las elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}, \quad z = k. \qquad (4)$$

De las ecuaciones (4) se deduce que, a medida que k aumenta de valor, estas elipses aumentan de tamaño. Se sigue, además, que la superficie no es cerrada sino que se extiende indefinidamente. En la figura 189(a) aparece una parte de la superficie, y se dice que se

extiende a lo largo del eje Z. Cualquier hiperboloide de una hoja se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable cuyo coeficiente es negativo en la forma canónica de su ecuación.

Si en la ecuación (3) es $a = b$, la superficie es un *hiperboloide de revolución de una hoja* que puede engendrarse haciendo girar la hipérbola $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, en torno del eje Z. (Véase el ejemplo 2 del Artículo 136.)

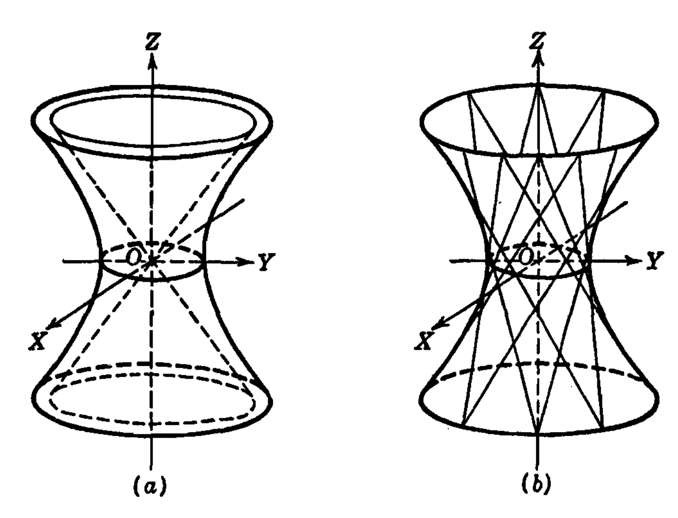


Fig. 189

Vamos a comparar ahora la ecuación (3) con la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad (5)$$

que representa una superficie cónica de segundo grado con eje en el eje Z. Si cortamos cada una de las superficies (3) y (5) por el plano $y = mx$, la curva de intersección para el hiperboloide (3) es la hipérbola

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) x^2 - \frac{z^2}{c^2} = 1, \; y = mx, \qquad (6)$$

y para el cono (5) es el par de rectas que se cortan

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} x \pm \frac{z}{c} = 0, \; y = mx. \qquad (7)$$

Para todos los valores de m, las rectas (7) son las asíntotas de la hipérbola (6). Además, las hipérbolas (6) están sobre el hiperboloide (3), y las rectas (7) están sobre la superficie (5) para todos los valores de m. Vemos, entonces, que la superficie (5) guarda una relación con el hiperboloide (3) análoga a la que guardan las asíntotas con una hipérbola, y que el hiperboloide se aproxima más y más a la superficie cónica a medida que ambas superficies se alejan más y más del origen. Por esto, la superficie (5) se llama *cono asintótico* del hiperboloide (3). En la figura 189(a) aparece una porción de este cono.

Escribamos ahora la ecuación (3) en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}.$$

Descomponiendo los dos miembros en factores, resulta:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right). \qquad (8)$$

Ahora es fácil ver que la ecuación (8) puede obtenerse eliminando el parámetro k de cualquiera de las dos siguientes familias de rectas:

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = k\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad k\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}, \qquad (9)$$

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = k\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad k\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}. \qquad (10)$$

Por tanto (Art. 137), *el hiperboloide de una hoja es una superficie reglada engendrada por una de estas dos familias de rectas*. Cada una de las familias de rectas (9) y (10) se llama un *haz alabeado* de segundo orden o *regulus* del hiperboloide (3). Puede demostrarse que por cada punto del hiperboloide pasa una y solamente una generatriz de cada haz. Algunas de estas generatrices aparecen en la figura 189(b).

c) *Hiperboloide de dos hojas*. Una forma canónica de la ecuación del hiperboloide de dos hojas es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (11)$$

Como para el hiperboloide de una hoja, hay otras dos formas canónicas, siendo la discusión de la ecuación (11) representativa de todas las formas.

Las intercepciones con el eje X son $\pm a$. No hay intercepciones con los ejes Y y Z.

Las trazas sobre los planos XY y XZ son, respectivamente, las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ y $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$. No hay traza sobre el plano YZ.

La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.

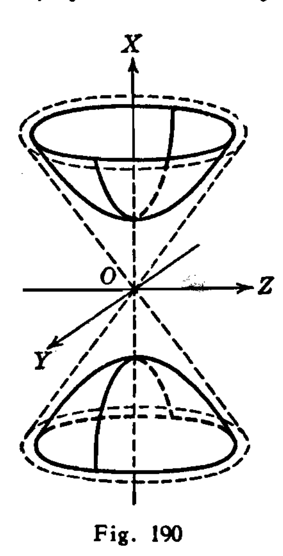


Fig. 190

Las secciones de esta superficie por planos paralelos al YZ son las elipses

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1, \quad x = k,$$

siempre que $|k| > a$. Para $k = \pm a$, tenemos solamente los dos puntos de intersección con el eje X, $(\pm a, 0, 0)$. Para valores de k comprendidos en el intervalo $-a < k < a$, no hay lugar geométrico. De esto se sigue que la superficie no es cerrada sino que está compuesta de dos hojas o ramas diferentes que se extienden indefinidamente. Una porción de la superficie aparece en la figura 190, en donde los ejes coordenados han sido colocados de manera que el dibujo resulte más claro. Se dice que la superficie se extiende a lo largo del eje X. Cualquier hiperboloide de dos hojas se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable cuyo coeficiente es positivo en la forma canónica de su ecuación.

Si en la ecuación (11) $b = c$, la superficie es un *hiperboloide de revolución de dos hojas* que puede engendrarse haciendo girar la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, en torno del eje X. (Véase el ejemplo 1 del Artículo 136.) Como para el hiperboloide de una hoja, podemos demostrar que un hiperboloide de dos hojas tiene también un *cono asintótico*. Para la superficie (11), la ecuación de este cono es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Una porción del cono aparece en línea de trazos en la figura 190. Para el hiperboloide de dos hojas cuya ecuación en su forma canónica es

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (12)$$

la ecuación de su cono asintótico es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

que es el cono asintótico (5) del hiperboloide de una hoja (3). Cuando un hiperboloide de una hoja y un hiperboloide de dos hojas tienen un cono asintótico común, se llaman, apropiadamente, ***hiperboloides conjugados***. (Ver el Artículo 68.) Así, las superficies (3) y (12) son hiperboloides conjugados.

141. Cuádricas sin centro. En este artículo consideraremos las cuádricas sin centro representadas por la ecuación

$$Mx^2 + Ny^2 = Sz,$$

en donde todos los coeficientes son diferentes de cero. Podemos entonces escribir esta ecuación en la forma

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz, \qquad (1)$$

llamada *forma ordinaria o canónica de una superficie cuádrica sin centro*. De la ecuación (1) se deduce que las cuádricas sin centro tienen dos planos de simetría (los planos YZ y XZ) llamados *planos principales*, un eje de simetría (el eje Z) llamado *eje principal*, pero ningún centro de simetría.

Atendiendo a las diversas combinaciones posibles de signos en la ecuación (1), se deduce que, en esencia, existen solamente dos tipos diferentes de superficies, a saber:

a) Paraboloides elípticos (aquellos en que los coeficientes de los términos de segundo grado son del mismo signo).

b) Paraboloides hiperbólicos (aquellos en que los coeficientes de los términos de segundo grado son de signos contrarios).

a) *Paraboloide elíptico*. Una forma canónica de la ecuación del paraboloide elíptico es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz. \qquad (2)$$

Las otras dos formas canónicas son $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cy$ y $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cx$. Para cada forma podemos tener dos variaciones según que c sea positivo o negativo. Nuestro estudio de la ecuación (2) será representativo de todas las formas.

La superficie pasa por el origen. No hay otras intercepciones con los ejes coordenados.

Las trazas sobre los planos XY, XZ y YZ son, respectivamente, el origen, la parábola $\frac{x^2}{a^2} = cz$, $y = 0$, y la parábola $\frac{y^2}{b^2} = cz$, $x = 0$.

La superficie es simétrica con respecto a los planos YZ y XZ y con respecto al eje Z.

Las secciones de las superficies por planos paralelos al XY son las curvas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck, \quad z = k. \tag{3}$$

Estas curvas son elipses si c y k son del mismo signo; si c y k tienen signos contrarios, no hay lugar geométrico. Si tomamos c como positivo, k debe ser positivo, y a medida que k aumenta de valor, las elipses (3) crecen en tamaño a medida que los planos de corte se alejan más y más del plano XY. Evidentemente, pues, la superficie no es cerrada sino que se extiende indefinidamente, alejándose del plano XY. Se ve fácilmente que las secciones de la superficie por planos paralelos a los planos XZ y YZ son parábolas cuyos vértices se alejan del plano XY a medida que se toman los planos de corte más y más lejos de estos planos coordenados.

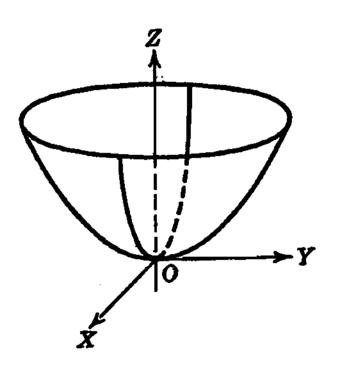


Fig. 191

Una porción de la superficie, en el caso de ser c positivo, aparece en la figura 191. Si c es negativo la superficie está en su totalidad abajo del plano XY. Se dice de cada superficie que se extiende a lo largo del eje Z. Cualquier paraboloide elíptico se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable de primer grado en la forma canónica de su ecuación.

Si en la ecuación (2) es $a = b$, la superficie es un *paraboloide de revolución* que puede engendrarse haciendo girar la parábola $\frac{y^2}{b^2} = cz$, $x = 0$, en torno del eje Z. (Véase el ejemplo 1 del Artículo 130.)

b) *Paraboloide hiperbólico.* Una forma canónica de la ecuación del paraboloide hiperbólico es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz. \tag{4}$$

Nuestra discusión de la ecuación (4) será representativa de las otras dos formas canónicas, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cy$ y $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cx$. Hay dos variaciones para cada forma, según que c sea positivo o negativo.

La superficie pasa por el origen. No hay otras intercepciones con los ejes coordenados.

Las trazas sobre los planos XY, XZ y YZ son, respectivamente, las rectas que se cortan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, $z = 0$, y $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, $z = 0$; la parábola $\frac{x^2}{a^2} = cz$, $y = 0$, y la parábola $\frac{y^2}{b^2} = -cz$, $x = 0$.

La superficie es simétrica con respecto a los planos YZ y XZ y al eje Z.

Las secciones de la superficie por planos paralelos a, pero no coincidentes con, el plano XY son las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ck, \ z = k \neq 0.$$

Evidentemente, a medida que k crece numéricamente, las ramas de estas hipérbolas se alejan más y más del eje Z. Por tanto, la superficie no es cerrada, sino que se extiende indefinidamente.

Las secciones de la superficie por planos paralelos al XZ son las parábolas

$$\frac{x^2}{a^2} = cz + \frac{k^2}{b^2}, \quad y = k,$$

las cuales se abren hacia arriba o hacia abajo según que c sea positivo o negativo.

Las secciones de la superficie por planos paralelos al YZ son las parábolas

$$\frac{y^2}{b^2} = -cz + \frac{k^2}{a^2}, \quad x = k,$$

las cuales se abren hacia abajo o hacia arriba según que c sea positivo o negativo.

Una porción de la superficie aparece en la figura 192(a) para el caso en que c es negativo. La superficie tiene la forma de una silla de montar y se dice que se extiende a lo largo del eje Z. Todo paraboloide hiperbólico se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable de primer grado en la forma canónica de su ecuación.

Evidentemente, el paraboloide hiperbólico nunca puede ser una superficie de revolución. La ecuación (4) puede escribirse en la forma

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=cz,$$

de la cual vemos que la ecuación de la superficie puede obtenerse eliminando el parámetro k de cualquiera de las dos siguientes familias de rectas, o haces alabeados,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=k, \quad k\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=cz,$$

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=k, \quad k\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=cz,$$

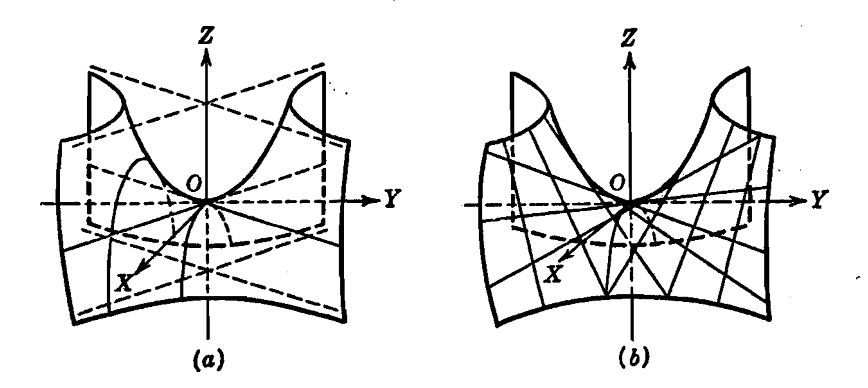


Fig. 192

Por tanto, como para el hiperboloide de una hoja (Art. 140), el *paraboloide hiperbólico es una superficie reglada engendrada por cualquiera de los dos haces alabeados*. (Véase el ejemplo 2 del Art. 137.) Puede demostrarse que por cada punto del paraboloide hiperbólico pasa una y solamente una generatriz de cada haz. Algunas de estas generatrices aparecen trazadas en la figura 192(b).

EJERCICIOS. Grupo 67

1. Discutir y representar gráficamente cada una de las superficies del tipo (I) (Art. 139) cuando uno o más de los coeficientes son nulos.

2. Dar una discusión completa del elipsoide alargado cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, $a>b$. Construir la superficie.

3. Dar una discusión completa del elipsoide achatado cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1, \quad a>b.$$

Construir la superficie.

En cada uno de los ejercicios 4-7, discutir y construir el elipsoide cuya ecuación se da.

4. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1.$

5. $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}=1.$

6. $36x^2+9y^2+4z^2=36.$

7. $4x^2+y^2+z^2-8x=0.$

8. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los ejes X y Y es siempre igual a 4. Construir la superficie.

9. En Cálculo infinitesimal se demuestra que el volumen limitado por un elipsoide es igual a $\frac{4}{3}\pi abc$, siendo a, b y c los semiejes. Hállese el volumen limitado por el elipsoide $4x^2+3y^2+2z^2-8x+12y+4=0.$

10. Dar una discusión completa del hiperboloide de una hoja cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Construir la superficie y su cono asintótico.

11. Dar una discusión completa del hiperboloide de dos hojas cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$. Construir la superficie y su cono asintótico.

En cada uno de los ejercicios 12-17, discútase y constrúyase el hiperboloide cuya ecuación se da. Constrúyase también su cono asintótico.

12. $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1.$

13. $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1.$

14. $x^2+y^2-2z^2=4.$

15. $x^2+y^2-2z^2+6=0.$

16. $2x^2-3y^2+z^2=6.$

17. $2x^2-y^2+8z^2+8=0.$

18. Construir los hiperboloides conjugados que tienen a la superficie $x^2+y^2-z^2=0$ por cono asintótico común.

19. Hallar las ecuaciones de cada haz alabeado del hiperboloide

$$x^2-4y^2+2z^2=1,$$

y demostrar que estas rectas se cortan.

20. Hallar la ecuación del hiperboloide de revolución de una hoja engendrado por la rotación de la recta $y=2$, $z=x$, en torno del eje Z. Construir la superficie.

21. Hallar la ecuación canónica de una cuádrica con centro, si la superficie pasa por el punto $(1, 1, -1)$ y por la curva $4y^2+2z^2=3$, $x=2$. Construir la superficie.

22. Discutir e ilustrar cada una de las superficies del tipo (II) (Art. 139) cuando uno o dos de los coeficientes son nulos.

23. Dar una discusión completa del paraboloide elíptico cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy$. Construir la superficie para $c>0$ y también para $c<0$.

24. Dar una discusión completa del paraboloide hiperbólico cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cy$. Construir la superficie para $c > 0$ y también para $c < 0$.

En cada uno de los ejercicios 25-30, estudiar y construir el paraboloide cuya ecuación se da.

25. $x^2 + 2z^2 = 4y$.
27. $9x^2 + 4z^2 + 36y = 0$.
26. $x^2 - y^2 + z = 0$.
28. $4y^2 + z^2 + 2x = 0$.
29. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 18z + 13 = 0$.
30. $x^2 - y^2 - 2x + 4y + z - 6 = 0$.

31. Hallar las ecuaciones de cada uno de los haces alabeados del paraboloide hiperbólico $x^2 - y^2 = 4z$, y demostrar que estas rectas se cortan.

32. Hallar la ecuación canónica de una cuádrica sin centro, si la superficie se extiende a lo largo del eje Z y pasa por los puntos $(2, 1, 1)$ y $(4, 3, -1)$. Construir la superficie.

33. Las dos superficies $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ se llaman *cilindros hiperbólicos conjugados*. Demostrar que ambas superficies son asintóticas a los planos que se cortan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ y $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$. Estos planos se llaman, apropiadamente, *planos asintóticos* comunes de los cilindros. Constrúyanse los cilindros y sus planos asintóticos.

34. Demostrar que el paraboloide hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$ es asintótico a los planos que se cortan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ y $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$. Estos planos son llamados, apropiadamente, *planos asintóticos*. Constrúyase la superficie y sus planos asintóticos.

35. Demostrar que las rectas de cada haz alabeado del paraboloide hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$ son paralelas a cualquiera de sus planos asintóticos (ejercicio 34).

Los ejercicios 36-39 se refieren al sistema de *cuádricas con centro*

$$\frac{x^2}{a^2 + k} + \frac{y^2}{b^2 + k} + \frac{z^2}{c^2 + k} = 1, \tag{5}$$

en donde $a > b > c > 0$ y el parámetro k puede tomar todos los valores reales excepto $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$, y cualquier valor menor que $-a^2$. Este sistema es análogo al sistema de cónicas con centro (homofocales) discutido en el Art. 77.

36. Para $k > -c^2$, demuéstrese que la ecuación (5) representa un sistema de elipsoides cuyas trazas sobre el plano XY son todas elipses que tienen los focos comunes $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0, 0)$.

37. Para $-b^2 < k < -c^2$, demuéstrese que la ecuación (5) representa un sistema de hiperboloides de una hoja cuyas trazas sobre el plano XY son todas elipses que tienen los focos comunes $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0, 0)$.

38. Para $-a^2 < k < -b^2$, demuéstrese que la ecuación (5) representa un sistema de hiperboloides de dos hojas cuyas trazas sobre el plano XY son todas hipérbolas que tienen los focos comunes $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0, 0)$.

39. Los resultados de los ejercicios 36-38 muestran que las trazas del sistema (5) sobre el plano XY, para todos los valores permisibles de k, son cónicas homofocales (Art. 77). Demuéstrese que se verifican resultados semejantes para las trazas sobre el plano XZ y también para las trazas sobre el plano YZ de los elipsoides e hiperboloides de una hoja solamente, no habiendo ninguna traza sobre el plano YZ para los hiperboloides de dos hojas. En vista de esta propiedad, se dice que la ecuación (5) representa un *sistema de cuádricas homofocales*.

40. Establecer y demostrar un resultado análogo al del ejercicio 39 para el *sistema de cuádricas sin centro*

$$\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}=2z+k,$$

las cuales, por esto, se llaman *paraboloides homofocales*.

CAPITULO XVII

CURVAS EN EL ESPACIO

142. Introducción. En el Capítulo XV hicimos un estudio de la recta en el espacio. En este capítulo extenderemos nuestro estudio al problema más general de la investigación de cualquier curva en el espacio. Vimos que una recta en el espacio está representada analíticamente por dos ecuaciones independientes, que son las ecuaciones de dos planos diferentes cualesquiera que pasen por la recta. Análogamente, una curva en el espacio puede representarse analíticamente por dos ecuaciones independientes, las ecuaciones de dos superficies diferentes cualesquiera que pasen por la curva. Según esto, vamos a establecer la siguiente

DEFINICIÓN. La totalidad de los puntos, y *solamente* de aquellos puntos, cuyas coordenadas satisfacen simultáneamente dos ecuaciones rectangulares independientes se llama *curva del espacio*.

Geométricamente, una curva del espacio es la intersección de las dos superficies diferentes representadas por las ecuaciones que la definen.

Si todos los puntos de una curva en el espacio están en un plano, se llama *curva plana;* en caso contrario, se llama *curva alabeada*.

El estudiante debe observar que un par de ecuaciones rectangulares no representan necesariamente una curva del espacio. Así, las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no representan una curva, porque, analíticamente, estas dos ecuaciones no tienen ninguna solución común, y geométricamente, como representan dos esferas concéntricas, no hay curva de intersección. También, si dos superficies tienen solamente un punto en común, no consideraremos que definen una curva en el espacio.

Se anotó previamente (Art. 123) que las ecuaciones que definen una recta en el espacio no son únicas, y que una recta puede representarse analíticamente por las ecuaciones de dos planos diferentes

cualesquiera que pasen por ella. Veremos ahora que este importante concepto se aplica a las curvas del espacio en general.

Consideremos una curva del espacio cualquiera dada por la intersección de dos superficies diferentes cuyas ecuaciones, en forma simbólica, pueden escribirse brevemente

$$u = 0, \quad v = 0. \tag{1}$$

Con estas ecuaciones formemos la ecuación

$$u + kv = 0, \tag{2}$$

en la que k es una constante o parámetro que puede tomar todos los valores reales. Evidentemente, si la ecuación (2) representa un lugar geométrico, se trata de una superficie (Art. 128). En particular, cualquier solución común de ambas ecuaciones (1) es también una solución de la ecuación (2). Por tanto, para cada valor del parámetro k, la ecuación (2) representa una superficie que pasa por la curva (1). (Véase Art. 77.) Este concepto es de tal importancia en la teoría de las curvas del espacio que lo anotaremos en la forma del siguiente

TEOREMA. *Para todos los valores del parámetro* k, *la ecuación*

$$\mathrm{u} + \mathrm{kv} = 0$$

representa una familia de superficies cada una de las cuales pasa por la curva

$$\mathrm{u} = 0, \quad \mathrm{v} = 0.$$

La importancia del teorema anterior está en el hecho de que a partir de las ecuaciones dadas de una curva del espacio frecuentemente es posible obtener un par de ecuaciones más simples o más útiles que la definan. Tendremos ocasión de usar este hecho más adelante (Artículo 145).

Debe observarse que nuestro estudio de las curvas del espacio se limitará solamente a su construcción. La investigación y determinación de las propiedades de la curva general del espacio requiere métodos avanzados que quedan fuera del programa de un curso elemental de Geometría analítica.

143. Curvas planas en el espacio. Comenzaremos nuestro estudio de la construcción de las curvas del espacio considerando el caso más sencillo de una curva plana. Ya hemos estudiado algunos ejemplos especiales de tales curvas como trazas de una superficie sobre los

planos coordenados y como secciones de una superficie por planos paralelos a un plano coordenado. Así, las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 4, \quad z = 2$$

representan una circunferencia contenida en el plano $z = 2$. Esta curva puede considerarse también como la intersección de la superficie del cilindro circular recto $x^2 + y^2 = 4$ con el plano $z = 2$. Evidentemente, las curvas planas de este tipo pueden trazarse por los métodos de la Geometría analítica plana.

Vamos a considerar la construcción de una curva contenida en un plano no paralelo a, ni coincidente con, un plano coordenado. Sea C dicha curva, y considerémosla definida como la intersección de una superficie curva S y un plano δ. Para construir C debemos obtener un medio para determinar la localización de cualquier punto de la curva. Esto puede hacerse trazando primero un plano, digamos δ', paralelo a uno de los planos coordenados y tal que corte a C. El plano δ' cortará a S en una curva, digamos C', y a δ en una recta, digamos l'. La intersección de C' y l' es, evidentemente, un punto de la curva C.

Ejemplo. Construir aquella porción de la curva

$$C: \quad x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 4 = 0, \quad x = y \tag{1}$$

que está en el primer octante.

Solución. La primera ecuación representa un hiperboloide de revolución S de una hoja (fig. 193) que se extiende a lo largo del eje X, y la segunda un plano δ perpendicular al XY y que pasa por el eje Z. En la figura 193 aparecen las porciones de estas superficies que están en el primer octante.

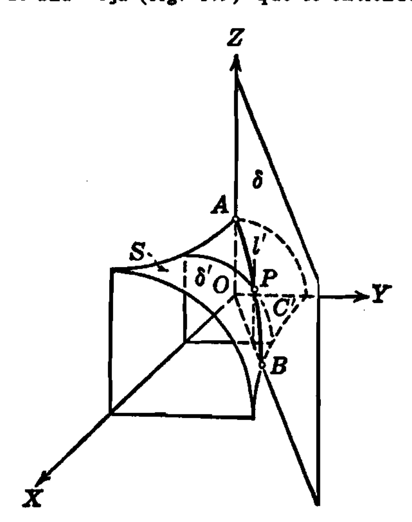


Fig. 193

La intersección de S con el eje Z es el punto A, que, por tanto, está también sobre δ. Luego A es un punto de la curva C; sus coordenadas se encuentran fácilmente y son (0, 0, 1). Las trazas de S y δ sobre el plano XY son, respectivamente, la hipérbola

$$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1, \quad z = 0,$$

y la recta $x = y$, $z = 0$; su intersección

$$B\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{3}, \tfrac{2}{3}\sqrt{3}, 0\right)$$

es también un punto C.

Para localizar cualquier otro punto de C, consideremos un plano δ' paralelo

al plano YZ; este plano corta a S en C', que es un cuadrante de circunferencia, y a δ en l' que es una recta paralela al eje Z. La intersección de C' y l' es un punto P de C. Análogamente, considerando otros planos paralelos al YZ, podemos obtener puntos adicionales de la curva C, que aparece en línea gruesa en la figura 193. Como C es, evidentemente, una curva cerrada, será interesante para el estudiante el construir la curva completa.

144. Curva de intersección de las superficies de dos cilindros rectos. Vamos a considerar ahora el problema de la construcción de la curva de intersección de las superficies de dos cilindros rectos. Este problema es importante porque es muy útil en la construcción de cualquier curva del espacio, como veremos en los dos artículos siguientes.

El tipo de superficie que consideraremos aquí es la cilíndrica recta, cuyas generatrices son perpendiculares a un plano coordenado. La curva de intersección de tales superficies cilíndricas puede obtenerse por el método explicado en el Artículo 143. En efecto, se puede trazar un plano paralelo a uno de los planos coordenados y tal que pase por una generatriz de cada cilindro, la intersección de las dos generatrices es un punto de la curva de intersección.

Ejemplo. Construir la curva de intersección de las superficies cilíndricas

$$x^2 + z^2 = 1 \quad \text{y} \quad y^2 = 4x.$$

Solución. La primera ecuación (teorema 6, Art. 133) representa la superficie de un cilindro circular recto cuyas generatrices son perpendiculares al plano XZ. La segunda ecuación representa la superficie de un cilindro parabólico recto cuyas generatrices son perpendiculares al plano XY. Por simplicidad, vamos a trazar solamente aquella porción de la curva de intersección que está en el primer octante. El resto de la curva puede obtenerse después por consideraciones de simetría.

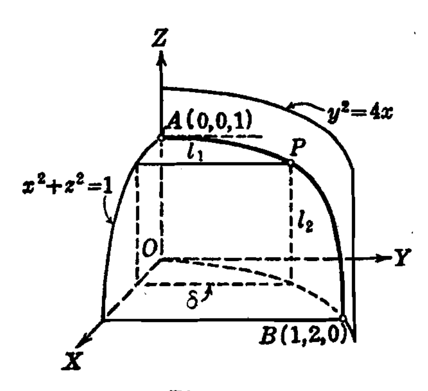


Fig. 194

Las partes de los dos cilindros que están en el primer octante aparecen en la figura 194. Evidentemente, los puntos $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 2, 0)$ están sobre la curva de intersección. Para obtener cualesquier otro punto de la curva, hacemos pasar un plano δ paralelo al plano YZ y que corta al cilindro $x^2 + z^2 = 1$ en la generatriz l_1 paralela al eje Y, y al cilindro $y^2 = 4x$ en la generatriz l_2 paralela al eje Z. La intersección de l_1 y l_2 es entonces un punto P de la curva de intersección. Análogamente podemos obtener tantos puntos como queramos de la curva, la cual aparece en el primer octante trazada en línea gruesa. El resto de la curva puede trazarse fácilmente por consideraciones de simetría.

EJERCICIOS. Grupo 68

En cada uno de los ejercicios 1-12, construir la curva plana de intersección de las dos superficies cuyas ecuaciones se dan.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad z = 2.$
2. $2x^2 + y^2 + 2z^2 = 4, \quad y = 1.$
3. $3x^2 - 2y^2 - z^2 + 6 = 0, \quad x = 3.$
4. $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad y = 2x.$
5. $x^2 + y^2 = 1, \quad y = z.$
6. $6x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 6, \quad 2x = z.$
7. $x^2 + z - 4 = 0, \quad y = 3z.$
8. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x + y = 1.$
9. $y^2 + z^2 = 1, \quad x + z = 1.$
10. $x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 0, \quad 3x + 2y = 6.$
11. $x^2 + y^2 = 4, \quad x + y - z = 0.$
12. $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x + y + z = 4.$

En cada uno de los ejercicios 13-25, construir la curva de intersección de las superficies cilíndricas rectas cuyas ecuaciones se dan.

13. $x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + z^2 = 1.$
14. $y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 4.$
15. $x^2 + z^2 = 4, \quad x^2 = y.$
16. $x^2 + y^2 = 4, \quad y^2 + z = 4.$
17. $x^2 + z = 3, \quad y^2 + z^2 = 9.$
18. $y^2 + x = 4, \quad y^2 + z = 4.$
19. $y^2 + x = 3, \quad x^2 + z = 9.$
20. $y^2 + x = 4, \quad y^2 - 4z = 0.$
21. $x^2 + z^2 = 1, \quad 3x^2 + y^2 = 12.$
22. $x^2 + y^2 - 4y = 0, \quad y^2 + 9z^2 = 9.$
23. $x^{1/2} + z^{1/2} = 2, \quad y^2 + z = 4.$
24. $y = x^3, \quad 4y^2 + z^2 = 4.$
25. $y^{2/3} + z^{2/3} = 1, \quad x^2 + z = 1.$

145. Cilindros proyectantes de una curva del espacio. Por el teorema del Artículo 142 vemos que hay una infinidad de pares de superficies diferentes que con su intersección definen a una curva del espacio. Vamos a considerar ahora un par especial que es muy útil en la construcción de curvas del espacio. Se seleccionan tres combinaciones lineales de dos ecuaciones que definan una curva del espacio, tales, que cada combinación carezca, respectivamente, de una de las tres variables x, y y z. Este proceso consiste evidentemente en la eliminación sucesiva de una variable entre las dos ecuaciones que definen la curva. Como cada una de las ecuaciones resultantes carece de una variable, se sigue, por el teorema 6 del Artículo 133, que cada ecuación representa la superficie de un cilindro recto cuyas generatrices son perpendiculares al plano coordenado en que no se mide esa variable. Además, como cada superficie cilíndrica tiene a la curva del espacio como directriz, se les llama, apropiadamente, *cilindros proyectantes* de la curva.

Vemos, entonces, que una curva del espacio tiene tres cilindros proyectantes, uno para cada plano coordenado. Se acostumbra, en consecuencia, hablar del cilindro proyectante de una curva sobre el

plano XY, sobre el plano XZ y sobre el plano YZ. Dos cualesquiera de sus tres cilindros proyectantes pueden emplearse para definir la curva del espacio. Vemos, además, que los planos proyectantes de una recta en el espacio (Art. 125) son un caso especial de los cilindros proyectantes de cualquier curva del espacio.

Ejemplo. Hallar e identificar las ecuaciones de los cilindros proyectantes de la curva cuyas ecuaciones son

$$2x^2 + y^2 + 5z^2 = 22, \quad 2x^2 - y^2 + 4z^2 = 14. \tag{1}$$

Solución. Si eliminamos sucesivamente las variables x, y y z entre las dos ecuaciones de la curva (1), obtenemos, respectivamente, las ecuaciones

$$2y^2 + z^2 = 8, \tag{2}$$

$$4x^2 + 9z^2 = 36, \tag{3}$$

$$9y^2 - 2x^2 = 18. \tag{4}$$

Estas ecuaciones, tomadas en orden, representan los cilindros proyectantes de la curva (1) sobre los planos YZ, XZ y XY, respectivamente. Las dos primeras superficies son cilindros elípticos; la tercera es un cilindro hiperbólico.

La curva puede considerarse ya sea como la intersección de las superficies representadas por las ecuaciones (1), un elipsoide y un hiperboloide de una hoja, respectivamente, o como la intersección de dos cualesquiera de sus tres cilindros proyectantes (2), (3) y (4). Es muy interesante el ejercicio de construir la curva partiendo de cada uno de estos dos puntos de vista. Así se verá la gran simplicidad que se obtiene mediante los cilindros. Este tipo de problema será estudiado en el siguiente artículo.

Examinemos ahora la curva de intersección de las dos superficies de los dos cilindros circulares rectos

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{5}$$

$$y^2 + z^2 = 4. \tag{6}$$

Aquí tenemos ya dos de los cilindros proyectantes. Si aplicamos ahora el método del ejemplo anterior y determinamos la ecuación del tercer cilindro proyectante, eliminando la variable y entre las ecuaciones (5) y (6), obtenemos la ecuación

$$x^2 - z^2 = 0, \tag{7}$$

cuyo lugar geométrico consta de los planos $x + z = 0$ y $x - z = 0$. Por tanto, la intersección consta de dos curvas planas, una contenida en el plano $x + z = 0$ y la otra en el plano $x - z = 0$. Vemos aquí otra ventaja de determinar los cilindros proyectantes de una curva en el espacio; en este caso particular, nos conduce a descubrir el hecho de que la intersección consta de dos curvas planas. Es muy instructivo el construir las curvas como la intersección de cada uno de los planos (7) con cualquiera de los cilindros (5) y (6) y comparar entonces esta construcción con la usada en la solución del ejercicio 14 del grupo 68, Artículo 144.

146. Construcción de las curvas del espacio. En este artículo vamos a hacer un breve resumen de los métodos que pueden emplearse en la construcción de las curvas del espacio partiendo de las ecuaciones que la definen. Si una de las ecuaciones de una curva representa un plano, la curva es una curva plana y puede construirse como se discutió en el Artículo 143. Si ambas ecuaciones de una curva representan cilindros rectos cuyas generatrices son perpendiculares a un plano coordenado, la curva puede construirse como se bosquejó en el Artículo 144. Si las ecuaciones que definen la curva del espacio no caen bajo ninguno de estos dos casos, procedemos como se indicó en el Artículo 145, a saber, determinar las ecuaciones de los tres cilindros proyectantes y construir entonces la curva como intersección de dos cualesquiera de estos cilindros. El proceso en este último caso consiste en reducir el problema a uno de los dos primeros casos.

Ejemplo 1. Construir la curva

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 27 = 0, \quad x^2 - 2y^2 - z^2 + 9 = 0. \qquad (1)$$

por medio de sus cilindros proyectantes.

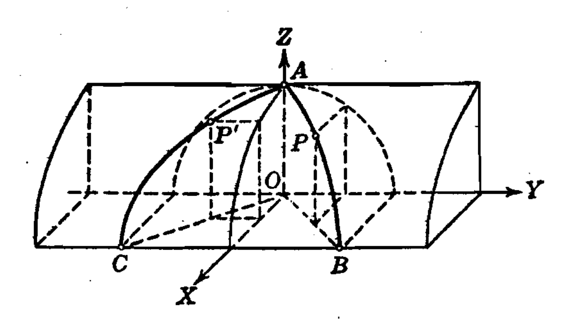


Fig. 195

Solución. Eliminando una variable sucesivamente entre las ecuaciones (1), obtenemos las tres ecuaciones

$$y^2 + z^2 = 9, \qquad (2)$$

$$x^2 + z^2 = 9, \qquad (3)$$

$$x^2 - y^2 = 0. \qquad (4)$$

El lugar geométrico de la ecuación (4) consta de los dos planos

$$x + y = 0 \quad \text{y} \quad x - y = 0;$$

por tanto, la intersección de las superficies (1) consta de dos curvas planas. Una porción de cada una de estas curvas aparece en la figura 195. La porción APB de una curva está en el plano $x - y = 0$; el método de construir cualquier punto P de esta curva como intersección del plano $x - y = 0$ y el cilindro (2)

está indicado por medio de un plano paralelo al plano XZ. La porción $AP'C$ de la otra curva está en el plano $x + y = 0$; el método para construir cualquier punto P' de esta curva como intersección del plano $x + y = 0$ y el cilindro (3) está indicado por medio de un plano paralelo al YZ. Las curvas pueden completarse fácilmente por consideraciones de simetría.

Podemos, por supuesto, de una manera semejante, obtener también la porción APB como intersección del plano $x - y = 0$ y el cilindro (3), y la porción $AP'C$ como intersección del plano $x + y = 0$ y el cilindro (2). El estudiante debe también construir estas curvas como intersección de los cilindros proyectantes (2) y (3).

Ejemplo 2. Por medio de sus cilindros proyectantes, construir la porción de la curva

$$x^2 + 2y^2 + z - 10 = 0, \quad x^2 - y^2 - 2z + 8 = 0, \tag{5}$$

que está en el primer octante.

Solución. Se encuentra fácilmente que los cilindros proyectantes son

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{6}$$

$$x^2 - z + 2 = 0, \tag{7}$$

$$y^2 + z = 6. \tag{8}$$

La porción deseada de curva, APB, puede obtenerse como intersección de los cilindros (6) y (8), y así aparece trazada en la figura 196. Como se indicó,

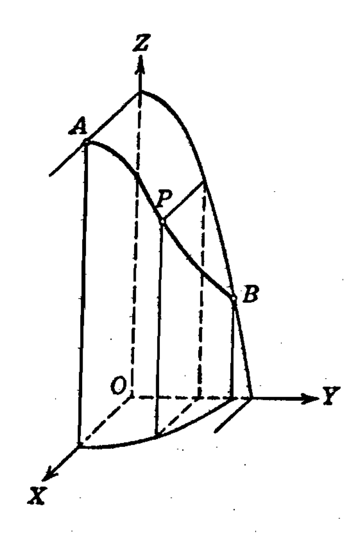


Fig. 196

cualquier punto P de la curva puede obtenerse por medio de un plano paralelo al plano XZ.

El estudiante debe construir la curva como intersección de los cilindros (6) y (7), y también como intersección de los cilindros (7) y (8). Después, debe comparar estas construcciones de la curva (5) con su construcción como intersección del paraboloide elíptico y del paraboloide hiperbólico dados.

EJERCICIOS. Grupo 69

En cada uno de los ejercicios 1-15, hállense e identifíquense las ecuaciones de los tres cilindros proyectantes de la curva cuyas ecuaciones se dan. Después constrúyase la curva como la intersección de dos cualesquiera de los cilindros proyectantes.

1. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2, \quad x^2 - y^2 - 2z^2 + 1 = 0.$
2. $x^2 + y^2 + z^2 + z = 12, \quad 3x^2 - y^2 - z^2 + 3z = 0.$
3. $4x^2 + y^2 + z^2 = 7, \quad 2x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0.$
4. $x^2 - 3y^2 - 3x + z = 0, \quad x^2 + y^2 + x + z = 12.$
5. $2x^2 + 3y^2 + z = 12, \quad 2x^2 - y^2 - 3z + 4 = 0.$
6. $3y^2 + x + 2z = 12, \quad y^2 - x + 2z = 4.$
7. $y^2 + 4z^2 - 3x = 4, \quad y^2 - z^2 + 2x = 4.$
8. $x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 4y = 9, \quad 2x^2 + y^2 - 9z^2 - 8y + 9 = 0.$
9. $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4z = 4, \quad x^2 - y^2 - 2z^2 + 8z = 4.$
10. $x^2 - y^2 + 8z + 4y = 0, \quad 2x^2 + y^2 + 4z - 4y = 0.$
11. $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 - 2y^2 + z^2 = 0.$
12. $2x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0, \quad 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 5.$
13. $x^2 + xy + z^2 = 2, \quad x^2 - 2xy + z^2 + 1 = 0.$
14. $x^2 - y^2 + 4z = 0, \quad x^2 + y^2 - 8x + 4z = 0.$
15. $z^3 + x^2 + z^2 - y = 1, \quad z^3 - 2x^2 - 2z^2 - y + 2 = 0.$

16. Construir la curva cuyas ecuaciones son $x^{2/3} + y^{2/3} = 4, \quad x^{2/3} + z^{2/3} = 4.$

17. Construir aquella porción de la curva

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y = 1,$$

que está en el primer octante.

18. Construir aquella porción de la superficie $x^2 + y^2 = 1$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = 2$, y entre los planos $y = x$ y $y = 2x$.

19. Construir aquella porción de la superficie $x^2 + z^2 = 4$ comprendida entre los planos $y = z$ y $y = 2z$.

20. Construir aquella porción de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interceptada por la superficie $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

147. Ecuaciones paramétricas de una curva del espacio. En el Capítulo XI estudiamos la representación paramétrica de una curva plana. Este concepto puede extenderse a las curvas del espacio de manera que las coordenadas (x, y, z) de cualquier punto de la curva estén expresadas como una función de una cuarta variable o parámetro. Así, las ecuaciones paramétricas de una curva del espacio pueden escribirse en la forma

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

en donde, para cada valor asignado al parámetro t, las coordenadas de un punto de la curva quedan determinadas. Hemos visto ya una

ilustración de tal representación paramétrica de una curva del espacio para la línea recta (véase el teorema 3 del Artículo 124).

Las ventajas y aplicaciones de las ecuaciones paramétricas de una curva del espacio son semejantes a las de una curva plana (Art. 89). Podemos anotar aquí que, en el estudio de las curvas del espacio por los métodos de la Geometría diferencial, se emplea casi exclusivamente la representación paramétrica.

Si se dan las ecuaciones de una curva del espacio en la forma rectangular, las coordenadas de los puntos de intersección con una superficie se obtienen resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de la curva y la superficie. En general, este procedimiento no es tan sencillo como el método empleado en el siguiente ejemplo cuando la curva está representada paramétricamente.

Ejemplo 1. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la curva

$$x = t, \quad y = t, \quad z = \sqrt{2 - t^2}, \qquad (1)$$

y la superficie

$$x^2 + y^2 = 2z. \qquad (2)$$

Solución. Las coordenadas de un punto de intersección de la curva (1) y la superficie (2) deben satisfacer las ecuaciones de la curva y la superficie. Las coordenadas de tal punto corresponden a un valor definido del parámetro t; este valor de t puede obtenerse sustituyendo los valores de x, y y z de (1) en la ecuación (2). Esto nos da la ecuación

$$t^2 + t^2 = 2\sqrt{2 - t^2},$$

cuyas soluciones se hallan fácilmente y son $t = \pm 1$. Sustituyendo estos valores de t en las ecuaciones (1), obtenemos $(1, 1, 1)$ y $(-1, -1, 1)$ como coordenadas de los puntos de intersección.

Si se dan las ecuaciones de una curva del espacio en una forma paramétrica, podemos construir la curva por dos métodos. De las ecuaciones paramétricas podemos determinar las coordenadas de algunos puntos de la curva, y trazando un número suficiente de estos puntos se puede obtener una gráfica adecuada. Por otra parte, eliminando el parámetro, obtenemos las dos ecuaciones rectangulares de la curva, que puede construirse como se discutió previamente.

Se observó anteriormente que para algunas curvas planas, como la cicloide (Art. 93), la representación paramétrica es más conveniente que la representación rectangular. Análogamente, para algunas curvas del espacio, como la *hélice*, que estudiamos a continuación, la representación paramétrica tiene ciertas ventajas sobre la representación rectangular.

Ejemplo 2. Hallar una representación paramétrica de una hélice circular, definida como el lugar geométrico de un punto que se mueve sobre la superficie de un cilindro circular recto de tal manera que al mismo tiempo que gira alrededor del eje del cilindro sigue avanzando en la dirección del mismo, de modo que la distancia que recorre paralelamente al eje del cilindro es directamente proporcional al ángulo que describe alrededor de dicho eje.

Solución. Supongamos que la ecuación del cilindro circular es

$$x^2 + y^2 = a^2, \tag{3}$$

y sea P_0 (fig. 197), intersección de este cilindro y la parte positiva del eje X, un punto de la hélice. Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera de la hélice. Vamos a tomar como parámetro el ángulo θ que describe el punto P en torno del eje Z, el eje del cilindro (3). Como P_0 es un punto de la hélice, el ángulo θ se medirá en sentido contrario al de las agujas del reloj o sentido positivo, partiendo de la parte positiva del eje X.

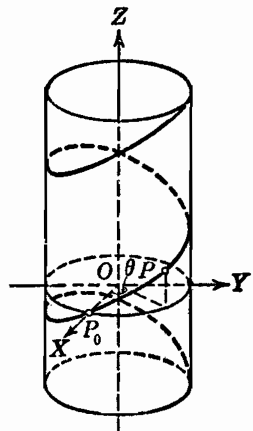


Fig. 197

Evidentemente, de la figura, las coordenadas x y y de P son $a \cos \theta$ y $a \operatorname{sen} \theta$, respectivamente. Por la definición de hélice, la coordenada z es directamente proporcional a θ. Por tanto, si $k > 0$ representa el factor de proporcionalidad, la coordenada z está dada por $k\theta$. De acuerdo con esto, las ecuaciones paramétricas de la hélice son

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \operatorname{sen} \theta, \quad z = k\theta, \quad (k > 0). \tag{4}$$

Una porción de la hélice aparece en la figura 197. Representa la forma de la rosca a la derecha de un tornillo. Por las ecuaciones paramétricas (4), vemos que la hélice está arriba o abajo del plano XY según que θ sea positivo o negativo.

EJERCICIOS. Grupo 70

1. Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta

$$x = t, \quad y = 3 - t, \quad z = 4 - t,$$

y el plano $5x + 4y - 2z = 7$.

2. Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta

$$x = t - 2, \quad y = t + 5, \quad z = t + 1,$$

y el plano $2x - 3y + 7z + 12 = 0$.

3. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la recta

$$x = 4t, \quad y = t + 4, \quad z = 3t + 6,$$

y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 44 = 0$.

4. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la curva

$$x = 2 \cos \theta, \quad y = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad z = 2 \operatorname{sen} \theta,$$

y la superficie $x^2 - y^2 + z^2 = 4$.

5. Construir la curva y la superficie del ejemplo 1, Artículo 147, y hallar así sus puntos de intersección geométricamente.

6. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la curva

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3,$$

y la superficie $x^2 + 2y - z = 2$.

7. Demostrar que las fórmulas relativas a las coordenadas del punto que divide a un segmento dado en el espacio (teorema 2, Art. 109) en una razón dada, pueden usarse como ecuaciones paramétricas de una línea recta con la razón r como parámetro.

En cada uno de los ejercicios 8-20, constrúyase la curva cuyas ecuaciones paramétricas se dan.

8. $x = t + 2, \quad y = 2t - 4, \quad z = 1 - t.$

9. $x = -2t - 3, \quad y = t + 5, \quad z = 4t - 7.$

10. $x = 2t, \quad y = 4t^2, \quad z = t.$

11. $x = \cos\theta, \quad y = \cos^2\theta, \quad z = \operatorname{sen}\theta.$

12. $x = 4 \operatorname{sen}^2\theta, \quad y = 2\cos\theta, \quad z = 2\operatorname{sen}\theta.$

13. $x = t, \quad y = t, \quad z = 1 - t^2.$

14. $x = \operatorname{sen}^2\theta, \quad y = \operatorname{sen}\theta\cos\theta, \quad z = \cos\theta.$

15. $x = t, \quad y = 2t^2, \quad z = 3t^3.$

16. $x = \operatorname{sen}\theta, \quad y = \csc\theta, \quad z = \cos\theta.$

17. $x = 2\operatorname{sen}^2 t, \quad y = \operatorname{sen} 2t, \quad z = 2\cos t.$

18. $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = t.$

19. $x = 2\cos\theta, \quad y = 2\operatorname{sen}\theta, \quad z = 2\theta.$

20. $x = \cos\theta, \quad y = 2\operatorname{sen}\theta, \quad z = 3\theta.$

148. Construcción de volúmenes. Por *volumen* entendemos una porción del espacio limitada por una o más superficies. Si un volumen está limitado por una sola superficie, tal como un elipsoide, dicho volumen puede representarse geométricamente por la construcción de esa superficie (Art. 130). Si un volumen está limitado por dos o más superficies, la construcción de ese volumen requiere la construcción de cada una de las superficies que lo forman y de sus curvas de intersección (Art. 146). En este artículo vamos a considerar la construcción de volúmenes de este último tipo.

Ejemplo 1. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{y} \quad x + y - z = 0.$$

Solución. El volumen que se desea está limitado por la superficie del cilindro circular recto $x^2 + y^2 = 4$, el plano $x + y - z = 0$, y los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Construímos primero una parte del cilindro en

el primer octante. El plano $x + y - z = 0$ pasa por el origen y se puede construir por medio de sus trazas sobre los planos XZ y YZ. Luego construímos la curva de intersección de este plano y el cilindro; para obtener cualquier punto P de esta curva, empleando un plano de corte paralelo al plano XZ, lo hacemos como lo indica la figura 198. El contorno del volumen aparece en la línea llena.

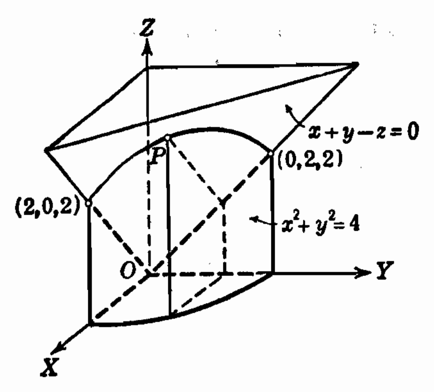


Fig. 198

Ejemplo 2. Construir el volumen limitado por las superficies $x^2 + 2y = 4$, $2y = 3z$, $x - y + 1 = 0$, $x = 0$ y $z = 0$, y que está a la izquierda del plano $x - y + 1 = 0$ en el primer octante.

Solución. La porción de la curva de intersección del cilindro parabólico recto $x^2 + 2y = 4$ y el plano $2y = 3z$ que está en el primer octante aparece

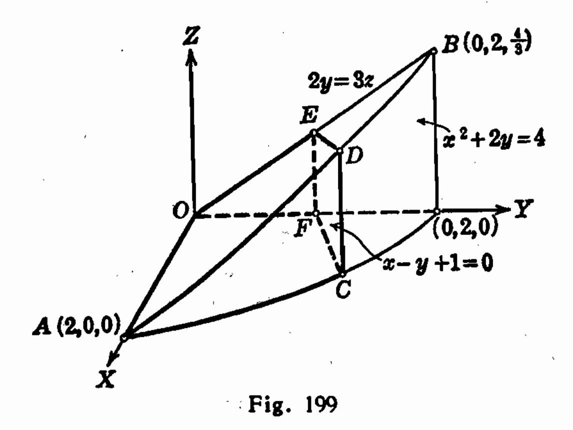


Fig. 199

marcada en la figura 199 por el arco AB. El plano $x - y + 1 = 0$ corta al arco AB en el punto D, al cilindro en la generatriz CD, al plano $2y = 3z$ en la recta DE y al eje Y en el punto F. Entonces el volumen requerido, que aparece en línea gruesa, está limitado por las porciones ACD del cilindro, $AOED$ del plano $2y = 3z$, $CDEF$ del plano $x - y + 1 = 0$, OEF del plano $x = 0$ y $AOFC$ del plano $z = 0$.

El estudiante observará que las coordenadas de algunos puntos de la figura han sido indicadas. Como práctica se le recomienda que calcule las coordenadas de tales puntos. Las coordenadas no sirven solamente para construir la figura, sino también algunas de ellas se requieren para el cálculo del volumen.

EJERCICIOS. Grupo 71

En los siguientes ejercicios el estudiante debe identificar todas las superficies cuyas ecuaciones se dan.

1. Construir el volumen limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 = 2z \quad \text{y} \quad z = 2.$$

2. Construir el volumen limitado por las superficies

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 6, \quad y = 0 \quad \text{y} \quad y = 2.$$

3. Construir el volumen limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad z = 1 \quad \text{y} \quad z = 3.$$

4. Construir el más pequeño de los dos volúmenes limitados por las superficies $x^2 - y^2 + z^2 = 0$, $y = 2x$, $y = 3$ y $z = 0$.

5. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$, $y = x$, $x = 0$ y $z = 4$.

6. Construir la cuña en el primer octante formada por las superficies $x^2 + 2y^2 = 4$, $y = x$, $x = 0$, $z = 0$ y $z = 3$.

7. Construir el volumen interior a la superficie $x^2 + y^2 = 8$ y exterior a la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 4$.

8. Construir el volumen comprendido entre las superficies

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

9. Construir el volumen exterior a la superficie $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ e interior a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

10. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 3z$ y $x^2 + y^2 = 4$.

11. Construir el volumen interior a la superficie $y^2 + z^2 = 2x$ y exterior a la superficie $x^2 - y^2 - z^2 = 0$.

12. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $2x^2 - y^2 + 2z^2 = 0$ y $y^2 + z^2 = 1$.

13. Construir el volumen interior a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y exterior a la superficie $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

14. Construir el más pequeño de los dos volúmenes limitados por las superficies $4x^2 + 3y^2 = z$, $y = 1$ y $z = 5$.

15. Construir la cuña en el primer octante formada por las superficies $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $y = x$, $y = 0$ y $z = 2$.

16. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ y $x + y = 2$.

17. Construir el volumen limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 9$, $y = z$ y $z = 0$.

18. Construir la cuña formada por las superficies

$$x^2 + y^2 = 4, \quad z = x \quad \text{y} \quad z = 3x,$$

que está enfrente del plano YZ.

19. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $y^2 + z^2 = 2$ y $x^2 + z^2 = 2$.

20. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $y^2 + z = 1$ y $x^2 + y = 1$.

21. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $x^2 + y - 4 = 0$ y $z = x$.

22. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $y^2 + z^2 = 4$ y $y^2 = x$.

23. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $x^2 + y^2 = z$ y $x + 2y = 2$.

24. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $y^2 + z = 1$ y $y^2 = x$.

25. Un triángulo equilátero de tamaño variable se mueve paralelamente al plano XZ y de tal manera que su base es siempre una cuerda de la curva $4x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$. Construir el volumen generado.

26. Construir el volumen limitado por las superficies

$$y^2 + x = 2, \quad z = 2x \quad \text{y} \quad x = 2z.$$

27. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $z^3 + x - 2 = 0$ y $2x + y = 4$.

28. Construir el volumen en el primer octante exterior a la superficie $x^2 + y^2 = 2z$ e interior a la superficie $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

29. Construir el volumen limitado por las superficies

$$x^2 = y, \quad y = z, \quad x = 0, \quad y = 4 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

30. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2x$, $y = 0$ y $z = 0$.

31. Construir el volumen limitado por las superficies

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 2, \quad y + z = 4, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

32. Un cilindro circular recto de altura h y radio r es cortado por un plano que pasa por un diámetro de una de sus bases y que es tangente a la otra base. Escribir las ecuaciones de la superficie cilíndrica y del plano. Construir el volumen de la porción más pequeña de las dos en que queda dividido el cilindro.

33. Construir el volumen limitado por las superficies

$$y^2 + z = 9, \quad y = x, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

34. Construir el volumen limitado por las superficies

$$x^2 + 4y^2 + z = 4, \quad x + 2y = 2, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

35. Construir el volumen limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 + 2z = 4, \quad x + z = 2 \quad \text{y} \quad y = 0.$$

36. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $y^2 + 2z = 4$ y $y^2 + z^2 = 2x$.

37. Construir el volumen común a las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

38. Construir el volumen limitado por las superficies

$$y^2 + x = 4, \quad y = 2x, \quad z = 2y, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

39. Construir el volumen limitado por las superficies

$$x^3 - 8y = 0, \quad y = 2x, \quad y + 2z = 4 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

40. Construir el volumen limitado por las superficies

$$y^2 + x - z = 0, \quad x = y, \quad y = 1, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

APENDICE I

LISTA DE REFERENCIA DE FORMULAS, DEFINICIONES Y TEOREMAS

A. Geometría

Las fórmulas 1-5 se refieren a las figuras planas. En ellas:

a, b, c = lados de un triángulo.
s = semiperímetro = $\frac{1}{2}(a+b+c)$.
b = base.
b_1, b_2 = bases de un trapecio.
C = longitud de la circunferencia.
h = altura.
K = área.
r = radio del círculo.
s = arco de circunferencia.

1. **Triángulo.** $K = \frac{1}{2}bh$; $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
2. **Paralelogramo.** $K = bh$.
3. **Trapecio.** $K = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$.
4. **Círculo.** $C = 2\pi r$; $K = \pi r^2$.
5. **Sector circular.** $K = \frac{1}{2}sr$.

Las fórmulas 6-10 se refieren a cuerpos geométricos. En ellas:

B = área de la base.
h = altura.
r = radio.
s = lado.
S = área lateral.
= área de la esfera.
T = área total.
V = volumen.

6. **Prisma.** $V = Bh$.
7. **Pirámide.** $V = \frac{1}{3}Bh$.
8. **Cilindro circular recto.** $S = 2\pi rh$; $T = 2\pi r(h+r)$; $V = \pi r^2 h$.
9. **Cono circular recto.** $S = \pi rs$; $T = \pi r(s+r)$; $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
10. **Esfera.** $S = 4\pi r^2$; $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

B. ALGEBRA

1. La división por cero es una operación excluída.

2. Si el producto de dos o más cantidades es igual a cero, uno de los factores, por lo menos, debe ser igual a cero.

3. **Ecuación de segundo grado.** La ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

tiene las raíces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

en donde $D = b^2 - 4ac$ se llama *discriminante*. Si a, b y c son todos números *reales*, estas raíces son reales e iguales si $D = 0$; reales y desiguales si $D > 0$; complejas conjugadas si $D < 0$.

Suma de las raíces $= -\frac{b}{a}$; producto de las raíces $= \frac{c}{a}$.

4. **Logaritmos.** *Definición*. Si N, x y b son tres cantidades ligadas por la relación

$$N = b^x, \quad b > 0, \qquad b \neq 1,$$

entonces el exponente x se llama *logaritmo de* N *en la base* b, y escribimos la relación equivalente

$$x = \log_b N.$$

El logaritmo de un número negativo no existe en el sistema de números *reales*; el logaritmo de cero es indefinido.

Si M y N son dos números positivos, las tres siguientes relaciones son verdaderas:

$$\log_b (MN) = \log_b M + \log_b N, \quad \log_b \left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N,$$

$$\log_b (M)^n = n \log_b M, \text{ siendo } n \text{ un número real}.$$

Debe anotarse también las siguientes relaciones:

$$\log_b 1 = 0; \quad \log_b b = 1; \quad \log_b \frac{1}{N} = -\log_b N.$$

El logaritmo de un número en cualquier base puede obtenerse por la relación

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a},$$

en donde, $a > 0$, $a \neq 1$; $b > 0$, $b \neq 1$.

5. Determinantes. *Un determinante de orden* n es una cantidad representada por un ordenamiento en cuadro de n^2 cantidades, llamadas elementos, ordenadas en n filas y n columnas.

El cálculo de determinantes se da en los textos de Algebra. Conviene recordar las siguientes propiedades importantes:

Propiedad 1. Cualquier propiedad de un determinante que es válida para sus filas es también válida para sus columnas.

Propiedad 2. El valor de un determinante no se altera si sus filas y columnas correspondientes son intercambiadas.

Propiedad 3. Si en un determinante se intercambian dos de sus filas el determinante cambia de signo.

Propiedad 4. Si un determinante tiene dos filas idénticas, su valor es cero.

Propiedad 5. Si se multiplica cada uno de los elementos de una fila de un determinante por un número cualquiera k, el valor del determinante queda multiplicado por k.

Propiedad 6. El valor de un determinante no se altera si cada uno de los elementos de una fila se multiplica por un número cualquiera k y se le suma el elemento correspondiente de cualquiera otra fila.

6. Sistemas de ecuaciones lineales. Por brevedad, los teoremas dados aquí se ilustrarán con sistemas de tres ecuaciones lineales; sin embargo, son verdaderos para sistemas de cualquier número de ecuaciones.

Consideremos el sistema de tres *ecuaciones lineales no homogéneas* en tres incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= k_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= k_3, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

en donde k_1, k_2 y k_3 son constantes, no simultáneamente nulas. El determinante formado por los coeficientes se llama *determinante del sistema* y se designa generalmente por Δ, es decir,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Sea Δ_j el determinante formado a partir de Δ reemplazando los elementos de la columna de orden j por los términos independientes k_1, k_2 y k_3.

Entonces tenemos:

Regla de Cramer. Si $\Delta \neq 0$, *el sistema* (1) *tiene una solución única dada por*

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Si $\Delta = 0$ y $\Delta_j \neq 0$ para un valor de j por lo menos, el sistema (1) no tiene solución y se dice que es *incompatible*.

Si $\Delta = 0$ y $\Delta_j = 0$ para todos los valores de j, el sistema (1) tiene un número infinito de soluciones, y se dice que es *indeterminado*.

Consideremos ahora el sistema de tres *ecuaciones lineales homogéneas en tres incógnitas:*

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Según la regla de Cramer, si el determinante Δ de este sistema es diferente de cero, hay solamente una solución:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

De aquí el siguiente

TEOREMA. *Un sistema de* n *ecuaciones lineales homogéneas con* n *incógnitas tiene otras soluciones, además de la solución*

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

si y solamente si el determinante del sistema es igual a cero.

C. TRIGONOMETRÍA

1. Definición de las funciones trigonométricas. Sea θ el ángulo cuya variación de valores está dada por el intervalo

$$-360° \leq \theta \leq 360°.$$

Para los fines de definición de tal ángulo y de sus funciones trigonométricas es conveniente usar el sistema coordenado rectangular. Los enunciados que siguen se aplican a *cada una* de las cuatro posiciones que aparecen en la figura 200.

Si a una recta que coincide con el eje X se la hace girar en el plano coordenado XY en torno del origen O a una posición OA, se dice que se ha *generado* un ángulo $XOA = \theta$ que tiene a OX por *lado inicial* y a OA por *lado final*. Si la rotación se hace en el sentido contrario a las manecillas de un reloj, se dice que el ángulo es *positivo;* y si la rotación es en el mismo sentido de las manecillas (indicada

en las figuras con líneas punteadas), se dice que el ángulo es *negativo*. Se dice también que el ángulo está en el mismo cuadrante que su lado final.

Sobre el lado final OA tomemos un punto cualquiera P diferente de O, y de coordenadas (x, y). Desde P bajemos una perpendicular PB al eje X. El segmento de recta OP se llama *radio vector*, se designa por r, y se toma siempre como *positivo*. En el triángulo OPB,

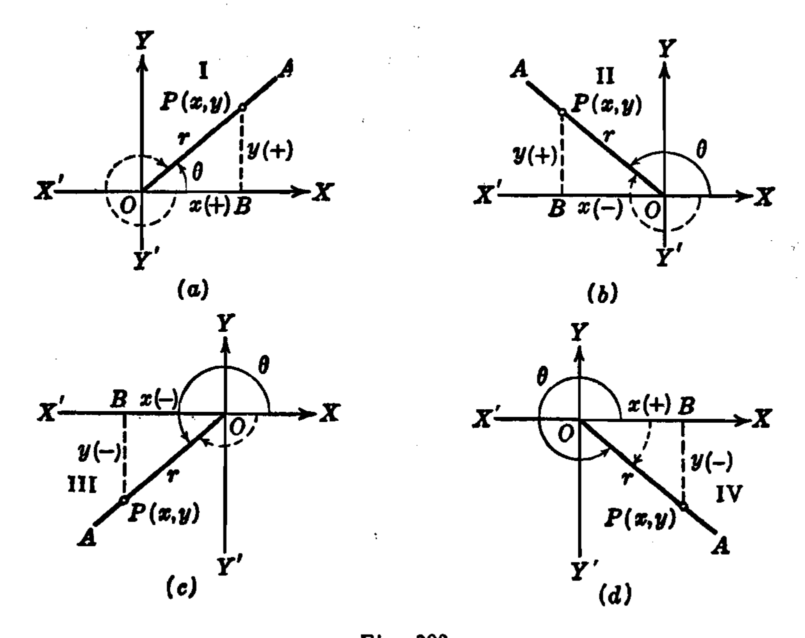


Fig. 200

$OB = x$ y $PB = y$ tienen los signos de las coordenadas del punto P, como está indicado para los cuatro cuadrantes. Entonces, cualquiera que sea el cuadrante en que esté θ, las seis funciones trigonométricas de θ se *definen* en magnitud y signo, por las siguientes razones:

$$\text{seno de } \theta = \text{sen } \theta = \frac{y}{r}, \qquad \text{coseno de } \theta = \cos \theta = \frac{x}{r},$$

$$\text{tangente de } \theta = \text{tg } \theta = \frac{y}{x}, \qquad \text{cotangente de } \theta = \text{ctg } \theta = \frac{x}{y},$$

$$\text{secante de } \theta = \sec \theta = \frac{r}{x}, \qquad \text{cosecante de } \theta = \csc \theta = \frac{r}{y}.$$

Las definiciones son verdaderas y no cambian para ángulos positivos y negativos mayores que 360° en valor numérico.

2. Identidades trigonométricas fundamentales.

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta},$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad 1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\theta = \csc^2\theta.$$

3. Fórmulas de reducción.

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen}(90^\circ \pm \theta) = \cos\theta, & \cos(90^\circ \pm \theta) = \mp\operatorname{sen}\theta, & \operatorname{tg}(90^\circ \pm \theta) = \mp\operatorname{ctg}\theta, \\ \operatorname{sen}(180^\circ \pm \theta) = \mp\operatorname{sen}\theta, & \cos(180^\circ \pm \theta) = -\cos\theta, & \operatorname{tg}(180^\circ \pm \theta) = \pm\operatorname{tg}\theta, \\ \operatorname{sen}(270^\circ \pm \theta) = -\cos\theta, & \cos(270^\circ \pm \theta) = \pm\operatorname{sen}\theta, & \operatorname{tg}(270^\circ \pm \theta) = \mp\operatorname{ctg}\theta, \\ \operatorname{sen}(360^\circ \pm \theta) = \pm\operatorname{sen}\theta, & \cos(360^\circ \pm \theta) = \cos\theta, & \operatorname{tg}(360^\circ \pm \theta) = \pm\operatorname{tg}\theta. \end{array}$$

4. Medida de ángulos en radianes. Sea θ un ángulo central que intercepta un arco de longitud s sobre un círculo de radio r. La medida del ángulo θ, en radianes, está *definida* por $\theta = \frac{s}{r}$. Obsérvese que por ser s y r longitudes, esta razón es un número *abstracto*. De esta definición de medida en radianes tenemos de inmediato la relación de conversión :

$$\pi \text{ radianes} = 180^\circ,$$

de donde,

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} = 57{,}2958^\circ \text{ (aprox.)} = 57^\circ 17' 45'' \text{ (aprox.)},$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radianes} = 0{,}017453 \text{ radianes (aprox.)}.$$

5. Funciones trigonométricas de ángulos especiales.

Angulo θ en		sen θ	cos θ	tg θ
Radianes	Grados			
0	0°	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	

6. **Fórmulas de adición y sustracción.**

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y,$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,$$
$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

7. **Funciones trigométricas del ángulo doble.**

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1,$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

8. **Funciones trigonométricas del ángulo mitad.**

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \quad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

9. **Relaciones importantes.**

$$a \operatorname{sen}\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}(\theta+\phi), \text{ en donde } \phi = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a},$$
$$a \operatorname{sen}\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\psi), \text{ en donde } \psi = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}.$$

En las fórmulas 10–12, a, b y c son los lados de cualquier triángulo y A, B y C son los ángulos opuestos respectivos.

10. **Ley de los senos.** $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$.

11. **Ley de los cosenos.** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

12. **Area de un triángulo.** $K = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$.

D. Alfabeto griego

A	α	alfa	I	ι	iota	P	ρ	ro
B	β	beta	K	κ	kapa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gama	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mu o mi	Υ	υ	ípsilon
E	ε	épsilon	N	ν	nu o ni	Φ	φ	fi
Z	ζ	dseta o zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	ji o ki
H	η	eta	O	o	ómicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	teta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

APENDICE II

TABLAS

A. Logaritmos comunes

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

A. Logaritmos comunes

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

B. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS NATURALES

Radianes	Grados	sen	cos	tg	ctg		
.0000	0.0	.0000	1.0000	.0000	——	90.0	1.5708
.0087	0.5	.0087	1.0000	.0087	114.5887	89.5	1.5621
.0175	1.0	.0175	.9998	.0175	57.2900	89.0	1.5533
.0262	1.5	.0262	.9997	.0262	38.1885	88.5	1.5446
.0349	2.0	.0349	.9994	.0349	28.6363	88.0	1.5359
.0436	2.5	.0436	.9990	.0437	22.9038	87.5	1.5272
.0524	3.0	.0523	.9986	.0524	19.0811	87.0	1.5184
.0611	3.5	.0610	.9981	.0612	16.3499	86.5	1.5097
.0698	4.0	.0698	.9976	.0699	14.3007	86.0	1.5010
.0785	4.5	.0785	.9969	.0787	12.7062	85.5	1.4923
.0873	5.0	.0872	.9962	.0875	11.4301	85.0	1.4835
.0960	5.5	.0958	.9954	.0963	10.3854	84.5	1.4748
.1047	6.0	.1045	.9945	.1051	9.5144	84.0	1.4661
.1134	6.5	.1132	.9936	.1139	8.7769	83.5	1.4574
.1222	7.0	.1219	.9925	.1228	8.1443	83.0	1.4486
.1309	7.5	.1305	.9914	.1317	7.5958	82.5	1.4399
.1396	8.0	.1392	.9903	.1405	7.1154	82.0	1.4312
.1484	8.5	.1478	.9890	.1495	6.6912	81.5	1.4224
.1571	9.0	.1564	.9877	.1584	6.3138	81.0	1.4137
.1658	9.5	.1650	.9863	.1673	5.9758	80.5	1.4050
.1745	10.0	.1736	.9848	.1763	5.6713	80.0	1.3963
.1833	10.5	.1822	.9833	.1853	5.3955	79.5	1.3875
.1920	11.0	.1908	.9816	.1944	5.1446	79.0	1.3788
.2007	11.5	.1994	.9799	.2035	4.9152	78.5	1.3701
.2094	12.0	.2079	.9781	.2126	4.7046	78.0	1.3614
.2182	12.5	.2164	.9763	.2217	4.5107	77.5	1.3526
.2269	13.0	.2250	.9744	.2309	4.3315	77.0	1.3439
.2356	13.5	.2334	.9724	.2401	4.1653	76.5	1.3352
.2443	14.0	.2419	.9703	.2493	4.0108	76.0	1.3265
.2531	14.5	.2504	.9681	.2586	3.8667	75.5	1.3177
.2618	15.0	.2588	.9659	.2679	3.7321	75.0	1.3090
.2705	15.5	.2672	.9636	.2773	3.6059	74.5	1.3003
.2793	16.0	.2756	.9613	.2867	3.4874	74.0	1.2915
.2880	16.5	.2840	.9588	.2962	3.3759	73.5	1.2828
.2967	17.0	.2924	.9563	.3057	3.2709	73.0	1.2741
.3054	17.5	.3007	.9537	.3153	3.1716	72.5	1.2654
.3142	18.0	.3090	.9511	.3249	3.0777	72.0	1.2566
.3229	18.5	.3173	.9483	.3346	2.9887	71.5	1.2479
.3316	19.0	.3256	.9455	.3443	2.9042	71.0	1.2392
.3403	19.5	.3338	.9426	.3541	2.8239	70.5	1.2305
.3491	20.0	.3420	.9397	.3640	2.7475	70.0	1.2217
.3578	20.5	.3502	.9367	.3739	2.6746	69.5	1.2130
.3665	21.0	.3584	.9336	.3839	2.6051	69.0	1.2043
.3752	21.5	.3665	.9304	.3939	2.5386	68.5	1.1956
.3840	22.0	.3746	.9272	.4040	2.4751	68.0	1.1868
.3927	22.5	.3827	.9239	.4142	2.4142	67.5	1.1781
		cos	sen	ctg	tg	Grados	Radianes

B. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS NATURALES

Radianes	Grados	sen	cos	tg	ctg		
.3927	22.5	.3827	.9239	.4142	2.4142	67.5	1.1781
.4014	23.0	.3907	.9205	.4245	2.3559	67.0	1.1694
.4102	23.5	.3987	.9171	.4348	2.2998	66.5	1.1606
.4189	24.0	.4067	.9135	.4452	2.2460	66.0	1.1519
.4276	24.5	.4147	.9100	.4557	2.1943	65.5	1.1432
.4363	25.0	.4226	.9063	.4663	2.1445	65.0	1.1345
.4451	25.5	.4305	.9026	.4770	2.0965	64.5	1.1257
.4538	26.0	.4384	.8988	.4877	2.0503	64.0	1.1170
.4625	26.5	.4462	.8949	.4986	2.0057	63.5	1.1083
.4712	27.0	.4540	.8910	.5095	1.9626	63.0	1.0996
.4800	27.5	.4617	.8870	.5206	1.9210	62.5	1.0908
.4887	28.0	.4695	.8829	.5317	1.8807	62.0	1.0821
.4974	28.5	.4772	.8788	.5430	1.8418	61.5	1.0734
.5061	29.0	.4848	.8746	.5543	1.8040	61.0	1.0647
.5149	29.5	.4924	.8704	.5658	1.7675	60.5	1.0559
.5236	30.0	.5000	.8660	.5774	1.7321	60.0	1.0472
.5323	30.5	.5075	.8616	.5890	1.6977	59.5	1.0385
.5411	31.0	.5150	.8572	.6009	1.6643	59.0	1.0297
.5498	31.5	.5225	.8526	.6128	1.6319	58.5	1.0210
.5585	32.0	.5299	.8480	.6249	1.6003	58.0	1.0123
.5672	32.5	.5373	.8434	.6371	1.5697	57.5	1.0036
.5760	33.0	.5446	.8387	.6494	1.5399	57.0	.9948
.5847	33.5	.5519	.8339	.6619	1.5108	56.5	.9861
.5934	34.0	.5592	.8290	.6745	1.4826	56.0	.9774
.6021	34.5	.5664	.8241	6873	1.4550	55.5	.9687
.6109	35.0	.5736	.8192	.7002	1.4281	55.0	.9599
.6196	35.5	.5807	.8141	.7133	1.4019	54.5	.9512
.6283	36.0	.5878	.8090	.7265	1.3764	54.0	.9425
.6370	36.5	.5948	.8039	.7400	1.3514	53.5	.9338
.6458	37.0	.6018	.7986	.7536	1.3270	53.0	.9250
.6545	37.5	.6088	.7934	.7673	1.3032	52.5	.9163
.6632	38.0	.6157	.7880	.7813	1.2799	52.0	.9076
.6720	38.5	.6225	.7826	.7954	1.2572	51.5	.8988
.6807	39.0	.6293	.7771	.8098	1.2349	51.0	.8901
.6894	39.5	.6361	.7716	.8243	1.2131	50.5	.8814
.6981	40.0	.6428	.7660	.8391	1.1918	50.0	.8727
.7069	40.5	.6494	.7604	.8541	1.1708	49.5	.8639
.7156	41.0	.6561	.7547	.8693	1.1504	49.0	.8552
.7243	41.5	.6626	.7490	.8847	1.1303	48.5	.8465
.7330	42.0	.6691	.7431	.9004	1.1106	48.0	.8378
.7418	42.5	.6756	.7373	.9163	1.0913	47.5	.8290
.7505	43.0	.6820	.7314	.9325	1.0724	47.0	.8203
.7592	43.5	.6884	.7254	.9490	1.0538	46.5	.8116
.7679	44.0	.6947	.7193	.9657	1.0355	46.0	.8029
.7767	44.5	.7009	.7133	.9827	1.0176	45.5	.7941
.7854	45.0	.7071	.7071	1.0000	1.0000	45.0	.7854
		cos	sen	ctg	tg	Grados	Radianes

C. Valores de e^x y e^{-x}

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.00	1.000	1.000	0.1	1.105	0.905	1	2.72	0.368
.01	1.010	.990	.2	1.221	.819	2	7.39	.135
.02	1.020	.980	.3	1.350	.741	3	20.09	.0498
.03	1.030	.970	.4	1.492	.670	4	54.60	.0183
.04	1.041	.961	.5	1.649	.607	5	148.4	.00674
.05	1.051	.951	.6	1.822	.549	6	403.4	.00248
.06	1.062	.942	.7	2.014	.497	7	1097.	.000912
.07	1.073	.932	.8	2.226	.449	8	2981.	.000335
.08	1.083	.923	.9	2.460	.407	9	8103.	.000123
.09	1.094	.914	1.0	2.718	.368	10	22026.	.000045

NOTA. $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.

Ejemplo. $e^{2.81} = e^2 \cdot e^{0.8} \cdot e^{0.01} = (7.39)\,(2.226)\,(1.01) = 16.6.$

D. Potencias y raíces de enteros

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1.000	1.000	26	676	17,576	5.099	2.962
2	4	8	1.414	1.260	27	729	19,683	5.196	3.000
3	9	27	1.732	1.442	28	784	21,952	5.292	3.037
4	16	64	2.000	1.587	29	841	24,389	5.385	3.072
5	25	125	2.236	1.710	30	900	27,000	5.477	3.107
6	36	216	2.449	1.817	31	961	29,791	5.568	3.141
7	49	343	2.646	1.913	32	1024	32,768	5.657	3.175
8	64	512	2.828	2.000	33	1089	35,937	5.745	3.208
9	81	729	3.000	2.080	34	1156	39,304	5.831	3.240
10	100	1,000	3.162	2.154	35	1225	42,875	5.916	3.271
11	121	1,331	3.317	2.224	36	1296	46,656	6.000	3.302
12	144	1,728	3.464	2.289	37	1369	50,653	6.083	3.332
13	169	2,197	3.606	2.351	38	1444	54,872	6.164	3.362
14	196	2,744	3.742	2.410	39	1521	59,319	6 245	3.391
15	225	3,375	3.873	2.466	40	1600	64,000	6.325	3.420
16	256	4,096	4.000	2.520	41	1681	68,921	6.403	3.448
17	289	4,913	4.123	2.571	42	1764	74,088	6.481	3.476
18	324	5,832	4.243	2.621	43	1849	79,507	6.557	3.503
19	361	6,859	4.359	2.668	44	1936	85,184	6.633	3.530
20	400	8,000	4.472	2.714	45	2025	91,125	6.708	3.557
21	441	9,261	4.583	2.759	46	2116	97,336	6.782	3.583
22	484	10,648	4.690	2.802	47	2209	103,823	6.856	3.609
23	529	12,167	4.796	2.844	48	2304	110,592	6.928	3.634
24	576	13,824	4.899	2.884	49	2401	117,649	7.000	3.659
25	625	15,625	5.000	2.924	50	2500	125,000	7.071	3.684

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

Grupo 1, p. 8

4. 11; 10; 4.
5. (7), (− 11).
8. (− 15), (− 11), (− 13).
9. (14).
10. − 3.
11. (a, a), $(-a, a)$, $(-a, -a)$, $(a, -a)$.
12. (2, 3), 20.
13. 6, 5.
14. $(5/2, 0)$.
15. $\sqrt{a^2+b^2}$.
16. 10.
17. 30.
18. $(1, 1+2\sqrt{3})$; $(1, 1-2\sqrt{3})$.
19. 10.
20. 20.

Grupo 2, p. 15

1. 20,26.
3. 34.
6. $\sqrt{82}$.
8. 5.
9. 2, − 6.
10. $5x - 7y - 24 = 0$.
11. $(8/3, 1)$, $(19/3, -1)$, $(2, 0)$.
12. (− 4, 12).
13. (1, − 2).
14. 3.
15. (− 1, 4), (5, 6), (3, − 2).
19. (2, 2).

Grupo 3, p. 24

4. $-1/2$, 153° 26′.
5. -2, $1/6$, $7/2$.
7. 5.
8. 4, − 1.
9. 4.
10. 77° 28′, 54° 10′, 48° 22′.
11. 108° 26′.
12. 71° 34′.
14. $-1/2$.
15. − 8.
16. 13.
18. 5.
19. $4x - 5y - 13 = 0$.
20. $4x - y - 13 = 0$.
22. 1.
23. 33° 41′, 56° 19′.

Grupo 7, p. 49

11. (2, 3).
12. (1, − 2).
14. $(4, 2)$, $(9/4, -3/2)$.
15. (0, 0), (1, 1).

16. (0, 2), (2, 0).
17. (2, 2), (2, −2).
19. (3, 2), (−3, −2), (2, 3), (−2, −3).
20. (4, 4), (3, 1).

Grupo 8, p. 54

3. $x - 2y - 3 = 0$.
4. $x^2 + y^2 = 4$.
5. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.
6. $2x + 3y - 9 = 0$.
7. $x + y - 4 = 0$.
8. $x^2 + y^2 - 9x - 2y + 17 = 0$.
9. $2x + y + 9 = 0$.
10. $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 4 = 0$.
11. $x^2 - 8y + 16 = 0$.
12. $x^2 + y^2 + x - 7y + 12 = 0$.
13. $4x + 6y - 21 = 0$,
    $4x + 6y + 3 = 0$.
14. $y^2 - 10x - 8y + 11 = 0$.
15. $7x^2 + 16y^2 = 112$.
16. $16x^2 + 7y^2 = 112$.
17. $5x^2 - 4y^2 = 20$.
18. $5y^2 - 4x^2 = 20$.
19. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$.
20. $3x^2 + 4y^2 - 24x - 8y + 40 = 0$.
21. $x^2 - 3y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$.
22. $x^2 + y^2 = 4$.
23. $xy + x + 7y - 17 = 0$.
24. $3x^2 - y^2 - 18x + 24 = 0$.
25. $3x = 6 - \sqrt{3y^2 + 9}$; $y \neq 0$.

Grupo 9, p. 63

1. $2x - y + 3 = 0$.
2. $x - y + 3 = 0$.
3. $3x + y + 2 = 0$.
4. $5x + 9y - 38 = 0$.
5. $2x - y = 0$. $3x - 4y + 10 = 0$.
   $7x + 2y - 56 = 0$, $y = 0$.
6. $3x - 2y - 6 = 0$.
7. $\dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{-4} = 1$.
8. $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} = 1$.
9. $x + y - 3 = 0$.
10. $6x + 5y - 82 = 0$.
11. $4x - 7y + 36 = 0$.
13. $3x - 5y + 8 = 0$.
14. AB: $x - y + 3 = 0$; BC: $5x + y - 27 = 0$; AC: $x + 2y = 0$.
15. $5x + y + 9 = 0$.
16. $11x - 5y - 9 = 0$,
    $13x - y - 45 = 0$.
17. (−4, 11), (12, 3), (0, −9).
18. (8/3, 5/3).
19. (19/3, 8/3).
20. (4/3, 8/3).
21. 36.
22. $4x + y - 10 = 0$.
23. (−4, 3), (4, 6), (9, 1), (1, −2).
24. 10.
25. 14/3.
26. 11.
27. $A = 20/19$, $B = 15/19$.
29. $y = mx - am$.

Grupo 10, p. 70

2. $3x + y + 2 = 0$.
3. $5x - 3y - 15 = 0$.
4. $4x + 3y + 13 = 0$.
5. 4.
6. $\dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$.
7. 7/6; −3/4, 9/6.
8. −7/2; 105°57′; 29/4, 10.

9. ± 10.

10. $a = 4, \ b = 7$.

12. $x - 2y + 1 = 0$, $x + 2y - 13 = 0$.

15. $80° 16'$.

16. $5x - y - 11 = 0$, $x + 5y + 3 = 0$.

28. $b^2 x - a^2 y = ab^2 - a^2 b$.

Grupo 11, p. 77

1. $\frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y - 6 = 0$.

2. $\frac{2}{3} x + \frac{-\sqrt{5}}{3} y - 3 = 0$.

3. $143° 8'$.

4. $\frac{12}{13} x + \frac{-5}{13} y - 4 = 0$; $p = 4, \ \omega = 337° 23'$.

5. $\frac{9}{18} \sqrt{13}$.

6. $\pm \frac{3}{2} \sqrt{5}$.

8. $4x + 3y - 25 = 0$, $3x - 4y + 25 = 0$.

9. $x - y + 4\sqrt{2} = 0$, $x - y - 4\sqrt{2} = 0$.

12. $3x + y + 2\sqrt{10} = 0$, $3x + y - 2\sqrt{10} = 0$.

14. $-\frac{1}{\sqrt{26}} x + \frac{5}{\sqrt{26}} y - \frac{17}{\sqrt{26}} = 0$.

15. $3x + 2y + 8\sqrt{13} = 0$, $3x + 2y - 8\sqrt{13} = 0$.

16. $-\frac{3}{\sqrt{13}} x + \frac{-2}{\sqrt{13}} y - \frac{27}{\sqrt{13}} = 0$.

18. $\frac{\sqrt{34}}{4}$

19. $\frac{23}{39} \sqrt{13}$.

20. $\frac{19}{10} \sqrt{10}$.

Grupo 12, p. 85

1. $\frac{33}{41} \sqrt{41}$.

2. $-\frac{16}{5} \sqrt{5}$.

3. $\frac{3}{2} \sqrt{2}$; 9.

4. $\frac{7}{10}$.

5. $\frac{16}{5} \sqrt{5}$.

6. $5x + 12y + 40 = 0$, $5x + 12y - 64 = 0$.

7. $\frac{6 - 3\sqrt{29}}{5}$.

8. $-3, \ 7$.

9. $24x - 10y - 3 = 0$.

10. $\frac{2 + 2\sqrt{7}}{3}$.

11. $x + y - 4 = 0$, $x - y - 2 = 0$.

12. $(2\sqrt{2} - \sqrt{5})x - (\sqrt{2} + \sqrt{5})y + \sqrt{2} + \sqrt{5} = 0$,
$(2\sqrt{2} + \sqrt{5})x - (\sqrt{2} - \sqrt{5})y + \sqrt{2} - \sqrt{5} = 0$.

13. $(\sqrt{17} + 4\sqrt{5})x - (2\sqrt{17} + \sqrt{5})y - 4\sqrt{17} - 4\sqrt{5} = 0$.

17. $4x + 7y + 12 = 0$, $4x - 13y + 12 = 0$.

18. $x - 2y + 8 = 0$, $13x - 6y + 24 = 0$.

20. $y^2 = 8x$.

21. $x^2 = 8y$.

22. $y^2 + 6y + 12x - 15 = 0$, $y + 3 = 0$.

23. $x^2 - 2xy + y^2 + 6x + 2y + 9 = 0$.

24. $8x^2 + 9y^2 - 42x + 72y + 171 = 0$.

25. $x^2 - 8y^2 + 4x - 74y - 139 = 0$.

26. $23x^2 - 48xy + 3y^2 + 170x - 122y + 118 = 0$.

28. 10.

Grupo 13, p. 94

5. $2x - y + 8 = 0.$

6. $12x - 21y - 28 = 0.$

7. $3x - 4y + 12 = 0.$

8. $5x - 12y + 65 = 0, \quad 5x - 12y - 65 = 0.$

9. $2x + 3y + 12 = 0, \quad 2x + 3y - 12 = 0.$

10. $5x - y - 13 = 0.$

11. $9x + 7y - 11 = 0.$

12. $2x - y + 6 = 0, \quad 5x - 2y + 10 = 0.$

13. $4x + 3y - 12 = 0, \quad x + 2y + 2 = 0.$

14. $3x - y - 3\sqrt{2} = 0, \quad 3x - y + 3\sqrt{2} = 0.$

15. $7x + 12y - 42 = 0, \quad 7x + 3y + 21 = 0.$

16. $4x + 3y - 12 = 0, \quad 8x + 15y - 36 = 0.$

17. $\sqrt{5}x + 2y - 9 = 0, \quad y + 3 = 0.$

18. $2x + 3y - 12 = 0, \quad 3x + 2y - 12 = 0.$

19. $x - 4y = 0.$

20. $4x + 5y - 7 = 0.$

21. $3x - y + 5 = 0.$

22. $8x - 3y + 5 = 0.$

23. $5x - 12y + 26 = 0, \quad x = 2.$

24. $x - 4y + 8 = 0, \quad 9x - 4y - 24 = 0.$

25. $3x - y - 18 = 0, \quad x - 2y - 1 = 0.$

Grupo 14, p. 96

3. $41x - 5y - 89 = 0.$

12. 2.

15. $(7, 4)$.

16. 18π.

18. $k_1 = \pm 4, \quad k_2 = \pm 14.$

Grupo 15, p. 102

1. $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 49.$

2. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 10.$

3. $(x - 7)^2 + (y + 6)^2 = 89.$

4. $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4.$

5. $x^2 + (y + 2)^2 = 4.$

6. $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 52.$

8. $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 25.$

9. $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 58.$

10. 7,07.

12. $(x + 1)^2 + y^2 = \frac{324}{25}.$

13. $(x - 2)^2 + \left(y + \frac{7}{8}\right)^2 = \frac{625}{64}.$

14. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1.$

15. $(x - 2)^2 + \left(y - \frac{25}{16}\right)^2 = \frac{625}{256}.$

17. $(x - 7)^2 + y^2 = 45.$

18. $x^2 + \left(y + \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{325}{9}.$

19. $(x - 2)^2 + \left(y + \frac{17}{2}\right)^2 = \frac{629}{4}.$

20. $\left(x - \frac{1}{22}\right)^2 + \left(y - \frac{65}{22}\right)^2 = \frac{6205}{242}.$

21. $x - 2y + 10 = 0.$

22. $x + 2y - 20 = 0.$

23. $x + 2y - 9 = 0, \quad x - 2y + 3 = 0.$

24. $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 8.$

25. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1, \quad (x - 3)^2 + \left(y + \frac{2}{7}\right)^2 = \frac{121}{49}.$

Grupo 16, p. 108

1. Centro $(\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2})$; radio $= \sqrt{5}$. 4. 5π.
2. Punto $(-\frac{7}{2},\ 1)$. 5. $2\sqrt{3}\pi$.
3. Ningún lugar geométrico.
9. $x^2 + y^2 - 7x - 4y = 0$; $(\frac{7}{2},\ 2)$; $\frac{1}{2}\sqrt{65}$.
10. $6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$; $(\frac{8}{3},\ \frac{25}{12})$: $\frac{1}{12}\sqrt{2\,465}$.
11. $7x^2 + 7y^2 - 22x + 52y + 21 = 0$; $(\frac{11}{7},\ -\frac{26}{7})$; $\frac{5}{7}\sqrt{26}$.
17. $D_1 = D_2,\quad E_1 = E_2,\quad F_1 \neq F_2$. 18. $(x-2)^2 + (y+\frac{5}{2})^2 = 9$.
19. $5x + 4y - 40 = 0$.
20. $4x - 3y - 32 = 0,\quad 3x + 4y - 49 = 0$.
21. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 29$.
22. $x^2 + (y-6)^2 = 25,\quad (x-6)^2 + (y+2)^2 = 25$.
23. $(x-8)^2 + (y-8)^2 = 13,\quad (x-4)^2 + (y-2)^2 = 13$.
24. $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$. 25. $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 20$.
26. $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25,\quad (x-3)^2 + (y-6)^2 = 25$.
28. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4,\quad \left(x - \frac{227}{747}\right)^2 + \left(y - \frac{421}{747}\right)^2 = \left(\frac{14}{747}\right)^2$.
29. $(x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.
30. $(x+\frac{2}{3})^2 + (y-\frac{5}{3})^2 = \frac{16}{9},\quad (x-\frac{8}{3})^2 + (y-\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$,
$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$. 31. $k = -1,\ 25$.
32. $5x - y + 5 = 0,\quad 5x - y - 47 = 0$. 33. $3\sqrt{2}$.
34. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0,\quad 4x^2 + 4y^2 - 384x + 37y + 2\,119 = 0$.
35. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 20,\quad \left(x - \frac{19}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{1\,445}{16}$.

Grupo 17, p. 118

6. $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 33 = 0$. 8. $5x^2 + 5y^2 - 38y - 115 = 0$.
7. $x^2 + y^2 - 38x + 167 = 0$. 9. $2x^2 + 2y^2 - 20x - 16y + 41 = 0$.
10. $x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0,\quad x^2 + y^2 - 7x + 3y + 2 = 0$.
11. $x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0,\quad 9x^2 + 9y^2 + 88x - 106 = 0$.
13. $x^2 + y^2 - 8x - 16y + 35 = 0$. 14. $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$.
15. $x^2 + y^2 + x + 2y - 10 = 0,\quad x^2 + y^2 - 5x - 10y + 20 = 0$.
16. $x^2 + y^2 - x - 2y = 0,\quad x^2 + y^2 - 6x - 12y + 25 = 0$.
17. $x^2 + y^2 + 16x - 16y + 24 = 0$. 21. $7x - y - 16 = 0$; $2\sqrt{2}$.
19. $24x - 28y + 3 = 0$. 23. $\frac{2}{3}\sqrt{69}$.
28. $(\frac{1}{8},\ -\frac{21}{8})$.

Grupo 18, p. 127

1. $2x - 3y + 20 = 0$. 5. $x - y + 3 = 0,\quad x - y + 11 = 0$.
2. $3x + 2y - 9 = 0,\quad 3x + 2y + 17 = 0$. 6. $x + 4y + 20 = 0,\quad x + 4y - 14 = 0$.
3. $2x - y + 11 = 0,\quad x + 2y - 12 = 0$. 7. $6x + y - 32 = 0,\quad x - 6y - 30 = 0$.
4. $2x + 3y - 21 = 0$. 13. $46° 24'$.

14. $-5 < k < 5$; $k = \pm 5$; $k > 5$, $k < -5$.
15. $-\frac{12}{5} < m < 0$; $m = 0$, $-\frac{12}{5}$; $m > 0$, $m < -\frac{12}{5}$.
17. $2x - 3y - 21 = 0$.
18. $3x + 5y - 34 = 0$; $5x - 3y = 0$; $\frac{5}{3}\sqrt{34}$; $\sqrt{34}$; $\frac{25}{3}$; 3.
19. $x - 4y + 12 = 0$; $4x + y - 3 = 0$; $3\sqrt{17}$; $\frac{3}{4}\sqrt{17}$; 12; $\frac{3}{4}$.
20. $7x - 4y + 26 = 0$; $4x + 7y - 13 = 0$; $\frac{3}{7}\sqrt{65}$; $\frac{3}{4}\sqrt{65}$; $\frac{13}{7}$; $\frac{23}{4}$.
21. $82° 14'$.
22. $78° 41'$.

Grupo 19, p. 131

7. $x^2 + y^2 - x = 0$.
8. $3x^2 + 3y^2 + 16x - 20y + 20 = 0$.
9. $8x^2 + 8y^2 - 28x + 38y + 55 = 0$.
10. $5x^2 + 5y^2 - 16x - 28y + 27 = 0$.
11. $3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$.
14. $3x^2 + 3y^2 - 32x + 57 = 0$.
15. $2x^2 + 2y^2 + 2x - 10y + 9 = 0$.
21. $x - 7y + 34 = 0$.

Grupo 20, p. 138

1. $x'^2 + y'^2 = 4$.
2. $3x'^2 + 2y'^2 = 6$.
3. $4x'^2 - y'^2 = 4$.
4. $y'^2 - x'^2 = 0$.
5. $x'y' = 1$.
6. $2x'^2 + y'^2 = 4$.
7. $3x'^2 + 2y'^2 = 6$.
8. $3x'^2 - 2y'^2 = 12$.
9. $x'y' = 8$.
10. $2x'^2 - y'^2 = 0$.
11. $x'^2 + y'^2 = 5$.
12. $2x'^2 + 5y'^2 = 10$.
13. $x'^2 - 3y'^2 = 3$.
14. $2x'^2 + 3y'^2 = 1$.
15. $2x'^2 - 3y'^2 = 1$.
16. $x'^2 - 3y' = 0$.
17. $x'^2 + y'^2 = 2$.
18. $2x'^2 + y'^2 = 2$.
19. $y'^2 - 6x'^2 = 9$.
20. $x'y' = 2$.

Grupo 21, p. 142

1. $(\frac{3}{2}\sqrt{3} - 2, -\frac{3}{2} - 2\sqrt{3})$.
2. $(0, -1)$, $(1, 0)$.
3. $\sqrt{29}x' - 3 = 0$.
4. $4y'^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' = 0$.
5. $3\sqrt{3}x'^2 - \sqrt{3}y'^2 - 2 = 0$.
6. $11x'^2 + y'^2 - 8 = 0$.
7. $4x'^2 - y'^2 - 4 = 0$.
8. $x'^4 + y'^4 = 16$.
9. $\sqrt{5}y' + 2 = 0$.
10. $\sqrt{5}x' - 2 = 0$.
11. $5x'^2 + 2x' - y' - 1 = 0$.
12. $21x'^2 + 15y'^2 - 10 = 0$.
13. $6x'^2 + y'^2 - 2 = 0$.
14. $x' - 3y' = 0$, $x' + 3y' = 0$.
15. $y' = \sqrt{2}$, $y' = -\sqrt{2}$.
16. $5x'^2 + 4x' - 3y' = 0$.
20. $5x^2 - 26xy + 5y^2 + 72 = 0$.

Grupo 22, p. 147

1. $2x''^2 - 3y''^2 - 6 = 0$.
2. $x''^2 + 4y''^2 - 4 = 0$.
3. $x''^2 - 4y'' = 0$.
5. $3x''^2 + y''^2 - 3 = 0$.
10. $\left(\frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}\right)$, $B^2 - 4AC \neq 0$.
11. $(-\frac{5}{2} - \sqrt{3}, \frac{5}{2}\sqrt{3} - 1)$.
12. $(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

13. $(\frac{7}{2}\sqrt{3},\ \frac{13}{2} + 3\sqrt{3})$.
14. $x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 4y = 0$.
16. $x^2 + 2xy + y^2 + 6x - 6y + 15 = 0$, $x''^2 - 3\sqrt{2}y'' = 0$.
17. $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8 = 0$, $x'^2 + 2y'^2 - 4 = 0$.

Grupo 23, p. 153

1. $(3, 0)$; $x = -3$; 12.
11. $y^2 = 20x$.
2. $(0, 3)$; $y = -3$; 12.
12. $y^2 = -8x$; $(-2, 0)$; $x = 2$; 8.
3. $(-2, 0)$; $x = 2$; 8.
13. $4\sqrt{5}$.
8. $y^2 = 12x$.
14. $\frac{25}{2}$.
9. $x^2 = -12y$.
16. $\frac{25}{4}$.
10. $x^2 = -20y$.
18. $x^2 + y^2 = 5y$.
22. $y^2 - 4x - 8y + 24 = 0$; $y'^2 - 4x' = 0$.
23. $x^2 - 6x + 12y + 33 = 0$; $x'^2 + 12y' = 0$.
24. $y^2 + 8x - 16 = 0$; $y'^2 + 8x' = 0$.
25. $x^2 - 2xy + y^2 + 14x + 6y - 21 = 0$; $y''^2 + 5\sqrt{2}x'' = 0$.

Grupo 24, p. 159

7. $(y - 3)^2 = 12(x + 4)$; $x = -7$; $y = 3$.
8. $(x - 3)^2 = -8(y - 3)$; $y = 5$; 8.
9. $(x - 4)^2 = -8(y + 1)$.
10. $y^2 - 20x - 6y + 9 = 0$.
11. $(y - \frac{5}{2})^2 = 12(x + 2)$; $(-2, \frac{5}{2})$; $(1, \frac{5}{2})$; $x = -5$; $y = \frac{5}{2}$; 12.
12. $(x + \frac{4}{3})^2 = -8y$; $(-\frac{4}{3}, 0)$; $(-\frac{4}{3}, -2)$; $y = 2$; $x = -\frac{4}{3}$; 8.
21. $(x - 3)^2 = 4(4 - k)(y - k)$.
25. $y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$.
23. $y = 3x^2 - 2x$.
29. $y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.
24. $y^2 - x + 2y = 0$.
30. $x^2 - 4y - 4 = 0$; $x^2 + 8y - 16 = 0$.

Grupo 25, p. 163

1. $x - y + 1 = 0$; $x + y - 3 = 0$; $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; 2; 2.
2. $x + 2y = 0$; $2x - y + 15 = 0$; $3\sqrt{5}$; $\frac{3}{5}\sqrt{5}$; 6; $\frac{3}{5}$.
3. $2x - y + 3 = 0$; $x + 2y + 4 = 0$; $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$, $\frac{1}{2}$; 2.
9. $x + y + 2 = 0$.
14. $36° 2'$.
10. $x + 3y - 2 = 0$.
15. *a*) $k < 8$; *b*) $k = 8$; *c*) $k > 8$.
11. $x - 2y - 1 = 0$.
16. $30° 58'$; $71° 34'$.
12. $x + 2y - 3 = 0$; $3x - 2y + 15 = 0$.
17. $63° 26'$.
13. $x + 2y - 9 = 0$; $3x - 2y + 5 = 0$.
30. $y = 4$.

Grupo 26, p. 171

1. Valor mín. = 3 para $x = -2$.
2. Valor máx. = 1 para $x = 4$.
3. Valor mín. = 0 para $x = 3$.
5. $x > 1/4$; $x < -3$.
6. Para todos los valores de x excepto 4.
7. Para ningún valor de x.
9. Positivo, cuando $x < 1$ y $x > 4$; negativo, cuando $1 < x < 4$; cero, cuando $x = 1,\ 4$; mín. $= -9/4$ cuando $x = 5/2$.
10. Positivo, cuando $-3 < x < 1/2$; negativo, cuando $x < -3$ y $x > 1/2$; cero, cuando $x = -3,\ 1/2$; máx. $= 49/8$ cuando $x = -5/4$.
11. Positivo, para todos los valores de x excepto 2; cero, cuando $x = 2$; mín. = 0 para $x = 2$.
16. $ax^2 + 4ax + 4a + 4,\quad a < 0$.
18. Cada cateto mide 7 cm.
19. 4, 4.
20. Cuadrado de 5 cm de lado.
21. $1/2$.

Grupo 27, p. 178

6. Vértices $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$; focos $(0,\ \sqrt{5})$, $(0,\ -\sqrt{5})$; $2a = 6$, $2b = 4$; $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; longitud del lado recto $= 8/3$.
7. Vértices $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$; focos $(\sqrt{5},\ 0)$, $(-\sqrt{5},\ 0)$; $2a = 6$, $2b = 4$; $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; longitud del lado recto $= 8/3$.
8. Vértices $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$; focos $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$; $2a = 10$, $2b = 8$; $e = 3/5$; longitud del lado recto $= 32/5$.
10. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$.
11. $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{36} = 1$.
12. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.
13. $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{27} = 1$.
14. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{49} = 1$; $\quad e = \dfrac{2\sqrt{10}}{7}$.
15. $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.
16. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.
21. $6\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$.
24. $25x^2 + 16y^2 - 150x - 160y + 225 = 0$; $\quad \dfrac{x'^2}{16} + \dfrac{y'^2}{25} = 1$.
25. $7x^2 + 16y^2 - 14x + 32y - 89 = 0$; $\quad \dfrac{x'^2}{16} + \dfrac{y'^2}{7} = 1$.
26. $4x^2 + y^2 - 16x - 4y + 4 = 0$; $\quad \dfrac{x'^2}{4} + \dfrac{y'^2}{16} = 1$.
27. $4x^2 + 3y^2 = 48$.
28. $x^2 + 4y^2 = 9$.

Grupo 28, p. 184

6. $\dfrac{(x-4)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{8} = 1$; focos $(5,\ 1)$, $(3,\ 1)$; $2a = 6$, $2b = 4\sqrt{2}$; longitud del lado recto $= 16/3$.
7. $\dfrac{(x+4)^2}{12} + \dfrac{(y+4)^2}{16} = 1$; $\quad e = 1/2$.

8. $\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y+6)^2}{9}=1$; focos $(5+\sqrt{7},\ -6)$, $(5-\sqrt{7},\ -6)$; $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

9. $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$; vértices $(3,\ 10)$, $(3,\ 0)$; $e=\frac{3}{5}$.

10. $\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{10}=1$; $e=\frac{\sqrt{15}}{5}$; focos $(-2+\sqrt{15},\ -1)$, $(-2-\sqrt{15},\ -1)$.

11. $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+4)^2}{7}=1$; $e=\frac{3}{4}$; $2b=2\sqrt{7}$; longitud del lado recto $=\frac{7}{2}$.

13. $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{1}=1$; centro $(3,\ -2)$; vértices $(5,\ -2)$, $(1,\ -2)$; focos $(3+\sqrt{3},\ -2)$, $(3-\sqrt{3},\ -2)$; $2a=4$, $2b=2$; longitud del lado recto $=1$; $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$; centro $(-4,\ 1)$; vértices $(-1,\ 1)$, $(-7,\ 1)$; focos $(-4+\sqrt{5},\ 1)$, $(-4-\sqrt{5},\ 1)$; $2a=6$, $2b=4$; longitud del lado recto $=\frac{8}{3}$; $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

16. $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$; centro $(0,\ 1)$; vértices $(0,\ 4)$, $(0,\ -2)$; focos $(0,\ 1+\sqrt{5})$, $(0,\ 1-\sqrt{5})$; $2a=6$, $2b=4$; longitud del lado recto $=\frac{8}{3}$; $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

20. $x^2+4y^2+2x-24y+33=0$.

22. $4x^2+9y^2-16x-18y-11=0$.

23. $3x^2+4y^2+6x-8y-5=0$; $16x^2+12y^2+18x-24y-15=0$.

24. 3, 3.

25. $x+2y-9=0$.

26. $3x^2+4y^2-24x-16y+52=0$.

27. $x^2+4y^2+4x+16y+4=0$.

28. $4x^2+y^2-24x-2y+28=0$.

29. $4x^2+y^2-24x=0$.

30. $100x^2+84y^2-168y-441=0$; $36x^2+20y^2-40y-25=0$.

Grupo 29, p. 188

6. $2x-3y-5=0$; $3x+2y-1=0$; $\frac{1}{2}\sqrt{13}$; $\frac{1}{3}\sqrt{13}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$.

7. $9x+5y-23=0$; $5x-9y-1=0$; $\frac{1}{9}\sqrt{106}$; $\frac{1}{5}\sqrt{106}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{9}{5}$.

8. $10x-5y-4\sqrt{15}=0$; $10x-5y+4\sqrt{15}=0$.

9. $x-y-1=0$; $3x-3y+13=0$.

10. $x+y-2=0$; $9x-191y-218=0$.

11. *a*) $-7<k<\frac{58}{3}$; *b*) $k=-7,\ \frac{58}{3}$; *c*) $k<-7,\ k>\frac{58}{3}$.

12. $68^\circ\,12'$.

20. $(1,\ 1)$, $(-\frac{13}{9})$, $\frac{29}{9})$.

22. $3x+2y-2=0$.

Grupo 30, p. 196

6. Vértices $(2, 0)$, $(-2, 0)$; focos $(\sqrt{13}, 0)$, $(-\sqrt{13}, 0)$; $2a = 4$, $2b = 6$; $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$; longitud del lado recto $= 9$.

7. Vértices $(3, 0)$, $(-3, 0)$; focos $(\sqrt{13}, 0)$, $(-\sqrt{13}, 0)$; $2a = 6$, $2b = 4$; $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$; longitud del lado recto $= \frac{8}{3}$.

8. Vértices $(0, 2)$ $(0, -2)$; focos $(0, \sqrt{13})$, $(0, -\sqrt{13})$; $2a = 4$, $2b = 6$; $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$; longitud del lado recto $= 9$.

10. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; $e = \frac{3}{2}$.

11. $72y^2 - 9x^2 = 200$; $\frac{80}{3}$.

12. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$; $e = \sqrt{2}$.

13. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$; focos $(0, 6)$, $(0, -6)$.

14. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 1$.

15. $y^2 - 3x^2 = 1$.

16. $4x^2 - 5y^2 = 16$.

17. $5x^2 - 4y^2 + 40x + 24y + 24 = 0$; $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{5} = 1$.

18. $5x^2 - 4y^2 - 30x + 32y - 39 = 0$; $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{5} = 1$.

23. 5, 13.

24. $3x^2 - y^2 = 27$.

25. $4x^2 - y^2 = 36$.

Grupo 31, p. 202

4. $2x - \sqrt{5}y = 0$, $2x + \sqrt{5}y = 0$.

5. $(3, 2)$, $(-\frac{3}{2}, 1)$.

6. $2x^2 - 9y^2 = 9$.

7. $4y^2 - 7x^2 = 8$.

8. 4.

14. $xy = 5$.

16. Vértices $(0, 3)$, $(0, -3)$; focos $(0, \sqrt{13})$, $(0, -\sqrt{13})$; $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Grupo 32, p. 206

6. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$; focos $(4, 3)$, $(-2, 3)$; $2a = 4$; $2b = 2\sqrt{5}$; longitud del lado recto $= 5$.

7. $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{3} = 1$; focos $(-2, -1 + 2\sqrt{3})$, $(-2, -1 - 2\sqrt{3})$; $e = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

8. $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{8} = 1$; $2b = 4\sqrt{2}$; $e = \sqrt{3}$.

9. $\frac{(y+5)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{5} = 1$; longitud del lado recto $= 5$; $e = \frac{3}{2}$.

11. $\frac{y^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$; focos $(-3, \sqrt{13})$, $(-3, -\sqrt{13})$; $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

14. $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1$; centro $(2, 2)$; vértices $(5, 2)$, $(-1, 2)$; focos $(2+\sqrt{10}, 2)$, $(2-\sqrt{10}, 2)$; $2a = 6$; $2b = 2$; longitud del lado recto $= 2/3$; $e = \frac{\sqrt{10}}{3}$; asíntotas: $x+3y-8=0$, $x-3y+4=0$.

15. $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$; centro $(-4, 2)$; vértices $(-4, 4)$, $(-4, 0)$; focos $(-4, 2+\sqrt{13})$, $(-4, 2-\sqrt{13})$; $2a = 4$; $2b = 6$; longitud del lado recto $= 9$; $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$; asíntotas: $2x+3y+2 = 0$, $2x - 3y + 14 = 0$.

16. Dos rectas que se cortan: $x + 2y - 1 = 0$, $x - 2y - 1 = 0$.

18. $\frac{y^2}{3} - \frac{(x+5)^2}{1} = 1$; centro $(-5, 0)$; vértices $(-5, \sqrt{3})$, $(-5, -\sqrt{3})$; focos $(-5, 2)$, $(-5, -2)$; $2a = 2\sqrt{3}$; $2b = 2$; longitud del lado recto $= \frac{2}{3}\sqrt{3}$; $e = \frac{2}{3}\sqrt{3}$; asíntotas: $\sqrt{3}x + y + 5\sqrt{3} = 0$, $\sqrt{3}x - y + 5\sqrt{3} = 0$.

20. $36° 52'$.

21. $4x^2 - y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$.

22. $x^2 - 8y^2 - 6x - 22y + 4 = 0$.

23. $3x^2 - y^2 + 20x - 2y + 11 = 0$.

24. $3x^2 - y^2 - 16x + 16 = 0$, $3x^2 - y^2 - 8x = 0$.

Grupo 33, p. 208

5. $3x - y - 2 = 0$, $x + 3y - 4 = 0$, $\frac{\sqrt{10}}{3}$, $\sqrt{10}$, $1/3$, 3.

6. $5x - 8y - 4 = 0$, $8x + 5y - 42 = 0$, $\frac{2}{5}\sqrt{89}$, $\frac{\sqrt{89}}{4}$, $16/5$, $5/4$.

7. $15x - 8y - 22 = 0$, $8x + 15y - 31 = 0$, $17/15$, $17/8$, $8/15$, $15/8$.

8. $x - y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$.

9. $23° 23'$.

10. $m = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

23. $6x + 8y + 3 = 0$.

Grupo 34, p. 219

6. $x''^2 - 4y''^2 = 4$.

7. $y''^2 - 4x'' = 0$.

8. Dos rectas que se cortan.

9. Punto.

10. Ningún lugar geométrico.

12. Dos rectas paralelas.

14. $x''^2 + 2y''^2 = 2$.

15. Una recta.

Grupo 35, p. 225

1. $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$.

2. $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 18x + 36y + 45 = 0$.

4. $3x^2 - 12xy - 13y^2 - 18x + 6y + 72 = 0$.

5. $7x^2 - 6xy + 15y^2 - 14x + 102y + 151 = 0.$

7. $(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$. 8. $(-\frac{2}{3}, -\frac{7}{3})$.

12. $(2, 0)$, $2x - 9 = 0$; $(-2, 0)$, $2x + 9 = 0$.

13. $(5, 0)$, $5x - 9 = 0$; $(-5, 0)$, $5x + 9 = 0$.

14. $(0, 2)$, $2y - 5 = 0$; $(0, -2)$, $2y + 5 = 0$.

15. $(0, 3)$, $3y - 7 = 0$; $(0, -3)$, $3y + 7 = 0$.

16. $(-3, 1)$, $4x - 29 = 0$; $(5, 1)$, $4x + 21 = 0$.

Grupo 36, p. 231

1. $2x + y - 4 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$.
2. $3x - y - 2 = 0$, $9x - 3y + 22 = 0$.
3. $3x - 2y - 5 = 0$, $7x - 6y - 21 = 0$.
4. $3x - y - 2 = 0$; $x + 3y - 4 = 0$; $\frac{\sqrt{10}}{3}$; $\sqrt{10}$; $\frac{1}{3}$; 3.
5. $x + y - 1 = 0$, $3x + 3y + 1 = 0$.
6. $29° 45'$; $47° 29'$.
13. $x^2 + xy - y^2 + 2x - 3y + 5 = 0$.
14. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$.
15. $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y = 4$; $169x^2 + 26xy + y^2 + 27x - 146y = 196$.
16. $x^2 + xy + y^2 - 2x - y = 0$.
18. $9x^2 + 33xy + 9y^2 - 8x + 22y - 1 = 0$.
19. $4x^2 - 17xy - 10y^2 - 24x + 37y + 10 = 0$.
21. $4x^2 + 4xy + y^2 + 12x + 20y + 8 = 0$,
    $4x^2 - 4xy + y^2 - 12x - 20y - 16 = 0$.
22. $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x + 3y - 5 = 0$,
    $2x^2 + 12xy + 18y^2 + 23x - 5y - 13 = 0$.
27. $3x^2 + 4y^2 = 48$, $3x^2 - y^2 = 3$.

Grupo 37, p. 243

5. $\left(\sqrt{2}a, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\sqrt{2}a, \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\sqrt{2}a, \frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(\sqrt{2}a, \frac{7\pi}{4}\right)$.
6. $(1, 120°)$, $(1, 240°)$.
8. Circunferencia: $r = 2$.
9. Línea recta: $\theta = \frac{\pi}{4}$.
10. $P_1(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, -\frac{5}{2}\sqrt{2})$, $P_2(\sqrt{3}, 1)$, $P_3(\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{3}{2})$, $P_4(-3, 3)$.
11. $(\sqrt{13}, 123° 41')$, $(\sqrt{13}, 326° 19')$.
12. $r = \pm 2$.
14. $2r^2 + 2r \cos\theta - 6r \operatorname{sen}\theta + 3 = 0$.
15. $\theta = \operatorname{arc\,tg} 2$.
16. $r^2 \cos 2\theta = 4$.
17. $r = 2 \operatorname{sen}\theta$.
18. $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 4$.

19. $r = \dfrac{2}{1 - \operatorname{sen}\theta}$.

20. $r\cos(\theta - \omega) = p$.

22. $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

24. $y^2 - 8x - 16 = 0$.

25. $3x^2 + 4y^2 - 4x - 4 = 0$.

27. $y^2 = 4x^3$.

28. $y^2 + 8x - 16 = 0$.

29. $(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$.

30. $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$.

Grupo 39, p. 252

1. $\left(1, \dfrac{\pi}{6}\right)$, $\left(1, \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

2. $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(2, \dfrac{5\pi}{3}\right)$.

3. $\left(3, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(3, \dfrac{5\pi}{4}\right)$.

4. $\left(4\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

5. $(\sqrt{6}, 35° 16')$, $(\sqrt{6}, 324° 44')$.

6. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, Polo.

7. $\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{6}\right)$, $\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$, Polo.

8. $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$, Polo.

9. $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$, Polo.

10. $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(2, \dfrac{5\pi}{3}\right)$.

11. $\left(4, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(4, \dfrac{5\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$.

12. $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $(0{,}347,\ 159° 40')$.

13. 6,46.

15. 7,19.

23. 0,966.

24. 2,35.

Grupo 40, p. 259

4. $r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = 4$.

5. $r\cos(\theta - \omega) = 1$, en donde $\omega = \operatorname{arc\,tg}(-4/3)$ está en el segundo cuadrante.

7. $r\cos(\theta - \omega) = 2$, en donde $\omega = \operatorname{arc\,tg}(3/4)$ está en el primer cuadrante.

9. $r\cos\theta = -3$.

10. $r\operatorname{sen}\theta = 2$.

12. $2r\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3} - \theta\right) + \sqrt{2}\,r\operatorname{sen}\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{12}$.

14. $r^2 - 12r\cos\left(\dfrac{3\pi}{4} - \theta\right) + 20 = 0$.

15. $r^2 - 6r\cos\left(\dfrac{7\pi}{6} - \theta\right) + 6\sqrt{3} - 4 = 0$.

20. Centro $(2, 0)$, radio $= 2$.

21. Centro $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$, radio $= 2$.

22. Centro $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$, radio $= 3$.

23. Centro $\left(1, \dfrac{2\pi}{3}\right)$, radio $= 2$.

24. $r = -2\cos\theta$; centro $(1, \pi)$, radio $= 1$.

25. $r = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$; centro $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, radio $= \frac{\sqrt{2}}{2}$.

30. Parábola; vértice $(5/4, \pi)$; longitud del lado recto $= 5$; ecuación rectangular: $4y^2 - 20x - 25 = 0$.

31. Elipse; centro $\left(\frac{3}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$; vértices $\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$; $2a = 9/2$; $2b = 3\sqrt{2}$; longitud del lado recto $= 4$; ecuación rectangular: $9x^2 + 8y^2 + 12y - 36 = 0$.

32. Hipérbola: centro $(1, 0)$; vértices $(1/2, 0)$, $(-3/2, \pi)$; $2a = 1$; $2b = \sqrt{3}$; longitud del lado recto $= 3$; ecuación rectangular: $12x^2 - 4y^2 - 24x + 9 = 0$.

33. Vértice $\left(\frac{p}{2}, \pi\right)$; directriz: $r\cos\theta = -p$.

Grupo 41, p. 263

1. Espiral de Arquímedes, $r = k\theta$.
2. Espiral hiperbólica o recíproca, $r\theta = k$.
3. Espiral parabólica, $r^2 = k\theta$.
4. Espiral logarítmica o equiangular, $\log r = k\theta$.
5. Lituus, $r^2\theta = k$.
6. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$.
7. Circunferencia, $r = a\cos\theta$.
8. Circunferencia, $r = \frac{4}{3}a\cos\theta$.
9. Circunferencia, $r = \frac{3}{2}a\cos\theta$.
10. Rosa de cuatro hojas, $r = a\operatorname{sen} 2\theta$.
11. $r = 2a\cos^2\theta$.
12. $r = 2a\operatorname{sen}^2\theta$.
17. $r = 2a\operatorname{sen}\theta + k$.
18. Circunferencia, $r = 2a(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$.
19. $r = 2a\cos\theta + a\operatorname{sen} 2\theta$.
20. $r = 2a\cos\theta(1 + \cos\theta)$.
21. Cardioide.

Grupo 42, p. 269

5. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
7. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.
8. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.
9. $xy = 6$.
10. $x^2 = 2y + 4$.
11. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.
14. $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$.
15. $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1$.
17. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$.
20. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
21. $x^2 + y^2 = a^2$.
25. $20x^2 - 4xy + 13y^2 = 256$.
28. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.
29. $x^2y^2 + b^2x^2 = a^2y^2$.
31. $2y^2 + x - 1 = 0$.
33. $2x^2 + y - 1 = 0$.
35. $xy^2 - x + 2y = 0$.
38. $4x^3 - 3x + y = 0$.

Grupo 43, p. 278

8. $x = 2 - {}^{12}\!/_{13}t, \quad y = -1 + {}^{5}\!/_{13}t.$

13. $x = a \operatorname{arc\,cos} \dfrac{a - y}{b} \mp \sqrt{b^2 - a^2 + 2ay - y^2}.$

20. $x = a \cos\theta + a\theta \operatorname{sen}\theta, \quad y = a \operatorname{sen}\theta - a\theta\cos\theta.$

Grupo 44, p. 283

1. $x^2 + y^2 = 2a^2.$
2. Directriz: $x = -p.$
3. Círculo director: $x^2+y^2=a^2-b^2.$
4. $x^2 + y^2 + ax = 0.$
5. $b^2x^2 + a^2y^2 + ab^2x = 0.$
6. $2x^2 - 2xy + 2x - y = 0.$
7. $(k^2+k)^2x^2+(k+1)^2y^2=k^2l^2.$
8. El eje Y.
9. $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$
11. $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2.$
15. $kx = p.$
16. $kx^2 - y^2 = ka^2 - b^2.$
17. $x^2 - y^2 + 6px + p^2 = 0.$
18. $x^2 + y^2 = a^2.$
19. $x^2 + y^2 = a^2.$
20. $(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2).$

Grupo 49, p. 320

8. 18; $\sqrt{22}$.
11. 35° 16′.
20. $3\sqrt{5}$.

Grupo 50, p. 326

1. $3\sqrt{6}$.
3. 21,91.
5. $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$
7. 7 unidades del origen.
8. $2\sqrt{5}$ del eje X; $\sqrt{13}$ del eje Y; 5 del eje Z.
11. $3\sqrt{10}$ sobre el plano XY.
12. 3.
14. 3; -1.
15. Superficie esférica: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 8z - 4 = 0.$
16. Plano: $10x - 4y - 4z - 1 = 0.$
18. $(7/4,\ 7/4,\ 1/4).$
19. $(7/3,\ 1/3,\ 5)$; $(-1/3,\ 5/3,\ 3)$; $(1,\ 1,\ 4).$
20. $(-2,\ 1,\ 4).$
21. 3.
22. $x = 9, \quad z = 5.$
23. $(3,\ 0,\ 3).$

Grupo 51, p. 332

1. $\dfrac{\sqrt{3}}{15}, \quad -\dfrac{7}{15}\sqrt{3}, \quad \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$
2. $-2/3, \quad 2/3, \quad -1/3.$
3. $\pm 2/3.$
4. $\dfrac{1}{2}, \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad 0.$
5. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \dfrac{1}{2}, \quad \dfrac{1}{2}.$

6. $\pm \frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \pm \frac{1}{2}.$
7. $\pm \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}.$
8. $54° 44'$; $125° 16'$.
10. $45°$ ó $135°$.
11. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0.$
14. $(5, 6, 0)$.
15. $(2, 0, 9)$.
16. $\pm \frac{2}{21}\sqrt{21}, \quad \pm \frac{4}{21}\sqrt{21}, \quad \mp \frac{1}{21}\sqrt{21}.$
17. $\frac{1}{11}\sqrt{11}, \quad \frac{1}{11}\sqrt{11}, \quad -\frac{3}{11}\sqrt{11}.$

Grupo 52, p. 339

1. $\frac{1}{14}\sqrt{21}$.
2. $76° 14'$.
4. $88° 17'$.
5. $100° 59'$.
8. $65° 54'$.
9. $25° 45'$; $107° 17'$; $46° 58'$.
10. $53° 58'$; $36° 2'$.
11. 6,8.
13. 12.
14. 21.
15. $[2, -5, -11]$.
16. $[7, 56, 66]$.
17. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z-1}{4}.$
18. $\frac{x-4}{2} = \frac{y-11}{3} = \frac{z+2}{-1}.$
19. $x = 1, \quad z = 4.$
20. $(-2, 3, 0)$.
21. $(0, 2, -3)$.
22. $[6, -7, 1]$ ó $[110, -71, 47]$.
23. $(7, -4, 4)$.
24. $y = -2, \quad z = 2.$
25. $(4, 2, 5)$.

Grupo 53, p. 347

1. $x - 4y + 2z - 15 = 0.$
2. $3x - 12y - 4z + 11 = 0.$
3. $x - 2y + z - 6 = 0.$
4. $3x + 2y - 6z - 16 = 0.$
5. $3x - 3y + 4z + 2 = 0.$
6. $3x - 7y + 3z + 11 = 0.$
7. $5x + 2y - z = 17.$
9. $x + \sqrt{2}y + z - 8 + \sqrt{2} = 0$; $x + \sqrt{2}y - z - 2 + \sqrt{2} = 0.$
10. $z = 9.$
11. $y + 5 = 0.$
12. $x - 3y + 8z - 15 = 0.$
20. 21.
22. 24.
23. 20.
24. 42.
25. 20.

Grupo 54, p. 355

1. $3x - 5y - 15z + 15 = 0.$
3. $x + 8y + 13z - 22 = 0.$
6. $81° 50'$.
7. $81° 7'$.
13. $4y - 3z + 26 = 0.$
14. $2x - 3y = 10.$
15. $x + 2y + z + 6 = 0.$
16. $5x - 9y - 8z - 30 = 0.$
18. $7x + 8y - z - 10 = 0.$
19. $x + 7y - 3z + 4 = 0.$
21. $11y + 4z - 5 = 0.$
22. $x + 4y = 0.$

23. $5x + y - 8z - 24 = 0.$

24. $5x + 5y + (8 + 3\sqrt{6})z - 20 = 0;\quad 5x + 5y + (8 - 3\sqrt{6})z - 20 = 0.$

25. $11x - 7y - 16z - 64 = 0.$

26. $k = 6.$

27. $21x + (40 + 3\sqrt{170})y - 7z - 28 = 0;\quad 21x + (40 - 3\sqrt{170})y - 7z - 28 = 0.$

28. $9x + 6y - z = 1.$

Grupo 55, p. 363

1. $\sqrt{2}x + y + z - 10 = 0;\quad \sqrt{2}x + y - z - 10 = 0.$

7. $2x - 6y - 3z + 35 = 0;\quad 2x - 6y - 3z - 35 = 0.$

8. $k = \pm 2.$

9. $\frac{4}{9}x + \frac{1}{9}y - \frac{8}{9}z - 2 = 0.$

10. $5.$

11. $\frac{3}{2}\sqrt{6}.$

12. $1.$

13. $-2.$

14. $-\frac{24}{13}.$

15. $5.$

16. $7.$

18. $6.$

19. $33.$

20. $2x - y + 2z - 15 = 0;\quad 2x - y + 2z - 3 = 0.$

21. $k = 3,\ \frac{3}{2}.$

24. $7x - y + 2z + 9 = 0;\quad 5x + 7y - 14z + 27 = 0.$

25. $131x + 19y - 10z = 0;\quad 23x - 107y + 98z + 396 = 0.$

26. $4x + 3y - 2z = 0;\quad 5y - 6z + 12 = 0.$

33. $40.$

Grupo 56, p. 368

1. $2x - 3y + 2z - 22 = 0.$

2. $2x - y + z + 7 = 0.$

3. $4x - 2y + 3z - 21 = 0.$

4. $x + 3y - 2z - 6 = 0.$

5. $x - 2y + 2z - 6 = 0,\quad x - 2y + 2z + 6 = 0.$

6. $7x + 3y - 2z + 8 = 0.$

7. $3x + 2y + 4z \pm 12 = 0.$

8. $3x - y - 10 = 0.$

9. $x + 7y = 4.$

10. $6x + 7y - 5z = 0.$

11. $x - 2y + 2z = 6;\quad 9x - 12y + 8z = 34.$

12. $2x - 3y + 6z - 21 = 0;\quad 92x + 327y - 96z - 1\,059 = 0.$

13. $2x + 2y + z - 19 = 0.$

14. $8x - 4y + z - 1 = 0;\quad 2x - y - 2z + 5 = 0.$

15. $x - 2y + 3z + 2 = 0.$

16. $3x - y + 2z + 7 = 0.$

17. $5x + y + 8z - 14 = 0.$

21. $(2, -1, 1).$

23. $(1, 0, -1).$

24. $4x - 2y + z = 11.$

25. $2y + z + 1 = 0.$

Grupo 57, p. 375

2. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{6}$.
3. $\frac{x-4}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{3}$.
5. $\frac{x+2}{2} = \frac{z-3}{-3}$, $y = 4$.
6. $x = 6$, $\frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{7}$.
7. $\frac{x-4}{\sqrt{2}} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{1}$; $\frac{x-4}{\sqrt{2}} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-1}$.
8. $x = 3$, $\frac{y+2}{-2} = \frac{z-7}{7}$.
9. $x = 3$, $y = -4$.
10. $x = -2$, $y = 1$.
17. $\frac{x+7}{2} = \frac{y-3}{-11} = \frac{z+5}{-10}$.
18. $x + 6 = y - 5 = 3 - z$.
19. $\frac{x-3}{8} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-3}$.
20. $34° 22'$.
23. $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{5}$.
24. $x = 5$, $\frac{y}{3} = \frac{z-7}{-4}$.
26. $y = 3$, $z = -4$.
33. $x = 6 + \frac{1}{2}t$, $y = -4 - \frac{\sqrt{2}}{2}t$, $z = 2 + \frac{1}{2}t$;

    $x = 6 + \frac{1}{2}t$, $y = -4 - \frac{\sqrt{2}}{2}t$, $z = 2 - \frac{1}{2}t$.
34. $x = 5 + \frac{2}{3}t$, $y = -3 - \frac{2}{3}t$, $z = \frac{1}{3}t$.
35. $x = 1 + \frac{1}{9}t$, $y = 2 + \frac{4}{9}t$, $z = -3 + \frac{8}{9}t$.

Grupo 58, p. 381

13. $3x + 5y - 4z + 4 = 0$.
14. $5x + 16y + 3z + 2 = 0$.
15. $(2, 1, 0)$, $(\frac{7}{3}, 0, -\frac{5}{3})$, $(0, 7, 10)$.
22. $134° 11'$.
25. $70° 54'$.

Grupo 59, p. 386

1. $4° 6'$.
2. $12° 33'$.
5. 7.
6. 11.
7. 9.
8. 3.
9. $\frac{17}{6}\sqrt{3}$.
10. $\frac{1}{6}\sqrt{6}$.
11. $3x - y - 2z + 4 = 0$.
12. $2x + 7y + 13z - 19 = 0$.
13. $\frac{x-7}{11} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z-9}{-12}$.
15. $\frac{x-6}{1} = \frac{y-4}{7} = \frac{z+2}{5}$.
16. $7x + 6y + z - 4 = 0$.
17. $x - 9y - 17z + 3 = 0$.
18. 2.
19. $5x - 18y - 7z + 19 = 0$.
20. $2x + 10y - 7z - 7 = 0$
22. $11x - 7y - 8z = 49$.
23. $29x + 9y + z - 72 = 0$.
24. $\frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{-13} = \frac{z+1}{-8}$.
25. $\frac{x-1}{21} = \frac{y-6}{31} = \frac{z+5}{-60}$.
26. $27x + 19y - 21z + 53 = 0$.
27. $11x + 15y - 4z + 67 = 0$.
28. $\frac{5}{11}\sqrt{11}$.
29. $3x - 4y + 8z - 8 = 0$.
30. 2.

Grupo 61, p. 398

2. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 4z + 3 = 0.$
3. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 17.$
4. Centro $(4, -3, 6)$; $r = 7.$
5. 16π unidades cuadradas.
6. $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z = 4.$
8. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z = 44.$
10. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z = 70.$
11. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z = 3.$
18. $5x - 3y + 5z + 1 = 0.$
19. $8x + 2y + 8z + 17 = 0,\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0.$
20. $\left(-\frac{551}{32}, \frac{235}{16}, \frac{39}{32}\right).$
21. $x^2 + y^2 + z^2 - 19x - 32y - 21z + 70 = 0.$
22. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 4z + 8 = 0;$
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 24y + 22z + 44 = 0.$
25. $\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}\right).$
26. $\left(5, \frac{\pi}{2}, \text{arc tg } (-4/3)\right), (7, \text{arc cos } 3/7, \text{arc tg } 1/2).$
27. $r = 4 \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta.$
28. *a*) $\theta = \text{arc tg } (-1/4)$; *b*) $r \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta = 2$; *c*) $r \text{ sen } \phi = 2$;
d) $r^2 \text{ sen}^2 \phi + 2r^2 \cos^2 \phi = 4$; *e*) $\phi = 45°, \phi = 135°.$
30. *a*) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$; *b*) $y = 7$; *c*) $x^2 + y^2 + z^2 - 3z = 0.$

Grupo 62, p. 405

10. $y^2 + z^2 + 2yz - 4x + 4z = 0.$
11. $x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xy + 2yz - 1 = 0.$
12. $x^2 - y^2 - 4z^2 - 4yz - 1 = 0.$
13. $x^2 + 4z^2 - 4xz + y - 1 = 0.$
14. $4x^2 + 64y^2 + z^2 - 32xy + 4z = 0.$
15. $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0$; $[1, 2, -1]$.
16. $2y^2 + z^2 = 2,\ x = 0$; $[1, 2, 3]$.
17. $xz = 1,\ y = 0$; $[2, -1, 0]$.
18. $x^2 + z^2 - 2z = 0.$
19. $x^2 + z^2 + 2xz + 2x - 2z = 1.$
20. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2\right), (-1, \sqrt{3}, 4).$
21. $(5, \text{arc tg } 4/3, -7), (13, \text{arc tg } (-12/5), 8).$
22. *a*) $\theta = \text{arc tg } 2$; *b*) $r = 2 \text{ sen } \theta$; *c*) $r^2 + z^2 = 4$;
d) $r^2 \cos^2 \theta - z^2 = 4$; *e*) $r^2 \text{ sen}^2 \theta = 4z.$
23. *a*) $x^2 + y^2 = 4$; *b*) $x^2 + y^2 = z^2$; *c*) $x^2 + y^2 = 4x$;
d) $x + y - z = 4$; *e*) $y^2 + 4z^2 = 4.$

Grupo 63, p. 410

1. $x^2 + y^2 = z^2.$
2. $z^2 + 2xy = 4y.$
3. $8x^2 - 9y^2 - 9z^2 - 6xy + 22x + 12y + 5 = 0.$
4. $4x^2 - 7y^2 - 16z^2 - 4xy - 16yz + 12x + 26y + 48z = 31.$
5. $4x^3 - yz^2 = 0.$

18. $x^2 - y^2 + z^2 = 0$.
19. $xy + xz + yz = 0$.
20. $\frac{32}{3}\pi$ unidades cúbicas.
21. $9\sqrt{2}\pi$ unidades cuadradas.
22. *a*) $\phi = \text{arc tg}\,(\pm\sqrt{2})$; *b*) $r = \pm\sqrt{2}z$.

Grupo 64, p. 414

5. $x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \phi = 0$.
6. $y^2 + z^2 - 4px = 0$.
7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.
9. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
10. $9x^2 - y^2 - z^2 = 0$.
11. $x^2 + z^2 - 2y = 0$.
12. $y^2 - x^2 - z^2 = 4$.
13. $9x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$.
14. $x^2 + z^2 + 2y = 6$.
15. $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4z = 6$.
16. $9x^2 + 9y^2 - 4z^2 + 24z = 36$.
17. $y^4 - 4x^2 - 4z^2 = 0$.
18. $x^6 - y^2 - z^2 = 0$.
19. $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
20. $x^2z^2 + y^2z^2 = 1$.
27. $r \operatorname{sen}^2 \phi - 2 \cos \phi = 0$.
28. $r^2 \cos^2 \theta + 4r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 4z^2 = 4$.
29. $5x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 45$.
30. $(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 = 4b^2(y^2 + z^2)$.

Grupo 65, p. 418

1. $x^2 - 4y^2 = 4$.
2. $x^2 + y^2 - 9z^2 = 0$.
3. $x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$.
4. $x^2 - 9y^2 + 9z^2 = 9$.
5. $x^2 - 4y^2 = z$.
6. $xy + xz + yz = 0$.
22. $y^2(x - 1)^2 = x(x + z - 1)^2$.
23. $y^2z^5 - z^6 + 2xz^3 - x^2 = 0$.
24. $4x^2 = (4 - y^2)(2 - z)^2$.
25. $36z^2 = (x - 3)^2(4 - y^2)$.

Grupo 66, p. 423

2. $P_1(2, 0, 7)$, $P_2(-6, 4, 7)$.
3. $P_1(-4, 1, -3)$, $P_2(-1, -6, -2)$.
4. $x'^2 + y'^2 - 4z'^2 = 0$.
6. $2x'^2 + 3z'^2 = 6$.
7. $9x'^2 + 4y'^2 + 36z'^2 = 36$.
8. $x'^2 - 4y'^2 + 2z'^2 = 4$.
9. $2x'^2 + 2y'^2 + 2z'^2 = 7$.
10. $y'^3 = z'^2$.
14. $(2, 7, 1)$.
15. $(3, -6, 9)$.
18. $x'^2 - y'^2 + z'^2 = 0$.
19. $4x'^2 + 4y'^2 + z'^2 = 4$.

Grupo 67, p. 436

8. $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$.
9. $8\sqrt{2}\pi$ unidades cúbicas.
20. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$.
21. $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 7$.
32. $x^2 - 2y^2 = 2z$.

Grupo 70, p. 450

1. $(1, 2, 3)$.
3. $(0, 4, 6)$, $(-4, 3, 3)$.
4. $(2, 0, 0)$, $(-2, 0, 0)$.

INDICE ALFABETICO

A

Abscisa, 5.
Adición de ordenadas, 309.
Agnesi, 290.
Alfabeto griego, 462.
Algebra, fórmulas, 457.
Amplitud, 296.
Angulo,
  cóncavo, 16.
  de dos curvas, 124.
  de dos planos, 350.
  de dos rectas, 20.
    dirigidas, 16, 333.
  de fase, 297.
  generador, 414.
  de inclinación, 17.
  de una recta y un plano, 384.
  vectorial, 238.
Angulos directores, 328.
Anillo de ancla, 416.
Arco parabólico, 167.
Area de un triángulo, 86.
Argumento, 238.
Arquímedes, 244, 250.
Artificio de los números directores, 338.
Asíntotas,
  de una curva, 41.
  de la hipérbola, 198.
Astroide, 277.

B

Baricentro, 16.
Bernoulli, 248.
Bifoliada, 295.
Bisectrices, 84.
Boyle, 290.
Braquistocrona, 274.
Bruja, 290.

C

Caracol, 249, 262.
Cardioide, 247, 249, 264.
  ecuaciones paramétricas de la, 276.
Cassini, 263.
Catenaria, 311.
Centro,
  de gravedad del triángulo, 327.
  radical, 118, 399.
  de simetría, 35.
Centroide del tetraedro, 327.
Ciclo, 296.
Cicloide, 268, 272.
Cilindro,
  hiperbólico, 438.
  parabólico, 394.
Cilindros proyectantes, 444.
Círculo director, 281.
Circuncentro, 64.
Circunferencia, 99.
  cuerda de contacto, 129.
  determinada por tres condiciones, 106.
  ecuación,
    canónica, 100.
    en coordenadas polares, 254.
    en forma de determinante, 108.
    forma ordinaria, 99.
    general, 103.
    de una tangente, 125.
  ecuaciones paramétricas, 265.
  evolvente de la, 279.
  exinscrita, 110.

Circunferencia,
de los nueve puntos, 132.
Cisoide, 45, 249, 262, 291.
Colineales, 88.
Concíclicos, 108.
Concoide, 249, 264, 292.
Condición necesaria y suficiente, 19.
Cónica,
definición analítica, 212.
definición geométrica, 220.
no central, 210.
Cónicas,
auto-ortogonales, 231.
centrales, 210.
coaxiales, 230.
en coordenadas polares, 256.
degeneradas, 210.
género,
elipse, 216.
hipérbola, 216.
parábola, 216.
homofocales, 209, 229.
representación paramétrica, 269.
resumen, 211.
Cono asintótico, 431.
Conoide, 419.
Construcción,
de curvas, 43, 244, 446.
en coordenadas polares, 244.
del espacio, 446.
de superficies, 392.
de volúmenes, 451.
Coordenadas,
cilíndricas, 403.
esféricas, 396.
polares, 237.
par principal, 239.
rectangulares, 6.
Cosecantoide, 300.
Cosenos directores, 328.
Cosinusoide, 299.
Cotangentoide, 300.
Cramer, 459.
Cruciforme, 295.
Cuadrante, 5.
Cuadratura del círculo, 293.
Cuádricas, 425.
con centro, 426.
sistema de 375.
sin centro, 426, 433.
Cuádricas,
clasificación, 427.
homofocales, 439.
Cuerda,
de contacto, 129, 164, 190, 209.
de la elipse, 174.
focal, 150, 174, 192.
de la hipérbola, 192.
de la parábola, 150.
Curva,
de Agnesi, 290.
alabeada, 440.
algebraica, 286.
de error, 307.
exponencial, 306.
de Lamé, 295.
logarítmica, 304.
pedal, 282.
plana de grado superior, 287.
polinomia, 287.
de probabilidad, 307.
Curvas,
circundantes, 312.
compuestas, 309.
en el espacio, 440.
ortogonales, 124.
planas, 441.
polinomias, 287.
potenciales, 289.
trascendentes, 286.
trigonométricas inversas, 301.

D

Descartes, 10, 295.
Determinantes, 458.
Diámetro, 164, 174, 190, 192, 210.
Diámetros conjugados, 190, 210.
Directriz, 149, 220, 223, 224, 400, 406.
Discusión de una ecuación, 33.
Distancia entre dos puntos, 5, 11, 251, 321.
División de un segmento, 12, 323.
Duplicación del cubo, 291.

E

e^x y e^{-x}, valores de, 468.
Ecuación,
discusión de una, 33.

Ecuación,
general de segundo grado,
con dos variables, 212.
con tres variables, 425.
homogénea, 408.
lineal, 65, 66.
de un lugar geométrico, 33, 50.
polar, 240.
de la recta en el plano, 56.
en coordenadas polares, 253.
dada por dos condiciones, 67.
dada su pendiente y la ordenada en el origen, 59.
forma de determinante, 89.
forma general, 65.
forma normal, 72.
forma punto y pendiente, 58.
forma simétrica, 61.
que pasa por dos puntos, 60.
rectangular, 240.
de segundo grado, 457.
Ecuaciones,
de las bisectrices, 84.
equivalentes, 244.
factorizables, 47.
paramétricas, 266, 375, 397, 404, 448.
recíprocas, 143.
de la recta en el espacio, 371.
forma general, 371.
forma paramétrica, 375.
forma simétrica, 372.
planos proyectantes, 377.
que pasa por dos puntos, 374.
de transformación, 133.
Eje,
conjugado, 192.
focal, 173, 192.
mayor, 173.
menor, 174.
normal, 174, 192.
a noventa grados, 238.
de la parábola, 149.
polar, 237.
radical, 114, 399.
de revolución, 411.
de simetría, 35.
transverso, 192.
Ejes,
conjugados, 192.
de coordenadas, 4, 5, 318.
Elipse, 173.
ángulo excéntrico, 271.
círculo director, 281.
círculo menor, 272.
círculo principal, 272.
como sección cónica, 235.
cuerda de contacto, 190.
diámetro, 174.
diámetros conjugados, 190.
directrices, 224.
ecuaciones paramétricas, 269.
excentricidad, 176, 222, 224.
primera ecuación, 177.
propiedad focal, 187.
propiedades, 186.
segunda ecuación, 181.
tangente a la, 186.
Elipsoide, 428.
de revolución, 429.
Epicicloide, 274.
Esfera, 395.
Esferoide, 415, 429.
Espiral,
de Arquímedes, 244, 250.
hiperbólica, 249.
logarítmica, 249.
parabólica, 249.
Estrofoide, 264, 295.
Euler, 72.
Evolvente, 279.
de la circunferencia, 279.
Excentricidad, 176, 194, 220, 222.
Extensión,
de una curva, 39.
del lugar geométrico, 246.
de una superficie, 393.

F

Factor,
de amplitud, 297.
de crecimiento, 312.
de periodicidad, 297.
Familia,
de circunferencias, 110.
de cónicas, 228.
de curvas, 228.
de esferas, 399.
de planos, 366, 368.
de rectas, 90.
Foco, 220.

Focos, 149, 173, 191, 220.
Forma,
  canónica, 100.
  normal, 72. 356.
Fórmulas, 456.
Función, 285.
  algebraica, 286.
  cuadrática, 164.
  exponencial, 304.
  hiperbólica, 310.
  homogénea, 407.
  lineal, 66.
  multiforme, 301.
  periódica, 296.
  racional, 286.
    entera, 285.
  trascendente, 286.
  uniforme, 301.

G

Generatriz, 400, 406, 411, 416.
Género,
  elipse, 216.
  hipérbola, 216.
  parábola, 216.
Geometría,
  analítica, carácter de la, 10.
  cartesiana, 10.
  pura, 10.
Grado, 286.
Gráficas, 33, 246, 267.

H

Haz,
  de planos, 367.
  de rectas, 90.
Hélice, 449.
Hipérbola, 191.
  ángulo excéntrico, 272.
  asíntotas, 198.
  círculo auxiliar, 272.
  como sección cónica, 235.
  cuerda de contacto, 209.
  diámetro, 192, 210.
  diámetros conjugados, 210.
  directrices, 224.
  ecuaciones paramétricas, 272.
  equilátera, 39, 200.
  excentricidad, 194, 222.
  primera ecuación, 192.
  propiedad focal, 208.
Hipérbola,
  propiedades, 207.
  rectangular, 200.
  segunda ecuación, 203.
  tangente, 207.
Hipérbolas conjugadas, 201.
Hiperboloide,
  de una hoja, 429.
  de dos hojas, 431.
  de revolución, 413, 414. 432.
Hiperboloides conjugados, 433.
Hipocicloide, 274.
Hoja,
  de Descartes, 295.
  de una superficie cónica, 406.

I

Incentro, 85.
Inclinación, 17.
Indicador, 215.
Intersecciones, 34, 46, 244, 249, 345, 346, 443.

L

Lado recto, 150, 174, 192.
Lamé, 295.
Lemniscata, 248, 249.
Ley,
  de Boyle, 290.
  del interés compuesto, 306.
Lituus, 249.
Logaritmos, 305, 457, 464.
Longitud,
  de la normal, 123.
  de un segmento, 1, 4.
  de la tangente, 123.
Lugares geométricos, 33, 50.

M

Maclaurin, 295.
Meridiano, 412.
Método paramétrico, 279.

N

Normal,
  a una curva, 123.
  ecuación de la, 123.
  a un plano, 341.
Números,
  directores 331.
  reales, 6.

O

Octante, 319.
Ordenada, 5.
  en el origen, 59.
Origen, 1, 5, 318.
Ortocentro, 64.
Ovalos de Cassini, 263.

P

Papel coordenado polar, 239.
Parábola, 149.
  aplicaciones, 167.
  cúbica, 38.
  cuerda de contacto, 164.
  diámetro, 164.
  ecuaciones paramétricas, 270.
  excentricidad, 222.
  primera ecuación, 152.
  propiedad focal, 168.
  sección de un cono, 235.
  segunda ecuación, 155.
  semicúbica, 40.
  tangente a la, 161.
Paraboloide,
  elíptico, 433.
  hiperbólico, 417, 434.
  de revolución, 393, 414, 434.
Paraboloides homofocales, 439.
Paralelismo,
  de planos, 352.
  de recta y plano, 383.
  de rectas, 23, 336, 338.
Paralelo, 412.
Parámetro, 91, 266.
Pascal, 262.
Pendiente,
  de una curva, 121.
  final, 21.
  inicial, 21.
  de una recta, 16.
Período, 296.
Perpendicularidad,
  de planos, 352.
  de recta y plano, 383.
  de rectas, 23, 336, 338.
Plano, 341.
  ecuación del, 341, 348, 350.
  radical, 399.
  de simetría, 391.
Planos,
  asintóticos, 438.
  bisectores, 362.
  coordenados, 318.
  proyectantes, 377.
Podaria, 284.
Podarias, 282.
Polo, 237.
Potencias y raíces, 468.
Propiedad focal, 168, 187, 208.
Proyección ortogonal, 321.
Proyecciones paralelas, 320.
Punto,
  aislado, 295.
  de contacto, 121.
  inicial, 1.
  máximo, 165.
  medio, 13, 325.
  mínimo, 165.
  de tangencia, 121.
Puntos concíclicos, 108.

R

Radiación de planos, 368.
Radio vector, 150, 174, 192, 237, 397.
Recta,
  de Euler, 72.
  final, 20.
  inicial, 20.
  de Simpson, 132.
Rectas,
  concurrentes, 71.
  que se cruzan, 327.
Reflector parabólico, 170.
Regla de Cramer, 459.
Regulus, 431.
Rosa de cuatro hojas, 249.
Rotación de ejes, 139, 420, 422.
Ruleta, 272.

S

Secantoide, 300.
Sección meridiana, 412.
Secciones cónicas, 210, 233.
  casos límites, 236.
  planas, 233.
Segmento, 1.
  dirigido, 1.
Serpentina, 295.

Simetría, 35.
en coordenadas polares, 245.
de una curva, 35, 245.
en el espacio, 391.
Simpson, 132.
Sinusoide, 295.
Sistema,
de cónicas, 228.
coordenado,
lineal, 3, 4.
de mano derecha, 318.
de mano izquierda, 318.
en el plano, 5.
de cuádricas sin centro, 439
de ecuaciones, 458.
lineales, 458
Subnormal, 123.
Subtangente, 123.
Superficie,
cilíndrica, 400, 402.
circular, 403.
elíptica, 403.
hiperbólica, 403.
parabólica, 403.
cónica, 406.
reglada, 416.
Superficies, 389.
construcción de, 392.
discusión de la ecuación, 390.
extensión, 393.
intercepciones, 346,
de revolución, 411.
trazas, 346.

T

Tabla de potencias y raíces, 468.
Tablas, 463.
Tangencia, condición de, 122.
Tangente,
a una circunferencia, 125.
a una cónica, 226.
a una curva, 120.
ecuación de una, 123.
a una elipse, 186.
a una hipérbola, 207.
longitud de la, 123.
a una parábola, 161.
Tangentoide, 299.
Terna ordenada, 320.
Tipo,
hiperbólico, 289.
parabólico, 289.
Toro, 416.
Transformación de coordenadas, 133, 241, 397, 404, 419.
Traslación de ejes, 135, 419.
Trayectorias ortogonales, 124, 231.
Trigonometría, fórmulas, 459.
Trinomio de segundo grado, 164.
Trisección de un ángulo, 291.
Trisectriz, 295.
Trocoide, 274.

V

Valores principales, 302.
Variable, 285.
Variables auxiliares, 279.
Vértice de la parábola, 150.
Vértices,
de la elipse, 173.
de la hipérbola, 192.
Vibraciones decrecientes, 311.
Volúmenes, 451.

—ooo—

ESTA OBRA SE TERMINO DE IMPRIMIR EL DIA
9 DE MAYO DE 1989, EN LOS TALLERES DE
IMPRENTA ALDINA, S. R. L.
OBRERO MUNDIAL 201, COL. DEL VALLE
MEXICO, D. F.

LA EDICION CONSTA DE 20,000 EJEMPLARES
Y SOBRANTES PARA REPOSICION

Obras afines:

GEOMETRIA ANALITICA DEL ESPACIO
Enfoque vectorial

Zósimo Menna Goncalves

Esta obra es el segundo volumen de un curso regular sobre Geometría Analítica. El primer volumen, titulado GEOMETRIA ANALITICA PLANA, del mismo autor y editado por la misma editorial, es el complemento lógico de esta obra y ambos abarcan todos los temas que por lo general se tratan en un curso de Geometría Analítica.

Se exponen los temas en forma elemental pero consistente y completa, lo que permite que haya continuidad del primero al último capítulo. Se enfatiza la técnica, aunque también el autor ofrece claridad en los conceptos. La forma amena en que se trata el tema constituye una de sus principales características.

Este volumen, así como el titulado GEOMETRIA ANALITICA PLANA, son magníficos libros de texto para los cursos que se imparten en los dos primeros semestres de las carreras profesionales en Ciencias e Ingeniería.

GEOMETRIA ANALITICA PLANA
Enfoque vectorial

Zósimo Menna Gonçalves

En este libro se estudian algunas curvas algebraicas y trascendentes especiales de mucho uso. Al final de cada capítulo se presentan ejercicios resueltos. Además, la obra se modificó en forma sustancial, no sólo en cuanto al contenido, sino especialmente respecto a la aplicación del método vectorial que se trata aquí de manera más amplia.

En la parte final se incluye un apéndice que resume las principales fórmulas y los conocimientos relativos a vectores en el plano coordenado cartesiano adoptando las notaciones más útiles.

Lo más sobresaliente de esta obra es la claridad y brevedad con que se tratan los conceptos, lo que la hace un excelente libro de texto para los cursos que se imparten en las carreras de Ingeniería, Matemáticas y Física.

AREA: MATEMATICAS Y ESTADISTICA

ISBN 968 — 18 — 1176 — 3